

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Justyna Wróblewska
Akademia Ekonomiczna w Krakowie

Bayesowska analiza kointegracji na przykładzie sprzężenia płacowo–cenowego w gospodarce polskiej

1. Wstęp

Istotnym utrudnieniem w estymacji modelu z mechanizmem korekty błędu jest powszechnie znany brak identyfikowalności, co oznacza że dla dowolnej nieosobliwej macierzy C zachodzi $\Pi = \alpha\beta' = \alpha CC^{-1}\beta'$. Innymi słowy w danych zawarta jest informacja jedynie o przestrzeni kointegracyjnej, a nie o wektorach ją rozpinających. Najłatwiejszym i najpowszechniej stosowanym w bayesowskiej analizie kointegracji sposobem na pokonanie tego problemu jest wprowadzenie liniowych (zero-jedynkowych) restrykcji identyfikujących, $\beta' = (\mathbf{I}_r \ \mathbf{B}')$ (Kleibergen, Paap, 2002, Villani, 2005). Wprowadzania restrykcji nieliniowych podobnych do wynikających z procedury Johansena proponuje Strachan (2003). Sposób ten pozwala na uniknięcie wad restrykcji liniowych, jednak nie jest do końca zgodny z duchem wnioskowania bayesowskiego, ponieważ do wprowadzenia tychże restrykcji wykorzystuje się dane, przez co wpływają one na postać rozkładów *a priori*.

Celem pracy jest omówienie oraz zilustrowanie metody wnioskowania przedstawionej w pracach Strachana, Indera (2004) oraz Koopa, León-González, Strachana (2006), w której podstawową wielkością estymowaną jest kierunek przestrzeni kointegrującej.

Dla zilustrowania omawianej metody zostanie rozważony model płacowo-cenowy dla gospodarki polskiej w latach 1993–2002.

2. Rozkłady *a priori* i *a posteriori*

Rozważmy n -wymiarowy szereg zmiennych zintegrowanych rzędu jeden $\{y_t\}_{t=1, \dots, T}$ oraz model VECM:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \Gamma_0 \mathbf{Z}_t + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\xi}_t, t = -p+1, -p+2, \dots, 0, 1, \dots, T \quad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{\xi}_t \sim iiN_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Dla uproszczenia notacji zapiszmy rozważany model w postaci macierzowej:

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{-1} \boldsymbol{\Pi}' + \mathbf{X} \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y} &= (\Delta \mathbf{y}_{p+1}, \Delta \mathbf{y}_{p+2}, \dots, \Delta \mathbf{y}_T)', \quad \mathbf{Y}_{-1} = (\mathbf{y}_p, \mathbf{y}_{p+1}, \dots, \mathbf{y}_{T-1})', \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \boldsymbol{\xi}_{p+2}, \dots, \boldsymbol{\xi}_T)', \\ \boldsymbol{\Gamma} &= (\boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1})', \quad \mathbf{X} = (\mathbf{x}'_{p+1}, \mathbf{x}'_{p+2}, \dots, \mathbf{x}'_T)' = (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}), \\ \mathbf{x}_t &= (\mathbf{Z}_t, \Delta \mathbf{y}'_{t-1}, \Delta \mathbf{y}'_{t-2}, \dots, \Delta \mathbf{y}'_{t-p+1}). \end{aligned}$$

Przestrzeń kointegracyjna jest r -wymiarową hiperpłaszczyzną zanurzoną w m -wymiarowej przestrzeni, czyli jest elementem rozmaitości Grassmanna ($G_{r,m-r}$). Zakładamy, że macierz $\boldsymbol{\beta}$ spełnia warunek $\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} = \mathbf{I}_r$, tym samym ograniczamy rozważania do rozmaitości Stiefela ($V_{r,m}$).

Rozważmy dwie parametryzacje macierzy $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\kappa}^{-1}) (\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\kappa})' = \left[\boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha})^{-\frac{1}{2}} \right] \left[\boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}} \right]' \equiv \mathbf{A} \mathbf{B}' = \boldsymbol{\Pi} \quad (3)$$

W pierwszej parametryzacji ($\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$), $\boldsymbol{\beta}$ jest elementem rozmaitości Stiefel, natomiast $\boldsymbol{\alpha}$ jest nieograniczone, w drugiej ($\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{A} \mathbf{B}'$) – \mathbf{B} jest nieograniczone, \mathbf{A} należy do rozmaitości Stiefela. Macierz $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha}$ jest symetryczna i dodatnio określona, tak więc jej pierwiastek kwadratowy jest jednoznacznie określony.

