DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Tomasz Zdanowicz
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Porównanie własności prognostycznych modeli dwuliniowych i modeli ARMA z błędami GARCH o nieklasycznych rozkładach

1.Wstęp

Modele ARMA należą do klasyki ekonometrii dynamicznej. Jednak ich zastosowanie w opisie szeregów finansowych jest dość ograniczone ze względu na własności generowanych przez nie procesów. Liniowe modele nie pozwalają na opis skośności, grubych ogonów, leptokurtozy czy efektu ARCH jakie obserwuje się na rynkach finansowych. Zjawiska te występują często ze względu na nieliniowe zachowania uczestników rynku. W pracach dotyczących tego problemu stosuje się różne nieliniowe alternatywne modele takie jak (SE)TAR, NLAR, STUR czy BL (Granger, Terasvirta, 1993, Osińska, Witkowski, 1997). Modele dwuliniowe (BL), powstały w podobnym okresie jak modele (G)ARCH – na przełomie lat 70. i 80. XX wieku jednak do chwili obecnej nie zyskały sobie takiej popularności, głównie ze względu na trudności w estymacji. Praca ma na celu porównanie możliwości prognozowania szeregów czasowych przy wykorzystaniu modeli dwuliniowych oraz porównania jakości tychże prognoz z prognozami uzyskanymi z modeli ARMA-GARCH.

2. Podstawowe informacje dotyczące modeli dwuliniowych

Po raz pierwszy modele dwuliniowe zostały zaproponowane przez Granger'a i Andersen'a (1978) i można je zapisać równaniem:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \varphi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{l=1}^{P} \sum_{k=1}^{Q} \theta_{lk} y_{t-l} \varepsilon_{t-k} , \tag{1}$$

gdzie przyjmuje się $\varphi_0 = 1$. Tak zdefiniowana klasa modeli jest dość szeroka i traktowana jest jako rozszerzenie modeli ARMA. We wspomnianej pracy można też znaleźć klasyfikację modeli dwuliniowych, i tak wymienia się procesy diagonalne, gdy $\theta_{lk} = 0$ dla $k \neq l$, procesy naddiagonalne, gdy $\theta_{lk} = 0$ dla $k<l$ i poddiagonalne, dla których mamy $\theta_{lk} = 0$ gdy $k>l$. Procesy dwuliniowe posiadają szereg ciekawych własności do których zaliczyć można występowanie zgrupowań wariancji, które zwykle rozpoznawane są jako efekt ARCH[1]. Inną ciekawą cechą jest fakt, że rozpisując odpowiednio równanie (1) można otrzymać proces z losowym parametrem[2] zdefiniowany jako:

$$y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + v_t y_{t-1} + \varepsilon_t . \tag{2}$$

Ze względu na opisane własności procesy dwuliniowe bardzo trudno jest odróżnić od procesów GARCH. W literaturze można znaleźć wiele testów które mogą być pomocne w rozpoznaniu danego typu nieliniowości. Jednym z takich testów jest test zaproponowany przez Hinicha. Statystyka testowa wyznaczana jest na podstawie współczynnika bikoherencji, którego estymator wyznacza się ze wzoru (3):

$$\psi^2(\omega_1\omega_2) = \frac{\left|\hat{B}_y(\omega_1\omega_2)\right|^2}{\hat{f}_y(\omega_1)\hat{f}_y(\omega_2)\hat{f}_y(\omega_1+\omega_2)} , \tag{3}$$

gdzie $\hat{B}_y(\omega_1\omega_2)$- estymator bispektrum y, natomiast $\hat{f}_y(\omega_1)$ uśredniony periodogram dla częstości ω_1. Na tej podstawie wyznaczamy statystykę testową postaci:

$$H = 2\psi^2(\omega_1\omega_2). \tag{4}$$

Procedura testowa przebiega dwuetapowo: najpierw testujemy normalność procesu, a w przypadku odrzucenia tej hipotezy bada się także liniowość procesu. Więcej informacji na temat testu można znaleźć w Górka, Osińska (2005).
Kolejnym testem rozpatrywanym w pracy jest test McLeoda i Li (1983). Test ten służy do weryfikacji hipotezy o występowaniu efektu ARCH w szeregu i oparty jest na statystyce testu Ljunga-Boxa dla kwadratów badanego procesu.

