DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Monika Kośko
Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii TWP w Olsztynie
Michał Pietrzak
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wykorzystanie przełącznikowych modeli typu Markowa w modelowaniu zmienności finansowych szeregów czasowych*

1. Wprowadzenie

Zmienność finansowych szeregów stóp zwrotu jest ważnym aspektem wielu ekonomicznych decyzji. W szeregach o dużej częstotliwości zmienność różnicuje się w czasie, a okresy o różnej zmienności mają tendencję do grupowania. Aby wychwycić tego rodzaju zjawisko wielu autorów wykorzystuje strukturę GARCH, wprowadzoną w pracy Bollerslev (1986). Modele typu GARCH uwzględniają efekt grupowania wariancji warunkowej, ale prognozy uzyskane na ich podstawie są zwykle przeszacowane. Sposobem na polepszenie własności prognostycznych modeli GARCH może być wprowadzenie specyfikacji modelu przełącznikowego Markowa (Markov switching). Po raz pierwszy model z przełączeniem typu Markowa wprowadzony został w pracy Hamilton (1989) do opisu cyklu koniunkturalnego. Następnie rozważono możliwość wykorzystania łańcuchów Markowa do modelowania zmienności. Jako pierwszy wprowadzony został model SWARCH, gdzie połączono model ARCH z modelem przełącznikowym Markowa (patrz Hamilton i Susmel, 1994). Kolejnym krokiem było rozszerzenie modelu SWARCH o proces GARCH, w wyniku czego otrzymano model MS-GARCH. Model ten opisany został w pracach Davidson (1994), Klassen (2002), Gray (1996), w których każdy z autorów w

* W przypadku Michała Pietrzaka druk publikacji został sfinansowany przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu w ramach grantu UMK nr 333 E.

różny sposób zdefiniował równanie warunkowej wariancji, wykorzystywane podczas estymacji parametrów modelu. Celem artykułu jest prezentacja modelu MS-AR-GARCH oraz wykorzystanie tego modelu do opisu zmienności i wyznaczenia prognoz empirycznych finansowych szeregów czasowych.

2. Budowa modelu MS-AR-GARCH

Modele AR-GARCH i MS-AR-GARCH[1] różnią się między sobą, przede wszystkim koncepcją, co do sposobu wyjaśnienia różnicującej się w czasie zmienności. W modelu AR-GARCH zmienność opisywana jest poprzez uwzględnienie poziomu zmienności z okresów wcześniejszych. Dlatego model ten dobrze opisuje własność skupiania zmienności, gdzie przez dłuższy czas utrzymuje się wysoka wariancja, a następnie obserwuje się okres niskiej wariancji. W przypadku modelu MS-AR-GARCH skupianie się zmienności jest traktowane jako wynik przebywania procesu przez pewien czas w jednym ze stanów, a następnie przeskoku i przebywania w innym stanie. Występowanie r stanów w badanym procesie skutkuje tzw. mieszanką równań opisujących warunkową wariancję, co podobnie, jak w przypadku modelu AR-GARCH pozwala na dobry opis własności skupiania zmienności w szeregu. Struktura przełącznikowa modelu ma jednak zapewnić jego lepsze własności prognostyczne w porównaniu z modelem AR-GARCH. Przełącznikowy model MS-AR-GARCH przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
& y_t \mid Y_{t-1}, s_t, \theta^{(i)} \sim \begin{cases} y_t^1 & dla \quad s_t = 1 \\ \vdots & \\ y_t^r & dla \quad s_t = r \end{cases} \\
& y_t^i = \mu_t^i + \varepsilon_t^i \\
& \varepsilon_t^i = u_t \sqrt{h_t^i}, u_t \sim IID(0,1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie:

y_t - jest wartością procesu w chwili t,

Y_{t-1} - stanowi zakres informacji dotyczącej badanego procesu z przeszłości,

$\theta^{(i)} = \left[p_{ii}, \beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \gamma_1^{(i)}, df^{(i)}\right]$- wektor parametrów z i-tego stanu,

$s_t = i$ - stan $i \in \{1,2,...,r\}$, w którym znajduje się proces w chwili t.

