

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Aneta Włodarczyk, Marcin Zawada
Politechnika Częstochowska

Przełącznikowe modele Markowa dla cen energii elektrycznej na giełdzie energii w Polsce

1. Wstęp

Modele GARCH, charakteryzujące się autoregresyjnymi zależnościami w równaniu wariancji warunkowej, wykorzystywane są do modelowania finansowych szeregów czasowych ze względu na występujące w nich zjawisko grupowania wariancji. Z kolei przełącznikowe modele Markowa, poprzez losowe przełączanie procesu do różnych reżimów (Stawicki, 2004), umożliwiają rozróżnienie okresów odpowiadających różnym poziomom zmienności zmiennej endogenicznej. Hamilton i Susmel (1994) zaproponowali połączenie tych dwóch podejść poprzez wprowadzenie losowej zmiany reżimu w równaniu warunkowej wariancji modelu ARCH (*Markov-switching ARCH, SWARCH*). Uogólnieniem modelu SWARCH jest model GARCH o zmiennym reżimie (*MS-GARCH*), który umożliwia bardziej dokładny opis dynamiki wariancji procesu różniącej się na przestrzeni reżimów (Frömmel, 2004).

W pracy prezentowane są teoretycznie różne specyfikacje przełącznikowych modeli Markowa, uwzględniające zależności autoregresyjne zarówno w równaniu średniej warunkowej, jak i wariancji warunkowej procesu. W części empirycznej oszacowano i zweryfikowano przełącznikowe modele Markowa dla dziennych cen energii elektrycznej w Polsce.

2. Ogólna postać przełącznikowego modelu Markowa

Hamilton (1990) zaproponował postać przełącznikowego modelu Markowa MS(N)-AR(p) opisującą zmiany wartości średniej i wariancji autoregresyjnego procesu ekonomicznego na przestrzeni reżimów:

$$y_t = c_{s_t} + \phi_{1,s_t} y_{t-1} + \phi_{2,s_t} y_{t-2} + \dots + \phi_{p,s_t} y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1)$$

gdzie:

$$\varepsilon_t = \sigma_{s_t} u_t \quad \text{dla } u_t \sim \text{IID}(0,1),$$

c_{s_t}, ϕ_{i,s_t} - parametry związane z danym reżimem,

s_t - jednorodny N-stanowy łańcuch Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia $P = [p_{ij}]_{N \times N}$.

Hamilton (1994) formułuje następującą relację na warunkowy rozkład zmiennej sterującej zmianami reżimu s_t :

$$P(s_t = j | \Phi_t) = \frac{f(y_t, s_t = j | \Phi_{t-1})}{f(y_t | \Phi_{t-1})} = \frac{f(y_t | s_t = j, \Phi_{t-1}) \cdot P(s_t = j | \Phi_{t-1})}{\sum_{i=1}^N f(y_t | s_t = i, \Phi_{t-1}) \cdot P(s_t = i | \Phi_{t-1})} \quad (2)$$

gdzie postać funkcji gęstości rozkładu warunkowego zmiennej y_t zależy od funkcji gęstości $g(\cdot)$ postulowanego rozkładu składnika losowego (Doman, 2005):¹

$$f(y_t | s_t = j, \Phi_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t(j)} g_j \left(\frac{y_t - \mu_t(j)}{\sigma_t(j)} \right) \quad (3)$$

Uogólnienie przełącznikowego modelu Markowa postaci (1) polega na włączeniu do modelu dodatkowej zmiennej egzogenicznej. W takim przypadku postać macierzowa modelu jest następująca (Kaufmann, 2000):

$$y_t = X_t \beta_{s_t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_{s_t}) \quad (4)$$

gdzie:

$$X_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, x_{t-1}, \dots, x_{t-q}),$$

$$\beta_{s_t}^T = (c_{s_t}, \phi_{1,s_t}, \phi_{2,s_t}, \dots, \phi_{p,s_t}, \psi_{0,s_t}, \psi_{1,s_t}, \dots, \psi_{q,s_t}).$$

3. Struktura GARCH dla przełącznikowych modeli Markowa

W literaturze ekonometrycznej opisane zostały różne możliwe specyfikacje równania wariancji warunkowej dla modelu MS-GARCH, które stanowią aplikacje modelu GARCH(p,q) uwzględniające zmienność reżimów (Gray, 1996, Klassen, 2002):