Ze względu na trudność rozróżnienia pomiędzy procesami BL i GARCH oraz na dużą liczbę specyfikacji tych ostatnich prezentowane w pracy wyniki

[1] Por. Doman, Doman, 2004.
[2] Patrz Bruzda, 2003.

dotyczą modeli AR(p) i BL(p,0,P,Q) z jednym z trzech równań warunkowej wariancji, tj.:
- GARCH(*R,S*):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{S} \beta_k h_{t-k}\,, \tag{5}$$

- EGARCH(*R,S*):

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} \left(\gamma_{1,i} \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} + \gamma_{2,i} \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right| \right) + \sum_{j=1}^{S} \beta_j \ln(h_{t-j}), \tag{6}$$

- APARCH(*R,S*):

$$\sqrt{h_t}^{\,\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \left(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^{\delta} + \sum_{k=1}^{S} \beta_k \sqrt{h_{t-k}}^{\,\delta}\,. \tag{7}$$

W pracy zastosowano alternatywne do normalnego rozkłady warunkowe, które lepiej modelują własności rozkładów stóp zwrotu. Należą do nich: rozkład t-Studenta, skośny rozkład t-Studenta, Uogólniony Rozkład Błędu (GED) oraz SGED – skośny GED. Funkcję gęstości wymienionych rozkładów można zapisać za pomocą funkcji gęstości rozkładu SGTD – Skośnego Uogólnionego Rozkładu t-Studenta (Theodossiou 1998), postaci:

$$f(x)_{SGTD} = C\left(1 + \left(\frac{k}{v-2}\right)\left(\theta(1 + sign(e)\lambda\sigma)\right)^{-k} |e|^k \right)^{-\frac{v+1}{k}}, \tag{8}$$

gdzie:

$$C_{SGTD} = 0{,}5kB\left(\frac{1}{k},\frac{v}{k}\right)^{-1.5} B\left(\frac{3}{k},\frac{v-2}{k}\right)^{0.5} S(\lambda)\sigma^{-1}, \tag{8a}$$

$$\theta_{SGTD} = \left(\frac{k}{v-2}\right)^{\frac{1}{k}} B\left(\frac{1}{k},\frac{v}{k}\right)^{0.5} B\left(\frac{3}{k},\frac{v-2}{k}\right)^{-0.5} S(\lambda)^{-1}, \tag{8b}$$

$$S(\lambda)_{SGTD} = \left(1 + 3\lambda^2 - 4\lambda^2 B\left(\frac{2}{k},\frac{v-1}{k}\right)^2 B\left(\frac{3}{k},\frac{v-2}{k}\right)^{-1} B\left(\frac{1}{k},\frac{v}{k}\right)^{-1}\right)^{0.5} \tag{8c}$$

$$\delta_{SGTD} = 2\lambda B\left(\frac{2}{k},\frac{v-1}{k}\right) B\left(\frac{3}{k},\frac{v-2}{k}\right)^{-0.5} B\left(\frac{1}{k},\frac{v}{k}\right)^{-0.5} S(\lambda)^{-1}. \tag{8d}$$

We wzorach 8-8d przyjęto następujące oznaczenia: k, v - parametry kontrolujące grubość ogonów i kurtozę $(k > 0, v > 2)$, λ - parametr odpowiedzialny za skośność rozkładu ($|\lambda| < 1$), σ - parametr skali, natomiast $e = y - \mu + \delta\sigma$ to odchylenie od dominanty, a $sign()$ - funkcja znaku.

Należy rozróżnić następujące przypadki:
- $k = 2$ - otrzymujemy rozkład STD z parametrami ν, λ, σ,
- $k = 2$ oraz $\lambda = 0$ - otrzymujemy rozkład TD z parametrami ν, σ,
- $\nu \to \infty$ - otrzymujemy rozkład SGED z parametrami k, λ, σ,
- $\nu \to \infty$ oraz $\lambda = 0$ - otrzymujemy rozkład GED z parametrami k, σ.

Ze względu na specyfikację modeli dwuliniowych istotnym problemem staje się estymacja parametrów. Najpopularniejsze metody jakimi można znaleźć szacunki parametrów modeli dwuliniowych to Nieliniowa Metoda Najmniejszych Kwadratów (NMK) i Metoda Największej Wiarygodności (MNW). W publikacji Subba Rao i Gabr (1984) można znaleźć metodę opartą na KMNK. Ideę tej metody można zapisać w kilku punktach:

1) oszacowanie najlepszego modelu AR dla badanego szeregu i wyznaczenie wektora reszt e_{tI} (można w tym celu zastosować metodę Hannana-Risannena[3]),
2) oszacowanie KMNK modelu:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \varphi_j e_{t-j} + \sum_{l=1}^{P} \sum_{k=1}^{Q} \theta_{lk} y_{t-l} e_{t-k} \, , \tag{9}$$

   a następnie wyznaczenie nowego wektora reszt e_t.
3) powrót do punktu 2.