[1] Modele GARCH i MS-GARCH zostały rozszerzone do modeli AR-GARCH i MS-AR-GARCH poprzez dodanie procesu autoregresyjnego AR(p), w celu uzyskania możliwości opisu autorelacji w szeregu czasowym.

Warunkowa średnia w chwili t dla i-tego reżimu jest modelowana za pomocą procesu autoregresyjnego AR(r) o postaci:

$$\mu_t^i = \alpha_0(s_i = i) + \alpha_1(s_t = i)y_{t-1} + ... + \alpha_p(s_t = i)y_{t-p}\,, \tag{2}$$

natomiast warunkowa wariancja w chwili t dla i-tego reżimu określona jest poprzez proces GARCH(p,q) o postaci:

$$h_t^i = \beta_0(s_t = i) + \sum_{l=1}^{p} \beta_l(s_t = i)\varepsilon_{t-l}^2 + \sum_{k}^{q} \gamma_k(s_t = i)h_{t-k}\ . \tag{3}$$

3. Estymacja modelu MS-AR-GARCH

Estymacja modelu MS-AR-GARCH określonego wzorem (1) jest w praktyce trudna. W przypadku, gdy chcemy znaleźć wartość wariancji warunkowej h_t^i, przy założeniu dwóch stanów i procesu GARCH(1,1), należy wziąć pod uwagę dwa możliwe równania wariancji warunkowej h_{t-1}^i, w zależności od stanu $s_{t-1} = i$. Następnie dla każdego równania wariancji warunkowej h_{t-1}^i należy rozważyć dwa równania dla wariancji h_{t-2}^i, ze względu na dwa możliwe stany $s_{t-2} = i$. Czynność ta jest powtarzana do momentu, gdy $t = 1$. Widoczny staje się fakt, że liczba stanów, którą należy rozpatrzyć szybko rośnie wraz z liczebnością szeregu co powoduje, iż oszacowanie parametrów modelu staje się niewykonalne. W literaturze przedmiotu pojawiły się trzy podejścia w rozwiązaniu tego problemu.

Pierwszym z nich jest wersja zaproponowana w pracy Davidson (2004), gdzie proces GARCH przekształcany jest na proces autoregresyjny z nieskończoną liczba opóźnień ARCH(∞):

$$h_t^i = \frac{\beta_0(s_t = i)}{1 - \beta_1(s_t = i) - ... - \beta_q(s_t = i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(s_t = i)\varepsilon_{t-1}^2\ . \tag{4}$$

Zaletą tego rozwiązania jest to, że wartość wariancji warunkowej h_i^t zależy jedynie od stanu s_t w chwili *t*.

Drugą propozycję stanowi podejście zaproponowane w pracy Gray (1996), gdzie wartości warunkowej wariancji opóźnione w czasie są liczone jako wartość oczekiwana z kolejnych wariancji dla wszystkich stanów. W przypadku procesu GARCH(1,1) równanie dla warunkowej wariancji określone jest:

$$h_t^i = \beta_0(s_t = i) + \beta_1(s_t = i)\varepsilon_{t-1}^2 + E(h_{t-1})\,, \tag{5}$$

$$E(h_{t-1}) = P(s_{t-1} = 1|t-2)h_{t-1}^1 + P(s_{t-1} = 2|t-2)h_{t-1}^2\,, \tag{6}$$

gdzie $P(s_t = i|t-1)$ jest prawdopodobieństwem przebywania procesu w stanie i w momencie t przy znanym zakresie informacji aż do chwili *t-1*.

