DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Mirosław Wójciak
Akademia Ekonomiczna w Katowicach
Aleksandra Wójcicka
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

Porównanie modyfikacji Byströma modelu opcyjnego oceny ryzyka kredytowego z modelem MKMV

1. Uwagi wstępne

Zasadniczym problemem większości modeli oceny ryzyka kredytowego jest poprawne oszacowanie prawdopodobieństwa niedotrzymania warunków umowy (*probability of default – PD*). W przypadku niektórych modeli otrzymuje się je w wyniku estymacji np.: model firmy Moody's KMV (MKMV), w innych określa się je na podstawie danych historycznych, a w przypadku niektórych nie jest możliwe jego wyznaczenie (analiza dyskryminacyjna).

Modele oceny ryzyka kredytowego do szacowania poziomu ryzyka wykorzystują często dane pochodzące z rynku (ceny akcji), jak i z publikowanych sprawozdań finansowych spółek giełdowych. W modelach oceny ryzyka kredytowego konieczna jest często estymacja wielu parametrów takich, jak: rynkowa wartość aktywów i jej zmienność czy też oczekiwana stopa zwrotu z aktywów podmiotu gospodarczego. Często metody ich estymacji nie są ujednolicone, co powoduje znaczące zmiany w poziomie szacowanego ryzyka kredytowego badanych spółek.

2. Model MKMV i jego modyfikacja

Zarówno Merton (1974) jak i Black-Scholes (1973) zaproponowali model, który ukazuje sposób powiązania ryzyka kredytowego ze strukturą kapitału firmy. W modelu tym wartość aktywów przedsiębiorstwa ma rozkład logarytmiczno-normalny[1]. Podmiot finansowany jest z kapitału własnego, który nie generuje żadnych dywidend i poprzez zero-kuponową obligację *D*, o momencie zapadalności *T*. Poprzez określenie rynkowej wartości firmy, zmienności wartości firmy oraz struktury jej zobowiązań na podstawie tego modelu firma jest uznawana za niewypłacalną jeśli wartość jej aktywów (*V*) w momencie *T* jest niższa od wartość długu (*D*)[2]. W związku z tym, gdy bank udziela pożyczki, jego przychód jest równoważny przychodowi wystawcy opcji sprzedaży na aktywa firmy zaciągającej pożyczkę. W pierwotnym modelu Mertona wypłata w momencie *T* przedstawiona jest wzorem[3]:

$$E_T = max[V_T - D,0], \tag{1}$$

gdzie:
E_T – wartość kapitału własnego w momencie *T*,
V_T – wartość aktywów przedsiębiorstwa w momencie *T*,
D – wartość księgowa zadłużenia.
Wartość kapitału w momencie początkowym wyrażona jest za pomocą (2):

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2), \tag{2}$$

gdzie:
E_0 – wartość kapitału przedsiębiorstwa w momencie udzielania pożyczki,
V_0 – wartość aktywów przedsiębiorstwa w momencie udzielania pożyczki,
$N(d_i)$ – wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla argumentu równego d_i, gdzie i=1, 2

$$d_1 = \frac{ln\left(V_0 e^{rT}/D\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + 0,5\sigma_V \sqrt{T}; \qquad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T},$$

σ_V – zmienność aktywów firmy,
r – stopa oprocentowania kredytu wolna od ryzyka[4].

Wynika z tego, że zmienność kapitału i aktywów firmy powiązane są ze sobą w następującym równaniem:

$$\sigma_E = \frac{V_0}{E_0} N\left(d_1\right)\sigma_V. \tag{3}$$

Prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka (risk-neutral probability – P_{RN}) to *PD* przy założeniu, że stopa zwrotu z aktywów jest równa stopie wolnej od ryzyka. Prawdopodobieństwo to zależy tylko od dźwigni kapitałowej,

---

[1] Hull, Nelken, White (2003).
[2] Wartość kapitału własnego mniejsza od zera.
[3] Hull, Nelken, White (2003), s. 5-6.
[4] Jedno z założeń modelu mówi, iż zmienność wartości aktywów przedsiębiorstwa (σ_A) oraz stopa oprocentowania kredytu wolna od ryzyka (r) są wielkościami stałymi.

