DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

*Anna Zamojska*
*Uniwersytet Gdański*

# Zastosowanie modelu TAR w analizie nieliniowych szeregów czasowych

## 1. Wprowadzenie

W wielu procesach finansowych występuje zjawisko nieliniowości, a to oznacza że w procesie modelowania nie można stosować modeli liniowych. Owa nieliniowość szeregów czasowych wynika bezpośrednio z zachowań inwestorów, którzy inaczej reagują na bodźce pozytywne niż na bodźce negatywne. Kolejno zachowania takie prowadzą do występowania asymetrii w szeregu (patrz Chan, 1990). W tej sytuacji jednym z narzędzi, które może być zastosowane w procesie modelowania stóp zwrotu stosowany jest model TAR (Threshold Autoregresive Model) (patrz Osińska, 2006). Użyteczność modelu TAR wynika z jego możliwości do uwzględniania takich zjawisk w szeregu czasowym jak asymetryczna cykliczność zachowań inwestorów, amplituda wahań zależna od częstotliwości danych oraz załamania strukturalne w czasie (patrz Hansen, 1997). Ponadto model TAR może być wykorzystany do modelowania niestacjonarnych szeregów czasowych i do konstrukcji relacji długookresowych (patrz Anders i Granger, 1998).

Celem prowadzonych badań było opisanie dynamiki stóp zwrotu grup funduszy inwestycyjnych za pomocą progowych modeli TAR i MTAR (Momentum TAR) oraz wyznaczenie optymalnych wartości progowych metodą estymacji zgodnej.

## 2. Podstawy teoretyczne modelu TAR

W klasycznej analizie szeregów czasowych standardowo zakłada się liniowość i symetryczne odchylenia, brak autokorelacji oraz istnienie pierwiastków jednostkowych. Natomiast w rzeczywistości bardzo często występuje zjawisko nieliniowości w szeregu zmiennej oraz asymetryczne odchylenia. Dla szeregów, w których obserwowane są te zjawiska, w procesie modelowania można zastosować model TAR (patrz Anders i Granger, 1998). Podstawowa postać tego modelu jest następująca (patrz Cook i Manning, 2003):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t)\rho_2 y_{t-1} + \xi_t, \tag{1}$$

gdzie zmienna *It* zdefiniowana jest następująco:

$$I_t = \begin{cases} 1, & y_{t-1} \geq 0 \\ 0, & y_{t-1} < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Warunkiem wystarczającym dla stacjonarności szeregu *yt* jest spełnienie założenia postaci:

$$-2 < (\rho_1, \rho_2) < 0. \tag{3}$$

Jeśli parametry *ρ1* i *ρ2* są równe zero, wówczas zmienna *yt* jest procesem błądzenia przypadkowego i wartość *yt=0* jest poziomem równowagi w długim okresie czasu. Jeśli *yt-1* jest powyżej 0 (poniżej 0), wówczas prędkość osiągania poziomu równowagi jest równa *ρ1* (*ρ2*). W przypadku, gdy parametry *ρ1* i *ρ*2 są sobie równe i jednocześnie różne od zera wówczas model (1) może być opisany jako proces autoregresyjny rzędu pierwszego.

Klasyczna postać modelu TAR może zostać poddana modyfikacji, polegającej na zmianie stosowanego w relacji (1) progu. Może to być pewna wartość *a0*, którą może być średnia szeregu lub tendencja rozwojowa (patrz Cook i Manning, 2003). Wartości wybranych progów, przy założeniu spełnienia warunków modelu TAR, są długookresowymi poziomami badanej zmiennej *yt*.

Kolejną modyfikacją modelu TAR jest Momentum TAR (MTAR). Jest ona stosowana wówczas, gdy występują istotne różnice pomiędzy dodatnimi i ujemnymi odchyleniami (patrz Cook i Manning, 2003). Zmienna *It* zdefiniowana jest w tym przypadku następująco:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0, & \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Przedmiotem dyskusji może być model TAR wokół średniej, ponieważ w przypadku występowania asymetrii średnia jest obciążona błędem. W celu rozwiązania tego problemu stosowana jest estymacja zgodna (Consistent Threshold Estimation, patrz Anders, 2001 i Chan, 1993).