Trzecie podejście zostało zaproponowane w pracy Klassen'a (2002), w którym rozwinięta została idea Grey'a, gdzie zgodnie ze wzorem (6) wymagana jest znajomość wartości wariancji warunkowych h_{t-1}^1, h_{t-1}^2. W celu wzięcia pod uwagę informacji z okresu t-2, Klassen oblicza wartości wariancji warunkowych h_{t-1}^1, h_{t-1}^2 ze wzoru:

$$h_{t-1}^i = \beta_0 (s_t = i) + \beta_1 (s_t = i)\varepsilon_{t-2}^2 + E(h_{t-2}), \tag{7}$$

gdzie wzór na wartość oczekiwaną $E(h_{t-2})$ jest analogiczny do wzoru (6).

W niniejszym opracowaniu zdefiniowano równanie dla warunkowej wariancji zgodnie ze sposobem zaproponowanym przez Davidsona. Przyjmując założeniami metody największej wiarygodności, oceny parametrów uzyskane zostaną w drodze maksymalizacji wartości funkcji wiarygodności danej wzorem:

$$l = \sum_{t=1}^{T} \ln\left[P(s_t = i|t-1)\cdot f(y_t \mid Y_{t-1}, s_t = 1) + (1 - P(s_t = i|t-1))\cdot f(y_t \mid Y_{t-1}, s_t = 2)\right], \tag{8}$$

$$P(s_t = i|t-1) = P(s_{t-1} = 1|t-1)p_{1i} + P(s_{t-1} = 2|t-1)p_{2i}, \tag{9}$$

$$P(s_{t-1} = i|t-1) = \frac{f(y_{t-1} \mid Y_{t-2}, s_{t-1} = i)\cdot P(s_{t-1} = i|t-2)}{f(y_{t-1} \mid Y_{t-2}, s_{t-1} = 1)\cdot P(s_{t-1} = 1|t-2) + f(y_{t-1} \mid Y_{t-2}, s_{t-1} = 2)\cdot P(s_{t-1} = 2|t-2)}, \tag{10}$$

gdzie:

$f(y_t \mid Y_{t-1}, s_t = i)$ - funkcja gęstości odpowiedniego rozkładu,

$P(s_t = i|t)$- prawdopodobieństwo przebywania procesu w stanie i w momencie t przy znanym zakresie informacji aż do chwili t,

p_{ij} - prawdopodobieństwo warunkowe przejścia ze stanu i do stanu j.

Przy wyznaczania prognoz zmienności na podstawie empirycznych szeregów stóp zwrotu na k okresów, należy wykorzystać następujące wzory

$$y_{T+k}^P = \sum_{i=1}^{2} P(s_{T+k} = i|T)\cdot \mu_{T+k}^{(i)}, \tag{11}$$

$$h_{T+k}^P = \sum_{i=1}^{2} P(s_{T+k} = i|T)\cdot h_{T+k}^{(i)}, \tag{12}$$

gdzie wartości prawdopodobieństw warunkowych $P(s_{T+k} = i|T)$ wyznaczane są rekurencyjne na podstawie wzoru (9).

4. Wyniki badania na podstawie finansowych stóp zwrotu

W analizie empirycznej wykorzystano dane w postaci dziennych stóp zwrotu spółek notowanych na GPW w Warszawie, tworzących indeks WIG20[2]. Ponieważ głównym celem artykułu jest sprawdzenie, czy na podstawie modelu MS-AR-GARCH uzyskiwane są prognozy zmienności lepszej jakości w porównaniu z modelem AR-GARCH, w pierwszej kolejności dokonano estymacji tych typów modeli dla posiadanych szeregów. Następnie posiadając poprawnie wyestymowane modele, wyznaczono jednodniowe prognozy na trzydzieści kolejnych sesji. W kolejnym kroku badania obliczono błędy prognoz ex post, w postaci błędu RMSE, w celu porównania własności prognostycznych obu analizowanych typów modeli.