zmienności aktywów firmy i czasu pozostałego do spłaty długu (T).Możemy je wyrazić następująco:

$$P_{RN} = N(-d_2). \tag{4}$$

Prawdopodobieństwo niewypłacalności w modelu KMV szacowane jest na podstawie wzoru (5), w którym zakłada się, że zmienna losowa zwrotu z aktywów firmy przyjmuje rozkład normalny w rezultacie czego można przedstawić *PD* jako dystrybuantę rozkładu normalnego[5]:

$$PD = N\left[-\frac{ln\frac{V_0}{V_{def}} + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t}{\sigma_V \sqrt{t}}\right], \tag{5}$$

gdzie: μ – oczekiwana stopa zwrotu z aktywów przedsiębiorstwa.

We wzorze (5) pojawia oczekiwana stopa zwrotu z aktywów, którą należy oszacować (metody estymacji są przedstawione w kolejnym rozdziale). Poprawna jej estymacja jest niezwykle ważna, gdyż oszacowane *PD* są szczególnie wrażliwe na jej wartości (porównaj rys. 1 i 2 - rozdział 4).

W pracy H. Byström zaproponował modyfikację wyjściowego modelu Mertona, polegającą na uproszczeniu metody określania oryginalnego prawdopodobieństwa niewypłacalności. Uproszczenia te wymagają następujących założeń, które dotyczą tylko zmiennych bezpośrednio obserwowalnych[6]:

- zakłada się, że dryf (*drift term*) $(r - 0{,}5\sigma^2{}_V)(T - t)$ jest niezwykle „małą wartością" w porównaniu z $ln(V_0/V_{def})$,
- $N(d_1)$ jest „bliskie" jedności[7],
- do wyznaczenia dźwigni kapitałowej wykorzystywana jest wartość księgowa długu (*book value*) $D/V_0 = D/(E+D)$,
- czas spłaty kredytu T wynosi 1 rok[8].

Przyjmując powyższe założenia można wzór na *PD* w modelu zmodyfikowanym przedstawić jako:

$$PD_B = N\left(-\frac{ln(V_0/D)}{\sigma_E\, E/V_0}\right). \tag{6}$$

[5] Crosbie, Bohn (2003).

[6] Uzasadnienie powyższych założeń znajduje się w pracy H. Byströma (2004), s.5.

[7] Założenie to jest prawdziwe w przypadku niskiego ryzyka. Tylko w przypadku, gdy rynkowa wartość aktywów V jest zbliżona do księgowej wartości długu D i zarazem notuje się wysoką zmienność aktywów wartość $N(d_1)$ różni się od jedności.

[8] Model ten utrzymuje założenie badania zdolności kredytowej spółki w okresie 1 roku.

Zgodnie z założeniem do szacowania PD_B w tym podejściu wykorzystujemy tylko zmienne bezpośrednio obserwowalne co jest dużym uproszczeniem w stosunku do oryginalnego modelu Mertona i modelu MKMV.

3. Sposób szacowania oczekiwanej stopy zwrotu z aktywów

Według A. Damodarana oczekiwany zwrot z ryzykownych aktywów jest równy sumie oczekiwanej stopy zwrotu wolnej od ryzyka oraz oczekiwanej premii za ryzyko. Aby obliczyć długoterminową premię za ryzyko kraju należy znać jego rating (w tym wypadku nadany przez agencję Moody's[9]). Następnie na podstawie ratingu szacujemy nadwyżkę ponad stopę zwrotu z obligacji rządowych (*default spread*) w oparciu o krajowe obligacje będące w obiegu. To staje się miarą wartości premii za ryzyko dla tego kraju, którą dodajemy do historycznej premii za ryzyko rynków wysoko rozwiniętych (dojrzałych) oszacowanej na podstawie danych historycznych dla USA i obliczamy całkowitą premię za ryzyko danego kraju. Zwłaszcza w krótkim horyzoncie premia za ryzyko w danym kraju może być wyższa niż różnica pomiędzy kosztem kapitału a stopą wolną od ryzyka.