Model ma postać:

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 [y_{t-1} - \psi] + (1 - I_t)\rho_2 [y_{t-1} - \psi] + \xi_t, \tag{5}$$

gdzie: $\psi = \tau$ lub $\tau_\Delta$. Zmienna *It* dla modeli TAR i MTAR:

$$I_t = \begin{cases} 1, & y_{t-1} \geq \tau \\ 0, & y_{t-1} < \tau \end{cases}, \tag{6}$$

$$I_t = \begin{cases} 1, & \Delta y_{t-1} \geq \tau_\Delta \\ 0, & \Delta y_{t-1} < \tau_\Delta \end{cases}, \tag{7}$$

Wartości $\tau$ i $\tau\Delta$ otrzymywane są w procesie optymalizacji za pomocą metody przeszukiwania "po kracie" (grid - search procedure) wśród dostępnych wartości odpowiednio dla $yt$ lub $\Delta yt$.

Warunki konieczne, które muszą być spełnione w przypadku estymacji modeli TAR można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{cases} \rho_1, \ \rho_2 < 0 \\ (1+\rho_1)(1+\rho_2) < 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Warunki konieczne dane w (6) i (7) są przedmiotem empirycznej weryfikacji w teście zaproponowanym w pracy Enders'a i Granger'a (1998) (EG) do badania występowania pierwiastków jednostkowych w analizowanym szeregu czasowym zmiennej. Jeśli odrzucona jest hipoteza zerowa postaci $\rho_1=\rho_2=0$, wówczas można przejść do testowania hipotezy o występowaniu asymetrii w szeregu zmiennej, gdzie hipoteza zerowa ma postać $\rho_1=\rho_2$. Jeśli hipoteza ta, zakładająca symetryczne odchylenia, zostanie odrzucona wówczas zmienna jest stacjonarna i ma asymetryczne odchylenia. Szereg zmiennej, w którym występują symetryczne odchylenia, jest akceptowany wówczas gdy odrzucona jest hipoteza o występowaniu pierwiastka jednostkowego i nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej postaci: $\rho_1=\rho_2$.

## 3. Materiał i metoda badań

Przedmiotem prowadzonych badań były sumy wartości aktywów netto (WAN) wyodrębnionych grup funduszy inwestycyjnych funkcjonujących na polskim rynku kapitałowym do grudnia 2006 roku. Szeregi czasowe różnią się długością, ponieważ uwzględniony został cały okres funkcjonowania, który jest różny dla analizowanych typów funduszy. Grupy funduszy zostały wyodrębnione zgodnie z klasyfikacją stosowaną przez Izbę Zarządzających Funduszami i Aktywami[1]. W oparciu o stan WAN na koniec miesiąca, obliczone zostały stopy zwrotu dla poszczególnych grup funduszy. Stosowana klasyfikacja jest następująca[2]:

RPP – fundusze pieniężne i gotówkowe, inwestujące zebrane aktywa w depozyty bankowe lub instrumenty rynku pieniężnego.

[1] http://www.izfa.pl

[2] http://www.analizy.pl

PDP – fundusze polskich papierów dłużnych, inwestujące posiadane aktywa w dłużne papiery wartościowe.
SWP – fundusze stabilnego wzrostu, inwestujące od 0 do 50% wartości zgromadzonych aktywów na krajowym rynku akcji.
MIP – fundusze mieszane, inwestujące na krajowym rynku akcji średnio połowę zgromadzonych aktywów (zarówno 0 – 100% jak i 40-60%).
AKP – fundusze polskich akcji, dla których inwestycje na krajowym rynku akcji nie powinny być niższe niż 66% wartości aktywów.
AKZ – fundusze akcji zagranicznych, dla których inwestycje na zagranicznych giełdach nie powinny być niższe niż 66% aktywów.
PDU – fundusze dolarowych papierów dłużnych, inwestujące posiadane aktywa w dłużne papiery wartościowe denominowane w USD.
PDE – fundusze eurowych papierów dłużnych, inwestujące posiadane aktywa w dłużne papiery wartościowe denominowane w EUR.