¹ $\mu_t(j)$ oraz $\sigma_t(j)$ oznaczają odpowiednio warunkową średnią i warunkowe odchylenie standardowe procesu, zależne od reżimu j , w którym znajduje się proces w chwili t . W zależności od własności modelowanego szeregu w równaniu średniej warunkowej można uwzględnić schemat autoregresyjny. W badaniach empirycznych przyjmuje się najczęściej założenie, iż innowacje mają rozkład: normalny, t-Studenta, GED, skośny t-Studenta.

$$h_t = \omega_{s_t} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i(s_t)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_{i(s_t)} h_{t-i} \quad (5)$$

gdzie:

h_t - wariancja składnika losowego warunkowa względem zbiorów informacji:

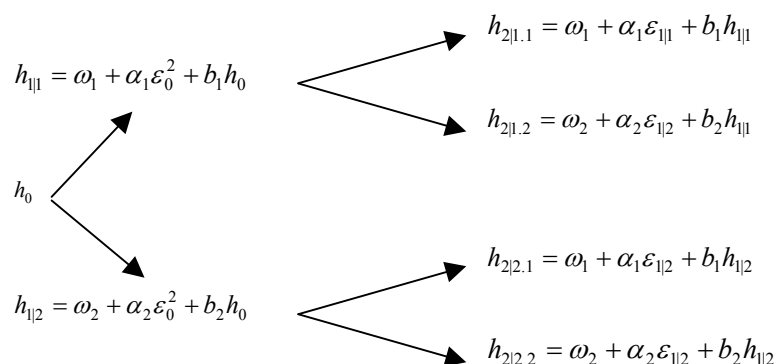
Φ_{t-1} oraz historii przełączeń procesu do poszczególnych reżimów \tilde{S}_t ,

ω_{s_t} - wyraz wolny zależny o zmiennej reżimowej,

$\alpha_{i(s_t)}$ - parametry związane ze strukturą ARCH, zależne od zmiennej reżimowej,

$\beta_{i(s_t)}$ - parametry związane ze strukturą GARCH, zależne od zmiennej reżimowej.

Natomiast szacowanie składnika h_{t-1} w równości (5) przysparza trudności natury numerycznej ze względu na pojawienie się „ścieżki zależności” (*path – dependence*) obrazującej całą historię przełączeń procesu do poszczególnych reżimów (Cai, 1994 oraz Hamilton i Susmel, 1994). Problem ten zostanie przedstawiony dla modelu MS(2) - GARCH(1,1).



Rys. 1. Ewolucja wariancji warunkowej w modelu GARCH z reżimową ścieżką zależności

Źródło: Gray (1996), s. 35.

Każda wariancja warunkowa dotycząca modelu ze „ścieżką zależności” zależy nie tylko od bieżącego reżimu, ale od całej dotychczasowej historii procesu sterującego zmianą reżimu, co uwiadaczniają rozchodzące się gałęzie powyższego drzewa.

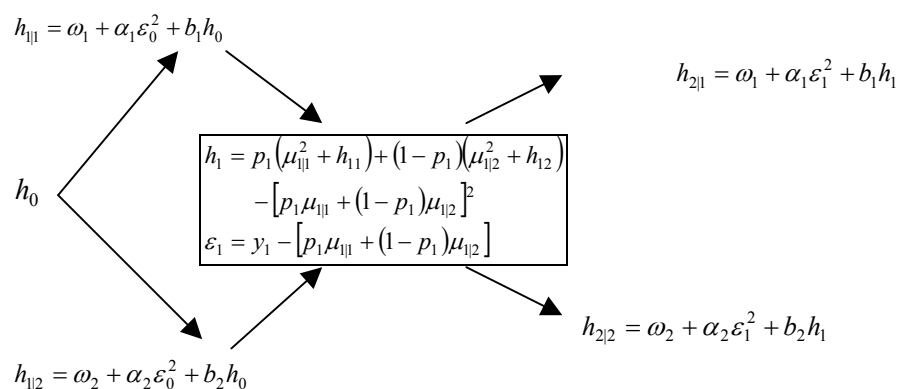
W kolejnej specyfikacji poprzez wprowadzenie do wyrażenia (5) operatora wartości oczekiwanej uzależniono warunkową wariancję tylko od bieżącego reżimu s_t , a nie od całej ścieżki \tilde{S}_{t-1} (Gray, 1996):

$$h_t = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E_{t-2}[h_{t-1}] \quad (6)$$

gdzie:

$$h_{t-1} = E[y_{t-1}^2 | \Phi_{t-2}] - (E[y_{t-1} | \Phi_{t-2}])^2 = P(s_{t-1} = 1 | \Phi_{t-2}) \cdot (\mu_1^2 + h_{1,t-1}) + P(s_{t-1} = 2 | \Phi_{t-2}) \cdot (\mu_2^2 + h_{2,t-1}) - \{P(s_{t-1} = 1 | \Phi_{t-2}) \cdot \mu_1 + P(s_{t-1} = 2 | \Phi_{t-2}) \cdot \mu_2\}^2 \quad (7)$$