Tabela 1. Rating, default spread oraz wartość krajowej i całkowitej premii za ryzyko dla Polski

rok	rating	default spread	krajowa premia za ryzyko dla Polski	całkowita premia za ryzyko dla Polski
2000	Baa1	120	1.20%	6.71%
2001	Baa1	120	1.20%	6.71%
2002	A2	125	1.88%	6.39%
2003	A2	90	1.35%	6.17%
2004	A2	90	1.35%	6.19%
2005	A2	80	1.20%	6.00%
2006	A2	80	1.20%	6.11%

Źródło: www.damodaran.com

Można także szacować dopasowaną (skorygowaną) premię za ryzyko danego kraju poprzez przemnożenie krajowej premii za ryzyko i odpowiadającej mu zmienność kapitału własnego tego rynku (rozumianą jako odchylenie standardowe kapitału własnego w danym kraju / odchylenie standardowe obligacji krajowych). Damodaran używa wagę ok. 1.5 dla rynków rozwijających się (kapitał własny na tych rynkach jest ok. 1.5 razy bardziej zmienny niż obligacje) aby obliczyć premię za ryzyko danego kraju. Historyczna premia za ryzyko w USA wynosi ok. 4.91%. Rating dla Polski w latach 2000-2006 wystawiony przez agencję Moody's, wartości default spread oraz wartość premii za ryzyko przedstawia tabela 1.

[9] Dane dotyczące ratingu danego kraju pochodzą ze strony www.moodys.com.

4. Wyniki badań eksperymentalnych

W celu porównania metod estymacji prawdopodobieństwa niewypłacalności zbadano wrażliwość tych metod na zmianę podstawowych zmiennych wpływających na wysokość ryzyka kredytowego. W tym celu założono cztery grupy zmian parametrów po trzy warianty w każdej grupie. Dla wszystkich obliczeń założono, że stopa wolna od ryzyka wynosi 5%, a okres kredytowania jeden rok.

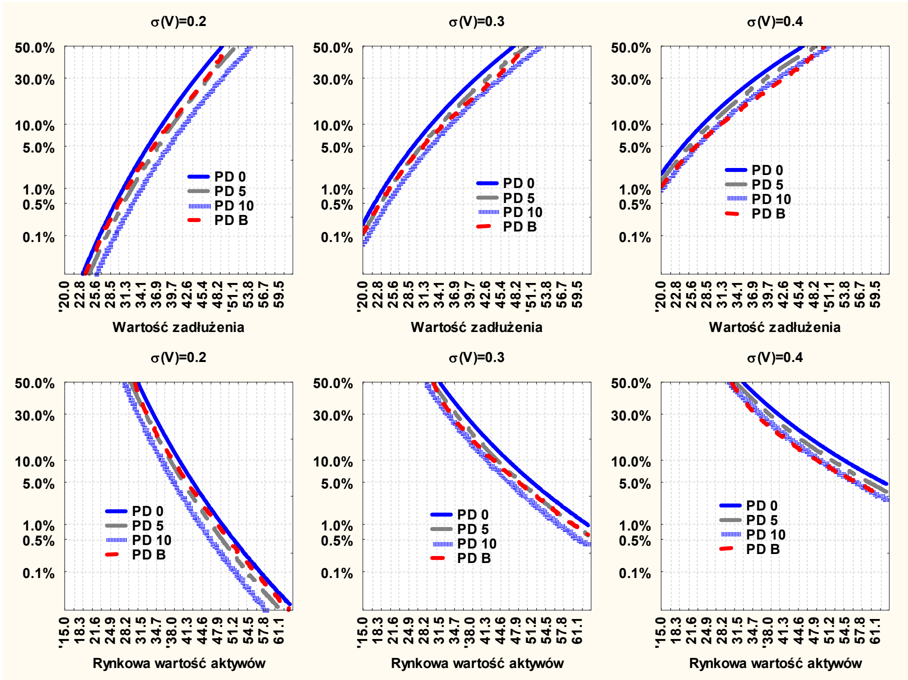
W pierwszej grupie założono, że wartość rynkowa aktywów (V) jest stała i wynosi 50 mln zł, rynkowa wartość kapitału własnego (E) jest stała i wynosi 20 mln zł, zmienność rynkowej wartości aktywów (σ_V) jest stała i w poszczególnych wariantach wynosi 0.2; 0.3 i 0.4, rynkowa wartość kapitału akcyjnego (własnego) jest wyliczana ze wzoru (3), natomiast zmienna jest wartość długu. Przyjęto, że minimalna wartość nominalna długu (D) wynosi 20 mln zł, a maksymalna 60 mln zł. W drugiej grupie przyjęto natomiast, że wartość długu jest stała, a zmienna jest wartość rynkowa aktywów w przedziale od 15 mln zł do 64 mln zł. Pozostałe parametry (jak i warianty zmienności aktywów) są identyczne jak w pierwszej grupie eksperymentu.