Dla \mathbf{B} i $\boldsymbol{\alpha}$ przyjmujemy rozkłady macierzowe normalne (Koop, León-González, Strachan, 2006):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} | \tau, \nu &\sim mN_{m \times r}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r, \nu \mathbf{P}_\tau) \\ \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta}, \tau, \nu &\sim mN_{n \times r} \left(\mathbf{0}, \nu \left(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{P}_\tau \boldsymbol{\beta} \right)^{-1}, \mathbf{I}_n \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Parametr ν określa stopień rozproszenia rozkładów. Macierz \mathbf{P}_τ jest „macierzą ważoną”: $\mathbf{P}_\tau = \mathbf{H} \mathbf{H}' + \tau \mathbf{H}_\perp \mathbf{H}_\perp'$, \mathbf{H} jest konstruowana przez badacza. Swoją wiedzę na temat elementów $\boldsymbol{\beta}$ badacz ujmuje w macierzy \mathbf{H}_g , którą następnie przekształca w $\mathbf{H} = \mathbf{H}_g \left(\mathbf{H}_g' \mathbf{H}_g \right)^{-\frac{1}{2}}$ będącą elementem rozmaitości Stiefela.

Macierze \mathbf{H} i \mathbf{H}_g rozpinają tę samą przestrzeń ($sp(\mathbf{H}) = sp(\mathbf{H}_g)$). Parametry τ i ν mogą być określane przez badacza lub estymowane.

Przedstawmy macierz \mathbf{B} jako iloczyn jej kierunku i normy (ang. *polar decomposition*) $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{\frac{1}{2}}$ (rozkład ten jest jednoznaczny, Cadet, 1990, Muirhead, 1982, 2005), co umożliwi przejście do klasy rozkładów określonych na rozmaitości Stiefela - *Matrix angular central Gaussian distribution* (MACG). Klasa ta została zdefiniowana przez Y. Chikuse w 1990r.

Jeżeli $\mathbf{Z}_{(m \times k)} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_z \boldsymbol{\Gamma}_z^{\frac{1}{2}}$ oraz $\mathbf{Z} \sim MN(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k, \boldsymbol{\Sigma}_{(m \times m)})$ wówczas

$f_{\mathbf{H}_z}(\mathbf{H}_z) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{k}{2}} \left| \mathbf{H}_z' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{H}_z \right|^{\frac{m}{2}}$ - MACG($\boldsymbol{\Sigma}$). Dla $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ rozkład jest jednostajny.

$$\boldsymbol{\beta} | \nu, \tau \sim MACG(\nu \mathbf{P}_\tau) \quad (5)$$

Dla $\tau=0$ rozkład jest skupiony wokół kierunku wyznaczonego przez \mathbf{H} , dla $\tau=\pm\infty$ przez \mathbf{H}_\perp . Dla $\tau=1$ $\mathbf{P}_\tau = \mathbf{I}_m$, co oznacza, że rozkład jest jednostajny (MACG(\mathbf{I}_m)).

Dla pozostałych parametrów modelu przyjmijmy następujące rozkłady:

– odwrotny Wishart dla $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} \sim iW(\mathbf{A}, q)$$

$$p(\boldsymbol{\Sigma}) = c^{-1} |\mathbf{A}|^{q/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(n+q+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A})\right) \quad (6)$$

$$q \geq n, \mathbf{A} - n \times n \text{ PDS}, c = 2^{qn/2} \pi^{n(n-1)/4} \Gamma_n(q)$$

$$E(\boldsymbol{\Sigma}) = (q - n - 1)^{-1} \mathbf{A}$$

– macierzowy normalny dla $\boldsymbol{\Gamma}_i$ ($i=0, \dots, p-1$):

$$\boldsymbol{\Gamma}_i | \boldsymbol{\Sigma} \sim mN_{n \times d_i}(\mathbf{A}_i, h_i \mathbf{I}_n, \boldsymbol{\Sigma}), i = 0, 1, \dots, p-1$$

$$p(\boldsymbol{\Gamma}_i | \boldsymbol{\Sigma}) = c_i^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-d_i/2} |h_i \mathbf{I}_{d_i}|^{-n/2} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}\left((h_i \mathbf{I}_{d_i})^{-1} (\boldsymbol{\Gamma}_i - \mathbf{A}_i)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\Gamma}_i - \mathbf{A}_i)\right)\right) \quad (7)$$

$$h_i > 0, c_i = (2\pi)^{nd_i/2}, E(\boldsymbol{\Gamma}_i) = \mathbf{A}_i, \text{cov}(\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}_i | \boldsymbol{\Sigma})) = (h_i \mathbf{I}_{d_i}) \otimes \boldsymbol{\Sigma}$$

Im mniejszy parametr h_i tym mniejsze rozproszenia rozkładu.