Analiza dynamiki stóp zwrotu grup funduszy została przeprowadzona w następujących etapach. W pierwszym badano występowanie pierwiastków jednostkowych za pomocą testu EG (test Ender'a i Granger'a), który może być wykorzystany do nieliniowych szeregów z asymetrycznymi odchyleniami. Kolejno badano występowanie autokorelacji w szeregu (test Godfrey'a), w celu doboru odpowiedniej postaci modeli TAR i MTAR. Po określeniu właściwej postaci modelu, przeprowadzono estymację za pomocą MNK oraz przeprowadzono test równości współczynników regresji (test Wald'a).

## 4. Wyniki badań

Analizowane szeregi czasowe stóp zwrotu charakteryzują się dużą zmiennością wokół wartości średniej. Średnia stopa zwrotu dla wszystkich grup jest bliska lub mniejsza od wartości zero. Odchylenie standardowe jest na zbliżonym poziomie dla poszczególnych grup (najmniejsze 0,119 dla PDP i największe 0,357 dla PDE). Ponadto, zauważyć można szczególnie duże różnice występują w zakresie współczynnika asymetrii i kurtozy. W szeregach obserwujemy silną asymetrię dodatnią oraz wysokie wartości dodatnia współczynnika kurtozy.

W kolejnym etapie badania, sprawdzano występowanie autokorelacji (do 12 rzędu) w szeregach stóp zwrotu za pomocą testu Godfrey'a. Analiza występowania autokorelacji w szeregach czasowych wskazała, iż zjawisko to występuje jedynie w przypadku grupy funduszy pieniężnych i gotówkowych (RPP). W związku z powyższym szereg ten został poddany procesowi oczyszczania z autokorelacji (łączna liczba augumentacji wyniosła 18, nazwa oczyszczonego szeregu to DRPP).

W tabeli 1 zawarto wyniki testu stacjonarności EG. Zgodnie z procedurą testu EG, w przypadku odrzucenia hipotezy o stacjonarności szeregu, kolejno testowana była hipoteza o symetrii odchyleń w szeregu zmiennej. W tym celu wykorzystywany był test Wald'a i następujący zestaw hipotez:

$$H0\colon \rho_1=\rho_2 \tag{9}$$

wobec

$$HA\colon \rho_1\neq\rho_2. \tag{10}$$

Empiryczne wartości statystyki testowej wskazują, że w prawie wszystkie szeregi są niestacjonarne, a jedyny wyjątek stanowi szereg przekształconej zmiennej DRPP.

Tabela 1. Wyniki testu pierwiastka jednostkowego

| Grupa | n | Statystyka F | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR |
| | | Wokół zera | | Wokół trendu | | Wokół średniej | | Zgodny | |
| DRPP | 86 | 2.65** | 1.69** | 3.93* | 3.79* | 0.59** | 0.65** | 2.99** | 4.22 |
| PDP | 138 | 16.73 | 17.66 | 24.22 | 27.72 | 19.90 | 23.95 | 21.44 | 21.89 |
| SWP | 107 | 14.84 | 14.79 | 20.75 | 22.01 | 20.04 | 21.34 | 21.95 | 18.69 |
| MIP | 173 | 29.32 | 28.38 | 29.44 | 14.06 | 28.42 | 13.54 | 29.60 | 32.76 |
| AKP | 132 | 93.99 | 81.46 | 75.90 | 32.16 | 83.61 | 39.30 | 94.80 | 91.12 |
| AKZ | 82 | 26.03 | 20.23 | 24.83 | 24.96 | 23.94 | 24.16 | 26.15 | 23.77 |
| PDU | 70 | 23.41 | 17.53 | 23.76 | 23.48 | 20.00 | 18.76 | 25.16 | 20.07 |
| PDE | 66 | 19.90 | 19.74 | 27.26 | 26.66 | 25.73 | 23.97 | 26.61 | 24.51 |

* - nie ma podstaw do odrzucenia H0 dla $\alpha = 0.05$.
** - nie ma podstaw do odrzucenia $H_0$ dla $\alpha = 0.1$.
*Źródło:* obliczenia własne.