Rysunek (2) obrazuje ewolucję warunkowej wariancji w modelu GARCH o zmiennym reżimie.



Rys. 2. Ewolucja wariancji warunkowej w modelu GARCH bez „ścieżki zależności”
Źródło: Gray (1996), s. 36.

W dowolnym okresie w wyniku przeprowadzanej agregacji wariancji warunkowych względem aktualnego reżimu ($h_{t|i}$ dla $i = 1, 2$) konstruowana jest wariancja warunkowa (h_t) względem zbioru obserwowalnych informacji (Φ_{t-1}) a nie reżimów, jak to miało miejsce w poprzedniej specyfikacji. Opisaną zależność obrazują gałęzie drzewa, które w każdym kolejnym kroku łączą się we wspólnym węźle.

Ostatnią specyfikację warunkowej wariancji modelu GARCH (1,1) o zmiennym reżimie można przedstawić w postaci następującego równania:²

$$h_t = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E_{t-1}[h_{t-1} / s_t] \quad (8)$$

gdzie

$$h_{t-1} = P(s_{t-1} = 1 | \Phi_{t-1}) \cdot (\mu_1^2 + h_{1,t-1}) + P(s_{t-1} = 2 | \Phi_{t-1}) \cdot (\mu_2^2 + h_{2,t-1}) - \{P(s_{t-1} = 1 | \Phi_{t-1}) \cdot \mu_1 + P(s_{t-1} = 2 | \Phi_{t-1}) \cdot \mu_2\}^2 \quad (9)$$

² Ostatnia specyfikacja warunkowej wariancji dla modelu GARCH o zmiennym reżimie wykorzystuje prawdopodobieństwa filtrowane, natomiast w poprzedniej specyfikacji użyto prawdopodobieństw *ex-ante* (Klassen, 2002).

Problem występowania ścieżki zależności w równaniu wariancji warunkowej ma kluczowe znaczenie przy sporządzaniu wielookresowych prognoz zmienności.

4. Przykład numeryczny

Badania empiryczne zostały przeprowadzone w oparciu o dzienne notowania spot energii elektrycznej na polskiej Giełdzie Energii w okresie 02.01.2004 – 31.12.2006. Oszacowano postać przełącznikowego modelu Markowa zaproponowanego przez Hamiltona i Susmela (1994):

$$y_t = \gamma + \varphi \cdot y_{t-1} + u_t \quad (10)$$

przy czym dla składnika losowego u_t przyjęto specyfikację SWARCH – L(3,2):

$$\begin{aligned} u_t &= \sqrt{g_{s_t}} \cdot \tilde{u} \\ \tilde{u}_t &= h_t \cdot v_t \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \tilde{u}_{t-2}^2 + \xi \cdot d_{t-1} \cdot \tilde{u}_{t-1}^2 \\ d_{t-1} &= \begin{cases} 1 & \text{dla } \tilde{u}_{t-1} \leq 0 \\ 0 & \text{dla } \tilde{u}_{t-1} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: zmienna s_t sterująca zmianami reżimu jest modelowana jako 3-stanowy łańcuch Markowa.

Dysponując obserwacjami zmiennej y_t dla $t = 1, 2, \dots, T$ można zbudować funkcję wiarygodności:

$$\tilde{L}(y_1, y_2, \dots, y_T; \theta) = \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{j=1}^N f(y_t | s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) P(s_t = j | \Phi_{t-1}; \theta) \right) \quad (12)$$

Estymację parametrów tego modelu przeprowadzono w pakiecie Ox wykorzystując kody programowe napisane przez Hamiltona.