Tabela 1. Charakterystyki rozkładu zwrotów wybranych szeregów

Charakterystyki rozkładu	**AGORA**	**KGHM**	**NETIA**	**TP**
Odchylenie standardowe	2.1748	2.5438	3.8865	2.1457
Skośność	0.0739	-0.3221	0.9748	0.1762
Kurioza	4.8796	4.9666	21.6540	4.0895
Test Jarque-Bera na normalność rozkładu stóp zwrotu	236.83 [0.000]	285.31 [0.000]	23422.09 [0.000]	87.36 [0.000]
Test Junga-Boxa dla zwrotów-Q(5)	16.81 [0.005]	8.01 [0.156]	85.07 [0.000]	2.31 [0.805]
Test Junga-Boxa dla kwadratów stóp zwrotu-Q(5)	91.52 [0.000]	42.29 [0.000]	437.78 [0.000]	127.19 [0.000]

W nawiasach [] podano wartości p-value.
Źródło: obliczenia własne w programie TSM.

W tabeli 1 przedstawiono wartości podstawowych charakterystyk rozkładu oraz testy weryfikujące wybrane własności stóp zwrotu spółek Agora S.A., KGHM Polska Miedź S.A., Netia S.A., Telekomunikacja Polska S.A.[3]. Wszystkie szeregi posiadają wysokie współczynniki kurtozy oraz odrzucona zostaje hipoteza o rozkładzie normalnym zgodnie z wynikami testu Jarque-Bera. We wszystkich przypadkach występuje efekt ARCH, na co wskazują wyniki testu Ljunga-Boxa dla kwadratów stóp zwrotu. Zgodnie z testem Ljunga-Boxa dla stóp zwrotu, w przypadku spółek KGHM Polska Miedź S.A. oraz Telekomunikacja Polska S.A. występuje zjawisko autokorelacji.

[2] Z dwudziestu spółek indeksu WIG20, do estymacji modeli AR-GARCH oraz MS-AR-GARCH wybrano 12 walorów. Było to konsekwencją założenia, że liczebność szeregu powinna wynosić co najmniej tysiąc obserwacji. Analizowane szeregi pochodziły z okresu od 17.11.2000 (data wprowadzenia systemu WARSET) do 30.03.2007. Logarytmiczne stopy zwrotu przemnożono przez liczbę 100.

[3] Ze względu na ograniczony zakres pracy, spośród posiadanych wyników dla dwunastu spółek, przedstawiono jedynie rezultaty dla wybranych czterech szeregów.

Tabela 2. Wyniki estymacji modeli AR(r)-GARCH(p,q)

Parametry		AGORA	KGHM	NETIA	TPSA
α_1		0.09049 [0.001]	0.05254 [0.037]	-	-
α_2		-0.04946 [0.052]	-	-	-
GARCH ~t-Studenta	β_0	1.56295	2.25333	1.25451	1.07913
	β_1	0.10433 [0.000]	0.04683 [0.000]	0.22546 [0.000]	0.0577 [0.000]
	γ_1	0.8518 [0.000]	0.929 [0.000]	0.79885 [0.000]	0.92625 [0.000]
	df	6.27	7.68	3.36	11.79
Skośność (reszty)		-0.0183	-0.1613	-0.8559	0.2807
Kurtoza (reszty)		4.419	4.2748	14.265	3.6352
Test Jarque-Bera (reszty)		134.084 [0.000]	115.142 [0.000]	8639.09 [0.000]	47.8258 [0.000]
Test Ljunga-Boxa dla reszty – Q(5)		Q(5) = 4.72 [0.451]	Q(5) = 4.80 [0.44]	Q(5) = 22.11 [0.000]	Q(5) = 1.38 [0.926]
Test Ljunga-Boxa dla reszty^2 – Q(5)		Q(5) = 3.77 [0.582]	Q(5) = 3.83 [0.573]	Q(5) = 2.56 [0.767]	Q(5) = 6.79 [0.237]
L. wiarygodności		-3394.98	-3680.38	-3664.22	-3399.97
K. Schwarza		-3400.98	-3685.38	-3668.22	-3403.97
RMSE		11.02	11.58	12.07	5.82

W nawiasach [] podano wartości p-value.
Źródło: obliczenia własne w programie TSM.