Oszacowane wartości współczynników autoregresji z modeli TAR i MTAR podano w tabeli 2. W prawie wszystkich rozważanych przypadkach, spełnione są dwa warunki konieczne tej klasy modeli, dotyczące wartości parametrów: $\rho_1, \rho_2 < 0$ i $(1+\rho_1)(1+\rho_2) < 1$. Jedynie w trzech przypadkach ocena parametru $\rho_2$ jest mniejsza od (-2), dotyczy to grup funduszy SWP i PDU dla modelu TAR wokół zera oraz także grupy PDU w przypadku zgodnej estymacji TAR.

Tabela 2. Oceny parametrów strukturalnych $\rho_1$ i $\rho_2$

| Grupa | $\rho_1$, $\rho_2$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR |
| | Wokół zera | | Wokół trendu | | Wokół średniej | | Zgodny | |
| DRPP | -0.41*<br>-1.13 | -0.28**<br>-0.69* | -0.35**<br>-0.65 | -0.41**<br>-0.67 | -0.34**<br>-0.31** | -0.20**<br>-0.31** | -0.62*<br>-1.14 | -0.43**<br>-1.12 |
| PDP | -0.34<br>-0.65 | -0.42<br>-0.17 | -0.54<br>-0.47 | -0.55<br>-0.54 | -0.47<br>-0.33 | -0.50<br>-0.40 | -0.66<br>-0.16 | -0.54<br>-0.27 |
| SWP | -0.41<br>-2.6** | -0.46<br>-0.18** | -0.59<br>-0.38* | -0.63<br>-0.25** | -0.57<br>-0.40** | -0.61<br>-0.26** | -0.65<br>-0.2** | -0.55<br>-0.42 |
| MIP | -0.32<br>-0.78 | -0.26<br>-0.41 | -0.42<br>-0.26 | -0.27<br>-0.30 | -0.37<br>-0.35 | -0.26<br>-0.28 | -0.33<br>-0.68 | -0.23<br>-0.47 |
| AKP | -0.45<br>-1.08 | -0.59<br>-0.46 | -0.53<br>-0.44 | -0.52<br>-0.48 | -0.50<br>-0.54 | -0.68<br>-0.47 | -0.46<br>-0.98 | -0.76<br>-0.49 |
| AKZ | -0.43<br>-1.25 | -0.43<br>-0.86 | -0.66<br>-0.86 | -0.59<br>-0.88 | -0.65<br>-0.83 | -0.58<br>-0.86 | -0.40<br>-1.32 | -0.63<br>-0.82 |
| PDU | -0.60<br>-2.74 | -0.66<br>-0.60 | -0.80<br>-0.83 | -0.74<br>-1.11 | -0.71<br>-0.74 | -0.70<br>-0.80 | -0.56<br>-5.78 | -0.72<br>-0.69 |
| PDE | -0.79<br>-1.6** | -0.79<br>-0.1** | -0.98<br>-0.48** | -0.97<br>-0.42** | -0.94<br>-0.36** | -0.91<br>-0.62** | -0.97<br>-0.3** | -0.91<br>-0.31** |

* - nie ma podstaw do odrzucenia H0 dla $\alpha = 0.05$.
** - nie ma podstaw do odrzucenia H0 dla $\alpha = 0.1$.
*Źródło:* obliczenia własne.

Wyniki przeprowadzonego testu Walda, weryfikującego hipotezę o symetrii odchyleń, pokazują, że hipoteza ta odrzucona została tylko w przypadku modelu TAR wokół zera i zgodnej estymacji TAR dla grup funduszy AKP, AKZ i PDU (tabela 3).

Tabela 3. Test Walda – równości parametrów strukturalnych

| Grupa | Statystyka $\chi^2(1)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR | TAR | MTAR |
| | Wokół zera | | Wokół trendu | | Wokół średniej | | Zgodny | |
| DRPP | 3.33* | 1.49** | 1.19** | 0.95** | 0.01** | 0.14** | 2.73* | 5.44 |
| PDP | 1.34** | 2.85* | 0.20** | 0.01** | 0.82** | 0.45** | 15.22 | 3.88* |
| SWP | 1.70** | 1.62** | 0.69** | 2.74** | 0.43** | 2.36** | 6.15 | 0.32** |
| MIP | 4.02* | 2.59** | 1.92** | 0.10** | 0.02** | 0.04** | 2.89* | 6.15 |
| AKP | 12.56 | 1.37** | 0.66** | 0.09** | 0.12** | 2.09** | 10.46 | 3.79* |
| AKZ | 12.46 | 4.40* | 0.85** | 1.69** | 0.70** | 1.57** | 14.87 | 0.70** |
| PDU | 7.78 | 0.05** | 0.01** | 1.41** | 0.01** | 0.10** | 13.68 | 0.02** |
| PDE | 0.25** | 0.05** | 1.56** | 1.02** | 1.95** | 0.31** | 3.11* | 1.34** |