Jeżeli parametry τ i ν mają być estymowane sugeruje się przyjęcie dla nich rozkładu odwrotnego gamma typu 2 $\tau \sim IG_2(s_\tau, n_\tau)$, $\nu \sim IG_2(s_\nu, n_\nu)$. Dla τ należy przyjąć takie parametry *a priori* aby cała masa prawdopodobieństwa była skupiona w przedziale od 0 do 1 (Koop, León-González, Strachan, 2006). Dla przyjętych rozkładów *a priori* otrzymujemy następujące warunkowe rozkłady *a posteriori*:

– normalny dla $\text{vec}(\boldsymbol{\alpha})$ i $\text{vec}(\boldsymbol{\beta})$:

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\boldsymbol{\alpha}) | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu, \tau, \mathbf{Y} &\sim N(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{\alpha}}), \\
\text{vec}(\mathbf{B}) | \mathbf{A}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu, \tau, \mathbf{Y} &\sim N(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{B}}), \\
\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{\alpha}} &= \left(\left(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{-1}' \mathbf{Y}_{-1} \boldsymbol{\beta} \right) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{\nu} \left(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{P}_{\tau}^{-1} \boldsymbol{\beta} \right) \otimes \mathbf{I}_n \right)^{-1}, \\
\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{B}} &= \left(\left(\mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \right) \otimes \left(\mathbf{Y}_{-1}' \mathbf{Y}_{-1} \right) + \mathbf{I}_r \otimes \frac{1}{\nu} \mathbf{P}_{\tau}^{-1} \right)^{-1}, \\
\bar{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\left(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{-1}' \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right) \text{vec} \left((\Delta \mathbf{Y})' \right) \right), \quad \bar{\mathbf{B}} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{B}} \text{vec} \left(\mathbf{Y}_{-1}' \Delta \mathbf{Y} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

– odwrotny Wisharta dla $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma} | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}, \mathbf{Y} \sim \\
&\sim iW_n \left(\mathbf{E}' \mathbf{E} + \mathbf{A} + \nu \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}' + \sum_{i=0}^{p-1} \left(\boldsymbol{\Gamma}_i - \mathbf{A}_i \right) \left(h_i \mathbf{I}_{d_i} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Gamma}_i - \mathbf{A}_i \right)', T + q + d \right) \tag{9} \\
&\mathbf{E} = \Delta \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{-1} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}' - \mathbf{X} \boldsymbol{\Gamma}
\end{aligned}$$

– macierzowy normalny dla $\boldsymbol{\Gamma}_i$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}_i | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \overset{\vee}{\boldsymbol{\Gamma}}_i, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}, r \sim \\
&\sim mN_{d_i \times n} \left(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\Gamma}_i}, \left(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i + \left(h_i \mathbf{I}_{d_i} \right)^{-1} \right)^{-1}, \boldsymbol{\Sigma} \right) \tag{10} \\
&\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\Gamma}_i} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\left(\Delta \mathbf{Y}' - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{-1}' - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{X}_j' \right) \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_i \left(h_i \mathbf{I}_{d_i} \right)^{-1} \right)
\end{aligned}$$

– odwrotne gamma typu dwa dla τ i ν :

$$\begin{aligned}
&\tau | \nu, \mathbf{B}, r \sim IG_2 \left(\text{tr} \left(\nu^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{H}_{\perp} \mathbf{H}_{\perp}' \mathbf{B} \right) + s_{\tau}, (n-r)r + n_{\tau} \right) \\
&\nu | \tau, \mathbf{B}, r \sim IG_2 \left(\text{tr} \left(\mathbf{B}' \mathbf{P}_{\frac{1}{\tau}} \mathbf{B} \right) + s_{\nu}, nr + n_{\nu} \right) \tag{11}
\end{aligned}$$