Procedurę powtarza się tak długo, aż wartości parametrów i wariancja resztowa ustabilizują się. Metoda ta daje dobre wyniki, jednak często zdarza się iż nie osiąga zbieżności, co prowadzi do nieodpowiednich wartości parametrów.
W związku z powyższym zaleca się stosowanie jej do znalezienia wartości startowych dla MNW. W przypadku, gdy zbieżność nie została osiągnięta za wartości startowe części dwuliniowej podstawia się 0. Powyższa metoda zastosowana została w pracy do znalezienia wartości startowych dla MNW. W przypadku parametrów modeli GARCH za startowe wybrane zostały szacunki danego równania przy założeniu modelu AR(p) i normalności rozkładu warunkowego. Z kolei, wartości startowe parametrów samych rozkładów warunkowych pochodziły z rozkładów dopasowanych do rozkładu stóp zwrotu badanych szeregów.
Estymacji parametrów *p, Q, P, R, S* oraz wyboru odpowiedniego równania wariancji dokonano kierując się kryterium Schwarza.

3. Porównanie modeli BL i ARMA z resztami GARCH dla wybranych szeregów finansowych

Do analizy wybrane zostały wybrane indeksy giełd światowych oraz giełdy polskiej z okresu od 3 stycznia 2000 roku do 22 maja 2007 roku, co daje w zależności od giełdy od 1671 do 1863 obserwacji. Pięć ostatnich obserwacji

[3] Zastosowanie procedury Hannana-Risanena proponują Garnger i Terasvirta (1993).

zostało przeznaczonych do oceny prognoz wykonanych z modeli AR(BL)-GARCH. Tabela 1 zawiera wyniki testów Hinicha oraz Ljunga-Boxa.

Tabela 1. Wyniki testów Ljunga-Boxa i Hinicha dla wybranych szeregów

	normalność		liniowość			LB(j) [p-val]	
	H	p-val	R_{emp}	λ	R_{teor}	j=1	j=5
AEX	**48.06**	**0.087**	4.877	2.197	4.328	0.28[0.59]	**21.58[0.001]**
BEL20	**48.13**	**0.085**	5.299	2.23	4.356	**24.161[0.00]**	**43.89[0.00]**
CAC40	17.66	0.996	-	-	-	0.39[0.53]	**14.01[0.02]**
DAX	30.01	0.749	-	-	-	2.34[0.13]	**10.00[0.08]**
DJIA	24.3	0.931	-	-	-	1.03[0.31]	7.40[0.19]
FTSE100	27.57	0.842	-	-	-	**5.00[0.03]**	**28.85[0.00]**
NIKK225	7.82	1.000	-	-	-	0.05[0.82]	3.26[0.660]
NSDQ100	40.85	0.266	-	-	-	**4.18[0.04]**	**20.49[0.001]**
S&P500	27.57	0.843	-	-	-	1.38[0.24]	7.57[0.18]
WIG	7.72	1.000	-	-	-	**3.99[0.046**]	6.09 [0.30]

Pogrubioną czcionką zostały wyróżnione istotne statystyki.
Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie wyników zamieszczonych w powyższej tabeli można powiedzieć, że w większości analizowanych szeregów jest nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładów. W przypadku indeksów AEX i BEL20 test Hinicha wskazał na brak normalności procesu, a w tym drugim szeregu dodatkowo na istnienia związków nieliniowych. Na podstawie testu Ljunga-Boxa można stwierdzić, iż w badanych szeregach występuje autokorelacja. Wyjątkiem są indeksy DJIA, NIKK225 i S&P500, w których zjawisko autokorelacji nie występuje. Następnie do wybranych szeregów dopasowane zostały modele AR(p) i BL(p,0,P,Q) z różnymi rozkładami warunkowymi i równaniami wariancji. Tabela 2 zawiera kryteria informacyjne, statystyki $Q1$, $Q2$, $QX1$[4] dla najlepszych modeli AR(p) oraz dwuliniowych.