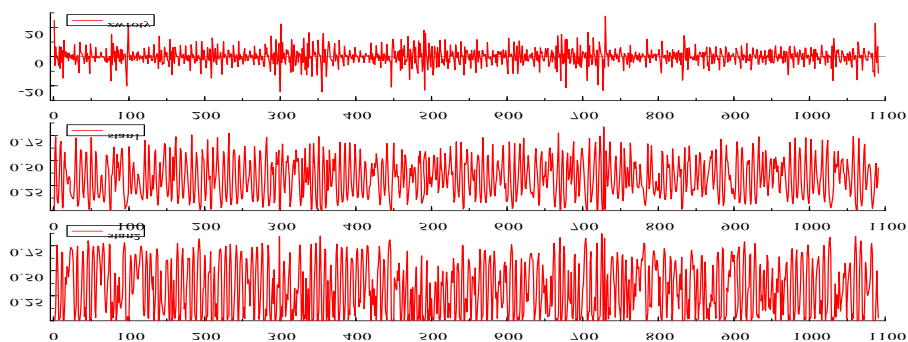
Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 1 można wnioskować, iż wariancje przypisane odpowiednim stanom różnią się od siebie dla każdego oszacowanego modelu przełącznikowego. Przykładowo wyniki uzyskane dla modelu SWARCH-L(3,2) wskazują, iż wariancja odpowiadająca drugiemu reżimowi jest ponad czterokrotnie wyższa od wariancji charakteryzującej pierwszy reżim, a w trzecim reżimie jest ponad trzynastokrotnie wyższa w stosunku do pierwszego reżimu, co uzasadnia wybór modelu przełącznikowego do opisu zmienności cen energii elektrycznej na polskiej Giełdzie Energii. Warto również zwrócić uwagę, iż prawdopodobieństwa utrzymania się stanów wysokiej, średniej i niskiej zmienności są wysokie, co odzwierciedla efekt grupowania wariancji w szeregach stóp zwrotu cen energii. Podobne wyniki otrzymano dla modelu SWARCH(2,0).

Tabela 1 Parametry modelu SWARCH

	SWARCH(3,2)	SWARCH-L(3,2)	SWARCH(2,0)
const	0.10491258	-0.080703910	0.08988490
ϕ	-0.22516631	-0.14736107	-0.22255117
α_0	15.348751	3.4173519	13.215834
α_1	0.24141784	0.0049463894	-
α_2	0.19174416	0.057990611	-
ξ	-	0.90538713	-
ν	-	5.0749257	-
g_1	1	1	1
g_2	0.18257100	4.0064729	5.5615685
g_3	2.1873915	13.553465	-
p_{11}	0.57932120	0.99240311	0.9175262
p_{22}	0.56702740	0.99388004	0.8019476
p_{12}	0.42067880	0.0075968939	-
p_{21}	0.00000000	0.00000000	-
p_{31}	0.40554684	0.0000000066	-
p_{33}	0.59445300	0.98016587	-
Log lik	-3314.7072	-3292.9939	-3344.0826
n	1095	1095	1095

Źródło: Obliczenia własne.

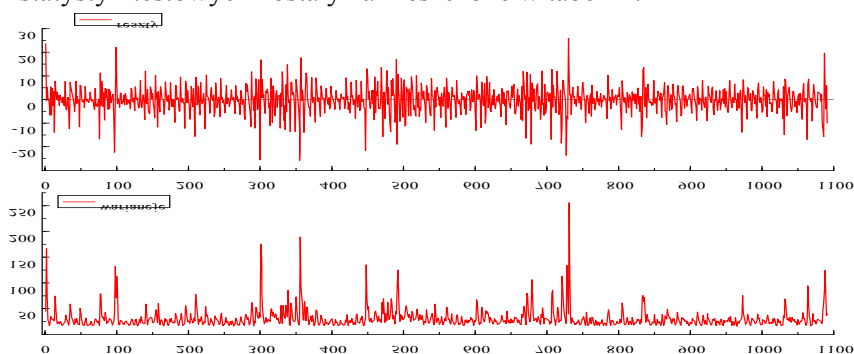
W przypadku pierwszej specyfikacji modelu przełącznikowego, w której zrezygnowano z modelowania efektu dźwigni finansowej oraz założono rozkład normalny składnika losowego otrzymano nietypową ocenę wariancji w reżimie średniej zmienności. Ponadto oszacowania prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha Markowa wskazują na mniejszą trwałość poszczególnych reżimów w porównaniu z pozostałymi modelami. W tym przypadku należy rozważyć zmianę liczby stanów w jednorodnym łańcuchu Markowa z trzech do dwóch.