Losowanie przebiega z wykorzystaniem schematu Gibbsa i przełączaniem między parametryzacjami $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ oraz \mathbf{A} , \mathbf{B} : i -tym krok rozpoczynamy od wylosowania $\boldsymbol{\alpha}^{(*)}$ z warunkowego rozkładu *a posteriori* dla $\boldsymbol{\alpha}$ i obliczenia $\mathbf{A}^{(*)} = \boldsymbol{\alpha}^{(*)} (\boldsymbol{\alpha}^{(*)})' \boldsymbol{\alpha}^{(*)}^{-1/2}$. Następnie losujemy $\mathbf{B}^{(i)}$ z rozkładu $p(\mathbf{B} | \mathbf{A}^{(*)}, \mathbf{Y})$ i obliczamy $\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} (\mathbf{B}^{(i)})' \mathbf{B}^{(i)}^{-1/2}$ oraz $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \mathbf{A}^{(*)} (\mathbf{B}^{(i)})' \mathbf{B}^{(i)}^{1/2}$.

3. Estymacja punktowa

Jak już wspomniano przestrzeń kointegracyjna jest elementem rozmaitości Grassmanna, tak więc do jej estymacji użyjemy metody Villaniego (2006) wykorzystującej miarę Frobeniusa.

Szukamy wektora $\hat{\beta} \in G_{r,n-r}$, będącego miarą tendencji centralnej rozkładu *a posteriori* dla β :

$$\hat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{\tilde{\beta} \in G_{r,n-r}} E[l(\beta, \tilde{\beta})] \quad (12)$$

$E(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną, a $l(\beta, \tilde{\beta})$ jest funkcją określoną na $G_{r,n-r} \times G_{r,n-r}$.

$$l(\beta, \tilde{\beta}) = \left\| \beta(\beta'\beta)^{-1}\beta' - \tilde{\beta}(\tilde{\beta}'\tilde{\beta})^{-1}\tilde{\beta}' \right\|^2, \text{ gdzie } \|A\| = \text{tr}(A'A)^{1/2} \quad (13)$$

Punktowym estymatorem przestrzeni kointegracyjnej (ang. *the posterior mean cointegration space (PMCS) estimator*) jest:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r), \quad (14)$$

gdzie \mathbf{v}_i jest wektorem własnym $E[\beta(\beta'\beta)^{-1}\beta']$ odpowiadającym i -tej wartości własnej dla wartości ustawionych w malejącym porządku (Villani, 2006).

Do estymacji $E[\beta(\beta'\beta)^{-1}\beta']$ wykorzystamy wzór:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta^{(i)} \left(\beta^{(i)'} \beta^{(i)} \right)^{-1} \beta^{(i)'} \xrightarrow{a.s.} E[\beta(\beta'\beta)^{-1}\beta'], \quad (15)$$

gdzie N oznacza liczbę losowań z rozkładu *a posteriori*, $\beta^{(i)}$ - macierz wylosowaną w i -tym losowaniu.

λ_i - wartość własna $E[\beta(\beta'\beta)^{-1}\beta']$ mierzy rozproszenie przestrzeni rozpiętej przez β w kierunku wyznaczonym przez odpowiadający jej wektor własny \mathbf{v}_i , co zostanie wykorzystane do zdefiniowania rozproszenia rozkładu *a posteriori* (ang. *the projective Frobenius span variation*):

$$\tau_{sp\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E[l(\beta, \hat{\beta})]}{r(n-r)/n} \in (0,1) \quad (16)$$

oraz jej obliczenia (Villani, 2006):

$$\tau_{sp\beta} = \frac{r - \sum_{i=1}^r \lambda_i}{r(n-r)/n} \quad (17)$$

4. Ilustracja empiryczna

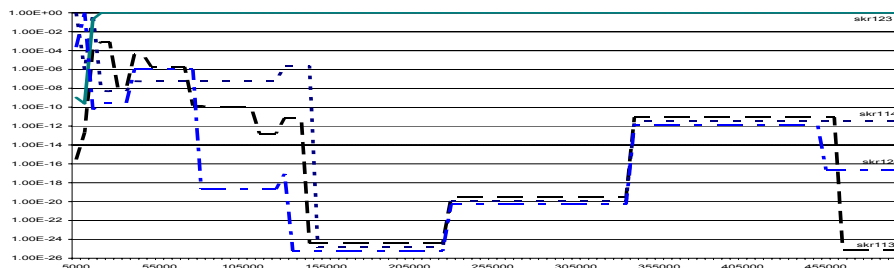
Zaprezentowana metoda zostanie wykorzystana do analizy sprzężenia inflacyjnego w gospodarce polskiej w latach 1993–2002.