[4] Miary obliczne są wg następujących formuł: $Q1 = N\{r_t\hat{r}_t > 0\} / N\{r_t\hat{r}_t \neq 0\}$, $Q2 = N\{r_t\hat{r}_t > 0 \mid r_t r_{t-1} < 0\} / N\{r_t\hat{r}_t \neq 0 \mid r_t r_{t-1} < 0\}$, $QX1 = N\{r_t(h_t - h_{t-1}) < 0\} / N$, gdzie $N\{\}$ - liczba obserwacji, dla których spełniony jest warunek podany w nawiasie, r_t, $\hat{r}_t$ i h_t to empiryczne i teoretyczne stopy zwortu oraz wariancja warunkowa. Więcej na temat alternatywnych miar dopasowania modeli można znaleźć w Brzeszczyński, Kelm, (2002).

Tabela 2. Wyniki estymacji wybranych modeli AR(p)-GARCH i BL(p,0,P,Q)-GARCH z różnymi rozkładami warunkowymi[5]

Szereg	Model	AIC/SC	DW	Q1/Q2	QX1
CAC40	DBL(3,0,3,3)-EGARCH(1,1)-STD	-6.0779/ -6.0392	1.9454	52.6458/ 66.055	46.527
	AR(2)-EGARCH(1,1)-STD	-6.0778/ -6.051	1.9457	53.3477/ 75.739	46.904
DJIA	BL(1,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	-6.5642/ -6.525	1.9671	53.8082/ 72.4607	47.658
	AR(1)-EGARCH(1,1)-TD	-6.5674/ -6.5463	1.9717	52.1644/ 77.4869	47.325
NIKK225	DBL(0,0,4,4)-EGARCH(1,1)-TD	-5.8452/ -5.8146	2.001	51.9843/ 51.7127	48.748
	AR(0)-EGARCH(1,1)-TD	-5.8462/ -5.8278	2.008	50.0838/ 50.0552	48.637
NSDQ100	NBL(2,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	-5.3069/ -5.2678	1.983	55.6164/ 69.5096	48.582
	AR(2)-EGARCH(1,1)-TD	-5.2837/ -5.2626	2.004	53.5597/ 72.4175	48.556
S&P500	PBL(2,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	-6.503/ -6.4609	1.953	52.6575/ 69.3731	48.229
	AR(1)-EGARCH(1,1)-TD	-6.5053/ -6.4842	1.977	52.2192/ 83.7616	48.283
WIG	DBL(1,0.2,2)-GARCH(1,1)-GED	-6.0295/ -6.0055	1.988	53.0114/ 46.5798	50.651
	AR(1)-GARCH(1,1)-GED	-6.0282/ -6.0103	1.996	52.7944/ 44.8426	50.976

Źródło: obliczenia własne.

Dane przedstawione w tabeli 2 pozwalają stwierdzić, że we wszystkich badanych przypadkach model AR-GARCH jest lepszy niż modele BL-GARCH. Jest to zgodne z wynikami testu Hinicha, który dla tych szeregów wskazał normalność procesu. W przypadku szeregów AEX i BEL20 nie udało się dopasować modelu dwuliniowego o istotnych parametrach. Spostrzeżenie to można uzasadnić inną niż dwuliniowa zależnością nieliniową występująca we wspomnianych szeregach.

Innym ciekawym spostrzeżeniem jest fakt iż parametry części dwuliniowej w przypadku modelu dwuliniowego z resztami heteroskedastycznymi były w większości modeli silnie istotne. Natomiast po dołączeniu do modelu równania wariancji duża część z tych parametrów okazała się nieistotna. Taki wynik może być spowodowany zależnościami w wariancji jakie występują w badanych szeregach, które nie są modelowane przez model dwuliniowy w odpowiedni sposób, a które lepiej opisują modele z rodziny GARCH.

[5] W tabeli 2 przyjęto oznaczenia: NBL, PBL, DBL to procesy dwuliniowe naddiagonalne, poddiagonalne i diagonalne. STD, TD, GED – to oznaczenia rozkładów warunkowych odpowiednio skośnego t-Studenta, t-Studenta i Uogólnionego Rozkładu Błędu.

Analizując tabelę 2 można dostrzec, że w przypadku prawie wszystkich szeregów kryteria Schwarza i Akaike'a preferują modele autoregresyjne nad modelami dwuliniowymi, za wyjątkiem szeregu NSDQ100, w którym te kryteria są nieznacznie lepsze dla modelu BL. We wszystkich przypadkach istotny okazał się efekt ARCH, który został opisany poprzez odpowiednie równanie wariancji warunkowej.