Rys. 3. Teoretyczne zwroty oraz wygładzone prawdopodobieństwa osiągnięcia stanu niskiej i średniej zmienności dla modelu SWARCH-L(3,2) cen energii.

Źródło: Obliczenia własne.

Na podstawie wyznaczonych reszt modeli zweryfikowano hipotezy dotyczące dynamicznej specyfikacji poszczególnych modeli. Wartości poszczególnych statystyk testowych zostały zamieszczone w tabeli 2.



Rys. 4. Reszty modelu oraz wartości wariancji warunkowej dla modelu SWARCH-L(3,2)

Źródło: Obliczenia własne.

Panel dolny na rysunku 4 przedstawia wartości wariancji warunkowej procesu cen energii elektrycznej, które mają szczególne znaczenie dla uczestników giełdowego rynku energii w Polsce ze względu na ich przydatność w procesie zarządzania ryzykiem rynkowym.

Tabela 2. Testy weryfikujące dynamiczną specyfikację przełącznikowego modelu Markowa

Test	SWARCH(3,2)	SWARCH-L(3,2)	SWARCH(2,0)
Test Ljunga-Boxa	311,9	331,9	313,5
Test Jarque-Bera	174,3	163,1	186,7
Test LM na efekt ARCH	84,6	85,5	94,1
AIC	-3325,7072	-3305,9939	-3350,0826
S.C.	-3353,1972	-3338,4839	-3365,0781

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki testów zamieszczonych w tabeli 2 potwierdzają, iż reszty poszczególnych modeli nie spełniają założeń białego szumu, tzn. są skorelowane oraz heteroskedastyczne, ich rozkłady odbiegają w istotny sposób od rozkładu normalnego.

5. Uwagi końcowe

Podsumowując, należy zwrócić uwagę na następujące własności modelu GARCH o zmiennym reżimie:

- ✓ większa elastyczność modelu dotycząca przejmowania trwałości szoków w poziomie zmienności,³
- ✓ struktura ARCH i GARCH modelu pozwala na uwzględnienie efektu warunkowej heteroskedastyczności w istotny sposób różniącej się na przestrzeni reżimów.

Analizując wyniki badań empirycznych, które dotyczyły modelowania rynkowych cen energii elektrycznej można sformułować następujące wnioski. Należy zmienić specyfikację zarówno równania średniej warunkowej procesu, jak i wariancji warunkowej. Szeregi stóp zwrotu cen energii elektrycznej podlegają wahaniom periodycznym, ze względu na szczególny charakter energii elektrycznej jako towaru podlegającego obrotowi giełdowemu. Struktura autoregresyjna rzędu pierwszego uwzględniona w rozważanych modelach okazała się niewystarczająca dla opisu badanych zależności. Z tego powodu w kolejnych badaniach należy uwzględnić zależności autokorelacyjne wyższych rzędów oraz strukturę ARCH zastąpić strukturą GARCH o zmiennym reżimie.

Literatura

- Cai, J. (2004), A Markov Model of Unconditional Variance in ARCH, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 309–316.
- Doman, R. (2005), Forecasting the Polish Stock Market Volatility with Markov Switching GARCH Models, w: Milo W., Wdowiński P. (ed.), *Theory and Applications*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Frömmel, M. (2004), Modelling Exchange Rate Volatility in the Run-up to EMU using a Markov Switching GARCH Model, Universität Hannover, Discussion Paper No. 306.
- Gray, S. F. (1996), Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime – Switching Process, *Journal of Financial Economics*, 3.
- Hamilton, J. D. (1990), Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 45.
- Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 64.
- Kaufmann, S. (2000), Measuring Business Cycles with a Dynamic Markov Switching Factor Model: an Assessment Using Bayesian Simulation Methods, *The Econometrics Journal*, 3.
- Klassen, F. (2002), Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH, w: Hamilton J. D., Raj B. (red.), *Advances in Markov-Switching Models*, Physica-Verlag, Heidelberg.
- Stawicki, J. (2004), *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń.

³ Nie wszystkie zaburzenia pojawiające się na rynku trwale oddziałują na poziom cen. Dzięki odpowiedniej konstrukcji tych modeli trwałość tego rodzaju zaburzeń można pomniejszyć poprzez przełączenie procesu do reżimu o niższym poziomie zmienności, co powoduje iż dana informacja szybko znajdzie się „poza rynkiem”.