W trzeciej grupie założono, że zmienia się rynkowa wartość aktywów (od 5% do 60%), a pozostałe wartości zmiennych są stałe i wynoszą: V= 40 mln zł w pierwszym wariancie, V= 45 mln zł w drugim wariancie i V= 50 mln zł w trzecim wariancie; E=20 mln zł; D=30 mln zł, a zmienność rynkowej wartości kapitału własnego (σ_E) 60%.

W ostatniej grupie (najbliższej rzeczywistym zastosowaniom modeli) założono, że wartość kredytu wynosi 30 mln zł. Założono także, że wartość kapitału własnego stale się zmniejsza, przy stałej, założonej zmienności kapitału własnego, co powoduje wzrost wartości dźwigni kapitałowej[10] wyrażonej wzorem $L = \left(De^{-rt}\right)/V_0$, a więc i wzrost ryzyka kredytowego oraz wymaganej marży na jego pokrycie. Symulację przeprowadzono dla trzech poziomów zmienności rynkowej wartości kapitału własnego: σ_E=0.6; σ_E=0.8; σ_E=1.0.

Pierwsze trzy wykresy przedstawiają wartości prawdopodobieństw niewypłacalności przy założonych poziomach zmienności aktywów – odpowiednio 0.2, 0.3 i 0.4. Można zaobserwować, że wraz ze wzrostem zadłużenia przy ustalonej wartości σ_V zmniejsza się rozpiętość pomiędzy wartościami PD przy założonych określonych wartościach zwrotu z aktywów (parametr μ - założone wartości wzrostu wartości aktywów to 0% (PD_0), 5% (PD_5) i 10% (PD_{10}). Można zaobserwować, że wraz ze wzrostem σ_V przy niskim poziomie wartości zadłużenia ryzyko niewypłacalności jest wyższe – dla poziomu zadłużenia 20 oraz μ=5% poziom PD dla poszczególnych wartości σ_V wynosi odpowiednio 0.03%, 0.10% oraz 1.33% (porównaj rys.1).