Rozważmy szereg zawierający 5 zmiennych: płace (W), indeks cen konsumpcyjnych (P), indeks cen importu (M), wydajność pracy (Z), stopę bezrobocia (U).

Model został wybrany, z wykorzystaniem metody Newtona-Rafterego (Kass, Raftery, 1995), spośród 24 modeli, dla których założono równe prawdopodobieństwa *a priori*. Rozważono model z jednym lub dwoma opóźnieniami, z rzędem kointegracji od 1 do 4, bez stałej, ze stałą ograniczoną do relacji kointegracyjnej i ze stałą nieograniczoną.

W rozkładzie odwrotnym Wisharta jako parametr \mathbf{A} przyjęto estymowaną wartość Σ w modelu bez stałej, z jednym opóźnieniem i macierzą Π pełnego rzędu. Do ustalenia parametru rozkładu *a priori* wykorzystano analizowane dane, co nie jest zgodne z zasadami wnioskowania bayesowskiego, dlatego też przyjęto małą liczbę stopni swobody w rozważanym rozkładzie, $q=n+2$. Rozkłady *a priori* dla Γ_0 oraz Γ_1 scentrowano w zerze, za parametr kontrolujący stopień rozproszenia przyjęto $h_i=10^{-i}$, $i \in \{0,1\}$. Dla parametru τ przyjęto wartość jeden, tym samym uzyskując nieinformacyjny rozkład *a priori* dla β , natomiast dla v przyjęto rozkład $IG_2(6,4)$.

Rysunek 1 prezentuje największe prawdopodobieństwa *a posteriori* jako funkcję liczby losowań, $s=1$ oznacza model bez stałej, $s=2$ model ze stałą nieograniczoną, $s=3$ model ze stałą ograniczoną do relacji kointegracyjnej, p wyznacza liczbę opóźnień, r ilość liniowo niezależnych relacji kointegracyjnych. Patrząc na prawdopodobieństwa *a posteriori* najlepszy jest model bez stałej, z dwoma opóźnieniami i trzema relacjami kointegracyjnymi.



Rys. 1. Zależność największych prawdopodobieństw *a posteriori* od liczby losowań
Źródło: opracowanie własne.

Poniżej zaprezentowano wartości oczekiwane *a posteriori* elementów macierzy α , \mathbf{B} , Π oraz punktową ocenę macierzy \mathbf{A} i β będących elementami rozkładu Stiefela. Oszacowane rozproszenie dla \mathbf{A} wynosi 0,1749, co wska-

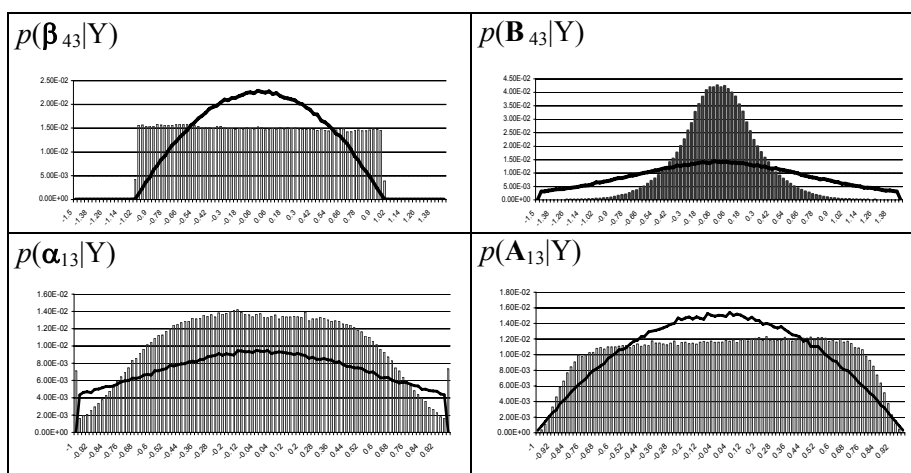
zuje na dość informacyjny rozkład *a posteriori*, natomiast oszacowane rozproszenie rozkładu *a posteriori* wynosi 0,0021.