* - nie ma podstaw do odrzucenia H0 dla $\alpha = 0.05$.
** - nie ma podstaw do odrzucenia H0 dla $\alpha = 0.1$.
*Źródło:* obliczenia własne.

W tabeli 4 podano wartości poszczególnych progów, które wykorzystane zostały w szacowanych modelach oraz wartości progów otrzymane za pomocą estymacji zgodnej. Dla wszystkich grup funduszy średnia jest bliska wartości zero, z czego wynika, że można byłoby zastosować tylko albo estymację wokół zera albo wokół średniej. Wartości progowe w przypadku modeli wokół trendu, to bliska zeru wartość współczynnika kierunkowego oraz różniące się znacznie między grupami wartości wyrazów wolnych, co wynika ze specyfiki struktury portfela inwestycyjnego poszczególnych grup funduszy. Wartości progowe otrzymane w wyniku estymacji zgodnej są dodatnie, z wyjątkiem grup PDU i PDE.

Tabela 4. Średnia. parametry modelu trendu oraz wartości progowe z estymacji zgodnej

| | | Model trendu | | Estymacja zgodna | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Średnia | Wyraz wolny | Współczynnik kierunkowy | TAR | MTAR |
| DRPP | -0.004 | 0.160 | -0.002 | 0.028 | 0.043 |
| PDP | -0.002 | 0.159 | -0.001 | 0.139 | 0.051 |
| SWP | -0.0007 | 0.118 | -0.0006 | 0.124 | 0.050 |
| MIP | -0.007 | 0.169 | -0.001 | 0.015 | 0.041 |
| AKP | -0.014 | 0.146 | -0.0012 | 0.011 | 0.046 |
| AKZ | 0.0004 | 0.031 | 0.0006 | -0.008 | 0.046 |
| PDU | -0.009 | 0.258 | -0.0047 | -0.038 | 0.076 |
| PDE | 0.009 | 0.174 | -0.026 | 0.107 | 0.058 |

*Źródło:* obliczenia własne.

## 5. Podsumowanie

W oparciu o wyniki przeprowadzonej analizy można stwierdzić. że zarówno model TAR oraz MTAR mogą być wykorzystane w procesie modelowania nieliniowych szeregów czasowych stóp zwrotu funduszy inwestycyjnych. Wyniki przeprowadzonej analizy pokazały również. iż odchylenia w analizowanych szeregach są symetryczne, co dodatkowo uzasadnia zastosowanie klasy modeli TAR do opisu dynamiki stóp zwrotu funduszy. Dla wszystkich grup funduszy średnia jest bliska wartości zero, z czego wynika że można byłoby zastosować tylko albo estymację wokół zera albo wokół średniej.

## Literatura

Cook, S., N. Manning, (2003), The Power of the Asymmetric Unit Root Tests Under Threshold and Consistent Threshold Estimation, *Applied Economics*, vol. 35, 1543–1550.

Chan, K. S. (1990), Testing for Threshold Autoregression, *The Annals of Statistics*, vol. 18,1886–1894.

Chan, K. S. (1993), Consistency and Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model, *The Annals of Statistics*, vol. 21, 520–533.

Enders, W., Granger, C.W. (1998), Unit-root Tests and Asymmetric Adjustment with an Example Using the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 16, no. 3, 304-311.

Enders, W. (2001), Improved Critical Values for the Enders – Granger Unit-root Test, *Applied Economic Letters*, vol. 8, 257–261.

Hansen, B.E. (1997), Inference in TAR Models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, vol. 2, no. 1, 1–14.

Osińska, M. (2006), *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.