Tabela 2 przedstawia wyniki oszacowań dla modeli AR(p)-GARCH(p,q)4. Oszacowane parametry, w przypadku wszystkich spółek, okazały się statystycznie istotne. Podczas analizy reszt należy zwrócić uwagę na wysoką wartość współczynnika kurtozy w procesie resztowym oraz na fakt, że zgodnie z testem Jarque-Bera na normalność rozkładu reszt odrzucana jest hipoteza zerowa. Jest to wynikiem przyjęcia warunkowego rozkładu t-Studenta, który przy niskich stopniach swobody posiada większą kurtozę w porównaniu z rozkładem normalnym. Efekt ARCH został pomyślnie wyeliminowany w przypadku wszystkich szeregów. W dwóch ostatnich wierszach znajdują się wartości kryterium informacyjnego Schwarza oraz wartości błędu RMSE policzonego na podstawie uzyskanych prognoz. Natomiast tabela 3 zawiera wyniki estymacji modeli MS-AR-GARCH, gdzie wszystkie parametry są statystycznie istotne. Uzyskano podobne własności reszt, jak w przypadku modeli AR-GARCH, co świadczy o poprawności estymacji. W przypadku wszystkich spółek efekt ARCH został wyeliminowany.

[4] Obydwa modele AR-GARCH oraz MS-AR-GARCH estymowane były przy założeniu rozkładu normalnego lub rozkładu t-Studenta. W przypadku modelu MS-AR-GARCH dopuszczono możliwość przyjęcia różnych rozkładów warunkowych dla każdego reżimu.

Tabela 3. Wyniki estymacji modeli przełącznikowych MS-AR(r)-GARCH(p,q)

Parametry		AGORA		KGHM		NETIA		TPSA	
α_1		0.0824 [0.002]		0.0512 [0.044]		-		-	
p_{11} / p_{12}		0.531	0.468	0.529	0.470	0.730	0.269	0.001	0.999
p_{21} / p_{22}		0.345	0.654	0.593	0.406	0.099	0.900	0.997	0.002
MS-GARCH ~t-Studenta	$\beta_0^{(1)}$	0.41279		1.5902		3.25384		1.47717	
	$\beta_0^{(2)}$	1.87520		2.4899		0.60522		0.65367	
	$\beta_1^{(1)}$	0.09957 [0.024]		0.03818 [0.046]		0.08113 [0.006]		0.10974 [0.002]	
	$\beta_1^{(2)}$	0.06546 [0.005]		0.06379 [0.059]		0.03624 [0.002]		0.0322 [0.001]	
	$\gamma_1^{(1)}$	0.72049 [0.000]		0.88004 [0.000]		0.96251 [0.000]		0.86794 [0.000]	
	$\gamma_1^{(2)}$	0.93698 [0.000]		0.94625 [0.000]		0.89394 [0.000]		0.95669 [0.000]	
	$df^{(1)}$	25.80		20.47		11.86		12.32	
	$df^{(2)}$	-		-		14.07		15.11	
Skośność (reszty)		0.0045		-0.0699		-0.1651		0.2979	
Kurioza (reszty)		2.9347		2.9693		2.7078		3.4987	
Test Jarque-Bera		0.289 [0.865]		1.3634 [0.506]		12.9381 [0.002]		40.1981 [0.000]	
Test Ljunga-Boxa dla reszt-Q(5)		Q(5) = 3.2861 [0.656]		Q(5) = 4.1743 [0.525]		Q(5) = 12.2193 [0.032]		Q(5) = 1.2405 [0.941]	
Test Ljunga-Boxa dla reszt^2-Q(5)		Q(5) = 8.5991 [0.126]		Q(5) = 4.662 [0.459]		Q(5) = 10.6372 [0.059]		Q(5) = 5.4966 [0.358]	
L. wiarygodności		-3389.94		-3678.97		-3644.7		-3398.28	
K. Schwarza		-3399.94		-3688.97		-3654.7		-3407.28	
RMSE		11.28		11.44		12.15		6.02	

W nawiasach [] podano wartości p-value.
Źródło: obliczenia własne w programie TSM.