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} -0.0034 & -0.0019 & 0.0006 \\ -0.0005 & 0.0006 & -0.0005 \\ 0.0014 & 0.0018 & -0.0009 \\ 0.0004 & -0.0025 & 0.0017 \\ 0.0005 & -0.0039 & 0.0055 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} -0.5947 & -0.3328 & -0.2749 \\ 0.6231 & -0.4414 & -0.6420 \\ 0.5003 & 0.2920 & 0.3639 \\ -0.0682 & 0.7805 & -0.6163 \\ -0.0087 & 0.0054 & -0.0098 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.8518 & 0.2108 & -0.1456 \\ 0.2062 & -0.1536 & -0.6473 \\ -0.3404 & -0.3748 & -0.5925 \\ 0.2520 & -0.3479 & -0.1654 \\ 0.2293 & -0.8189 & 0.4254 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.0066 & 0.0011 & -0.0144 \\ -0.0112 & -0.0035 & 0.0129 \\ -0.0073 & -0.0010 & 0.0122 \\ 0.0042 & 0.0035 & -0.0003 \\ 0.0002 & 0.0001 & -0.0002 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} -0.5072 & 0.4346 & 0.4290 & 0.0163 & -0.0063 \\ 0.0278 & -0.0731 & -0.0223 & 0.0447 & 0.0009 \\ 0.3804 & -0.3630 & -0.3199 & 0.0101 & 0.0050 \\ -0.0525 & 0.1186 & 0.0479 & -0.1362 & -0.0023 \\ -0.0549 & 0.2904 & 0.0541 & -0.3957 & -0.0058 \end{bmatrix} -$$

Rysunek 2 prezentuje przykładowe histogramy rozkładów *a priori* (linia ciągła) oraz *a posteriori* (obszar) parametrów modelu. W histogramach parametrów B_{43} , α_{13} , Π_{14} ucięto ogony rozkładów *a priori*.



Rys. 2. Histogramy brzegowych rozkładów *a priori* (linia ciągła) oraz *a posteriori* (obszar) wybranych parametrów modelu

Źródło: opracowanie własne.

Kształt histogramów rozkładów *a priori* (rozproszone) i *a posteriori* dla elementów macierzy \mathbf{A} oraz $\boldsymbol{\beta}$ wskazuje, iż przyjęcie średniej arytmetycznej dla podsumowania tych rozkładów nie byłoby właściwe. Należy zastosować miary określone na rozmaitości Stiefela, na przykład metodę estymacji punktowej zaproponowaną przez Villaniego (2006).

4. Podsumowanie

Do głównych zalet prezentowanej metody należy łatwość wprowadzania informacji *a priori* oraz wykorzystanie procedury Gibbsa do uzyskania próby z rozkładu *a posteriori*.

Trudności w interpretacji części wyników otrzymanych w analizie sprzężenia płacowo – cenowego w gospodarce polskiej mogą być spowodowane użyciem szeregu danych o wysokiej częstotliwości. Wykorzystanie informacyjnego rozkładu *a priori* skonstruowanego w oparciu o teorię ekonomii oraz wcześniejsze badania może pomóc w pokonaniu zasygnalizowanego problemu.

Literatura

- Cadet, A. (1996), Polar Coordinates in the R^{np} ; Application to the Computation of the Wishart and Beta Laws, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 58, 101–114.
- Kass, R. E., Raftery, A. E. (1995), Bayes Factors, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773–795.
- Kleibergen, F., Paap, R. (2002), Priors, Posteriors and Bayes Factors for Bayesian Analysis of Cointegration, *Journal of Econometrics*, 111, 223–249.
- Koop G., León-González, R., Strachan, R. W. (2006), Efficient Posterior Simulation for Cointegrated Models with Priors on the Cointegration Space, *Working Paper*, 05/13, University of Leicester, Department of Economics.
- Muirhead, R.J. (1982, 2005), *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, Wiley, New York.
- Strachan, R. W., Inder, B. (2004), Bayesian Analysis of the Error Correction Model, *Journal of Econometrics*, 123, 307–325.
- Strachan, R. W. (2003), Valid Bayesian Estimation of the Cointegrating Error Correction Model, *Journal of Business & Economic Statistics*, 21, 1, 185–195.
- Villani, M. (2005), Bayesian Reference Analysis of Cointegration, *Econometric Theory*, 21, 326–357.
- Villani, M. (2006), Bayesian Point Estimation of Cointegration Space, *Journal of Econometrics*, 127, 645–664.