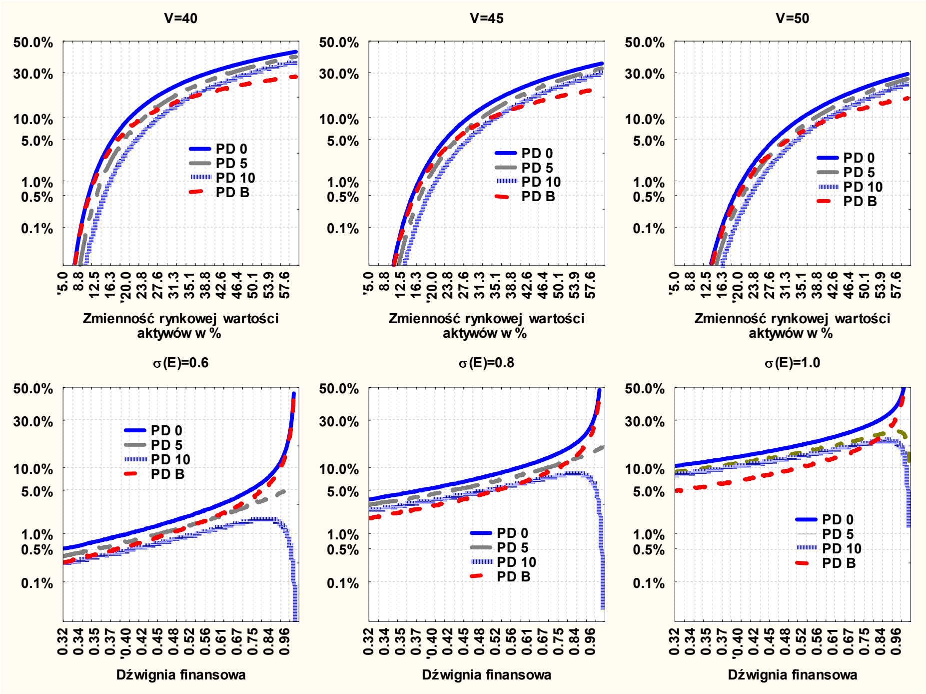
[10] Najmniejsza wartość dźwigni kapitałowej wynosiła L=0.32; największa L=0.99.



Rys. 1. Wartości *PD* względem zmian poziomu zadłużenia i zmian rynkowej wartości aktywów dla σ_V dla założonych poziomów: 0.2, 0.3 i 0.4.

Źródło: opracowanie własne.

Wynika to z innego kąta nachylenia przebiegu wartości *PD* przy różnych wartościach σ_V. Wraz ze wzrostem założonej wartości długu i *PD* różnica ta się zawęża i tak przy poziomie długu ok. 50 mln zł ryzyko niewypłacalności osiąga wartość prawie 50% dla wszystkich wariantów założonego poziomu μ. Zauważalna jest nieznaczna rozpiętość pomiędzy wartościami *PD* dla poszczególnych wariantów μ lecz wzrasta ona wraz ze wzrostem wartości zadłużenia. Największa rozpiętość pomiędzy μ=0% a μ=10% występuje przy σ_V=0.2. W wariancie B (PD_B liczone z modelu Byströma) przy niskich założonych wartościach długu przebieg wartości *PD* jest zbliżony do wartości *PD* przy założonym zerowym wzroście aktywów. Jednak wraz ze wzrostem σ_V poziomy tego prawdopodobieństwa osiągają wartości zbliżone do PD_{10}. Z kolei dla różnych poziomów rynkowej wartości aktywów przy tym samym ich poziomie ryzyko niewypłacalności jest bardzo wysokie (ok. 50%) dla wszystkich wariantów σ_V. Jednakże wraz ze wzrostem rynkowej wartości aktywów *PD* spada najszybciej dla σ_V=0.2. PD_B zachowuje się jednak nieco odmiennie w każdym wariancie wartości σ_V. Dla σ_V=0.2 przebieg PD_B jest najbardziej zbliżony do PD_5 choć od poziomu *PD* niższego od 5.0% PD_B wyraźnie zbliża się do wartości PD_0. Przy σ_V=0.3 przebieg PD_B jest początkowo zbliżony do przebiegu PD_{10}, a od poziomu *PD* niższego od 5.0% do PD_5. Natomiast dla σ_V=0.4 przebieg PD_B jest najbardziej zbliżony do PD_{10} co może oznaczać, że niedoszacowuje prawdopodobieństwa niewypłacalności. Rozpiętość pomiędzy wartościami PD_0 a PD_{10} jest największa w przypadku wariantu σ_V=0.2. Rysunek 2 przedstawia poziomy *PD* przy różnych wartościach μ jeśli zakładamy określoną stałą wartość rynkową aktywów.