5. Podsumowanie

Analizując[5] wielkości kryteriów informacyjnych wyestymowanych modeli AR-GARCH oraz MS-AR-GARCH można zauważyć nieznacznie korzystniejsze wartości dla modeli przełącznikowych. Oznacza to, że obydwa modele równie dobrze dopasowane zostały do danych empirycznych. Porównując następnie wartości błędu RMSE dla zbadanych spółek można stwierdzić, że błędy te dla obydwu typów modeli są na podobnym poziomie. Świadczy to o tym, że na podstawie analizowanych dwunastu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 nie można stwierdzić, że model MS-AR-GARCH posiada lepsze własności prognostyczne zmienności niż model AR-GARCH. Można wyciągnąć

[5] W podsumowaniu rozważono wyniki uzyskane dla wszystkich dwunastu spółek wybranych spośród dwudziestu walorów tworzących indeks WIG20.

wniosek, że do opisu, jak i prognoz finansowych szeregów czasowych należałoby wybrać model mniej skomplikowany w budowie, w postaci modelu AR-GARCH. Należy jednak zauważyć, że wykorzystanie modelu MS-AR-GARCH pozwala na uzyskanie dodatkowych informacji o mechanizmie przechodzenia i przebywania procesu w stanach, w postaci oszacowanych prawdopodobieństw warunkowych. Informacja ta posiada wartość tylko w przypadku, gdy prawdopodobieństwa przyjmują możliwie skrajne wartości ze zbioru $(0,1)$. Na przykład dla spółek Agora S.A., KGHM S.A. prawdopodobieństwa przyjmują wartości z przedziału od 0.4 do 0.6, co nie daje żadnych korzyści informacyjnych, ponieważ istnieją podobne szanse na pozostanie procesu w reżimie lub przejście procesu do innego reżimu. W przypadku spółki Netia S.A. można ustalić średni czas trwania procesu w każdym stanie dzięki analizie prawdopodobieństw, gdzie prawdopodobieństwo pozostawia procesu w stanie pierwszym wynosi 0.73, a pozostania w stanie drugim wynosi 0.9. Natomiast w przypadku stóp zwrotu TP S.A. można stwierdzić, że spółka ta jest bardzo ryzykowna, ponieważ istnieje bardzo małe prawdopodobieństwo pozostania procesu w obecnym stanie i jednocześnie bardzo duże prawdopodobieństwo zmiany stanu.

Literatura

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, vol. 31.

Cai, J. (1994), A Markov Model of Unconditional Variance in ARCH, *Journal of Business and Economic Statistics,* vol. 12.

Davidson, J. (1994), Forecasting Markov-Switching Dynamic, Conditionally Heteroscedastic Proceses, *Statistics and Probability Letters*.

Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 39.

Doman, R. (2004), Forecasting the Polish Financial Market Volatility with Markov Switching Models, *Macromodels'2003*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2004.

Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.

Gray, S. (1996), Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process, *Journal of Financial Economics*, vol. 42.

Hamilton, J.D. (1989), W New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrics* ,vol. 57.

Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994), A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrics,* vol. 57.

Kim, C.-J. (1994), Dynamic Linear Models with Markov-Switching, *Journal of Econometrics,* vol. 60.

Klassen, F. (2002), Improving GARCH Volatility Forecasts Empirical, *Economics*, vol. 27.

Marcucci, J. (2003), Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Switching GARCH models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, vol. 9.