Wart podkreślenia jest też fakt, iż w modelach BL posiadających dużą liczbę parametrów, wartości kryteriów informacyjnych są zbliżone do modeli autoregresyjnych.

Na podstawie tych modeli podjęto próbę zbudowania prognoz na 5 okresów naprzód. Do budowy prognoz zastosowano metodę bootstrapową, dla której przyjęto 10000 replikacji. Następnie jakość prognoz oceniono za pomocą pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE) oraz udziału prawidłowych znaków (PCS)[6]. Wyniki zamieszczono w tabeli 3.

Tabela 3. Porównanie prognoz uzyskanych metodą bootstrapową

	Model	RMSE	PCS
CAC40	DBL(3,0,3,3)-EGARCH(1,1)-STD	0.0129	**0.8**
	AR(2)-EGARCH(1,1)-STD	**0.0127**	0.6
DJIA	BL(1,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	0.0097	0.6
	AR(1)-EGARCH(1,1)-TD	**0.0096**	**0.6**
NIKK225	DBL(0,0,4,4)-EGARCH(1,1)-TD	0.0132	0.2
	AR(0)-EGARCH(1,1)-TD	**0.0129**	**0.4**
NSDQ100	NBL(2,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	0.0136	0.6
	AR(2)-EGARCH(1,1)-TD	**0.0134**	**0.8**
S&P500	PBL(2,0,3,3)-EGARCH(1,1)-TD	0.011	**0.6**
	AR(1)-EGARCH(1,1)-TD	**0.0107**	**0.6**
WIG	DBL(1,0.2,2)-GARCH(1,1)-GED	0.0237	0.6
	AR(1)-GARCH(1,1)-GED	**0.0236**	**0.8**

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki zawarte w tabeli 3 pozwalają stwierdzić, iż prognozy uzyskane z modeli dwuliniowych są gorsze od prognoz uzyskanych z modeli autoregresyjnych zarówno pod względem wartości prognoz jak i kierunku zmian. Wyjątkiem jest tu szereg CAC40 dla którego prognozy z modeli dwuliniowych okazały się lepsze pod względem kierunku niż prognozy z modelu AR.

[6] Por. Doman, Doman, 2004.

4. Podsumowanie

W pracy przedstawione zostało porównanie własności prognostycznych modeli ARMA i dwuliniowych wraz ze zmieniającą się w czasie wariancją. Zaprezentowane wyniki pozwalają stwierdzić, że pomimo swoich interesujących własności, takich jak aproksymacja z dowolną dokładnością szeregu w skończonym odcinku czasu lub opis zjawiska skupiania się wariancji, modele dwuliniowe nie pozwalają na lepszy opis szeregów finansowych, niż klasyczne modele ARMA z resztami GARCH. Wyższość tych ostatnich została potwierdzona w opisie badanych procesów w próbie. Podobnie modele dwuliniowe nie sprawdziły się w prognozowaniu – prognozy okazały się gorsze pod względem wartości RMSE jak i PCS. Można powiedzieć, że modele dwuliniowe mimo swoich zalet teoretycznych nie dają lepszych rezultatów w modelowaniu finansowych szeregów czasowych niż modele ARMA-GARCH.

Literatura

Bruzda, J. (2003), Procesy dwuliniowe i procesy GARCH w modelowaniu finansowych szeregów czasowych, *Przegląd statystyczny*, Zeszyt 2.

Brzeszczyński, J., Kelm, R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG-Press, Warszawa.

Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.

Garnger, W. J. C., Andersen, A. P. (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht.

Granger, W. J. C., Terasvirta, T. (1993), *Modeling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford Uniwersity Press, New York

Hinich, M. J. (1982), Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 3, 169–176.

McLeod, A. L., Li, W., K. (1983), Diagnostic Cheking ARMA Time series Models Using Squared Residual Autocorrelations, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 269–273.

Osińska, M. (2006), *Ekonometria finansowa*, PWE Warszawa.

Osińska, M., Górka, J. (2005), Identyfikacja nieliniowości w ekonomicznych szeregach czasowych. Analiza symulacyjna, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Wyd. UMK Toruń.

Subba Rao, T., Gabr, M. M. (1984), *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*, Lecture Notes in Statistics 24, Springer-Verlag.

Theodossiou, P. (1998), Financial data and Skewed Generalized T Distribution, *Management Science*, 44, 1650–1661