Rys. 2. Wartości *PD* przy *V*=40, 45, 50 mln zł względem zmian σ_V oraz zmianach w poziomie dźwigni finansowej dla założonych poziomów σ_E.
Źródło: opracowanie własne.

Przy najniższej założonej wartości rynkowej aktywów (*V*=40) *PD* rośnie gwałtowniej przy niższych poziomach zmienności aktywów niż dla *V*=45 i 50. Do poziomu zmienności ok.12.5% PD_0 oraz PD_B mają prawie identyczny przebieg. Jednak od poziomu zmienności powyżej 35% wartości PD_B znajdują się znacznie poniżej PD_{10}. Dynamika wzrostu *PD* od poziomu 35% jest malejąca (por. rys.2.). Można także zaobserwować, że wraz ze wzrostem σ_E poziom *PD* przy tych samych poziomach dźwigni finansowej w poszczególnych wariantach jest wyższy. Wzrost ten charakteryzuje się stabilną dynamiką do poziomu dźwigni finansowej (*L*) wynoszącej 80%. Powyżej 80% PD_{10} gwałtownie spada (w przypadku σ_E=0.6 do zera). Jest to spowodowane tym, że w tym przypadku zmienność aktywów jest bardzo niska (rzędu 5%), a przy założonej stopie zwrotu z aktywów 10% powoduje to sytuację, że prawdopodobieństwo osiągnięcie punktu niewypłacalności spada praktycznie do zera. Przy poziomie μ=0% i 5% prawdopodobieństwo osiągnięcia punktu niewypłacalności jest znacznie większe. PD_B początkowo jest zbliżone do PD_{10}, aby następnie zbliżać się do poziomów PD_0 przy bardzo wysokich poziomach L.

5. Zakończenie

Przeprowadzona analiza wskazuje na znaczne rozpiętości pomiędzy szacowanym prawdopodobieństwem z modelu MKMV, a oszacowanym z modelu Byströma. W zależności od: poziomu zadłużenia, rynkowej wartości aktywów, zmienności rynkowej wartości aktywów i dźwigni finansowej PD_B jest wyższe lub odpowiednio niższe od PD oszacowanych z modelu MKMV przy różnych poziomach oczekiwanej stopy zwrotu z aktywów.

Wraz ze wzrostem zmienności rynkowej wartości aktywów oraz wzrostem zadłużenia PD_B niedoszacowuje prawdopodobieństwa niewypłacalności. Przy niskim poziomie zmienności aktywów PD_B jest bliskie PD_0 natomiast wraz ze wzrostem zmienności rynkowej wartości aktywów PD_B jest zbliżone do PD_{10}. Analogiczna sytuacja występuje w przypadku wzrostu rynkowej wartości aktywów. Największe rozbieżności można zauważyć w przypadku zmiany wartości rynkowej aktywów. Przy niskich ich wartościach wyniki otrzymane z modelu Byströma są zbliżone do PD_0, a wraz ze wzrostem zmienności rynkowej wartości aktywów PD_B zbliża się do PD_{10}. Analizując te prawdopodobieństwa względem dźwigni finansowej, iż przy niskich wartościach dźwigni finansowej PD_B jest niższe niż PD_{10}, a wraz ze wzrostem L zbliża się do PD_0.

Oznacza to, że do szacowania prawdopodobieństwa niewypłacalności powinno się stosować model MKMV z odpowiednio estymowaną oczekiwaną stopą zwrotu z aktywów.

Literatura

Byström, H. (2004), *A Flexible Way of Modelling Default Risk*, (http://www.business.uts.edu.au/qfrc/research/research_papers/rp112.pdf).

Crosbie, P., Bohn, J. (2003), *Modeling Default Risk – Modeling Methodology, Moody's KMV Company*, (http://www.defaultrisk.com/ps_models.htm).

Hull, J.C. (2003), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, upper Saddle River, New Jersey.

Hull J., Nelken I., White, A. (2003), *Merton's Model, Credit Risk, and Volatility Skews*, University of Toronto (http://www.defaultrisk.com/ps_models.htm).

Saunders, A. (2001), *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.