DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Elżbieta Szulc
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Modelowanie zależności między przestrzenno-czasowymi procesami ekonomicznymi

1. Wprowadzenie

Główną tezą referatu jest stwierdzenie, że podstawą odpowiedniego modelowania zależności miedzy procesami przestrzenno-czasowymi jest uwzględnienie ich wewnętrznej struktury.

Procesy przestrzenno-czasowe charakteryzowane są przez zbiory podwójnie indeksowanych zmiennych $X_{\mathbf{u}_i,t}$, tzw. pola losowe. Modele struktury takich pól losowych, omawiane w punktach 2 i 3 referatu będą miały istotne znaczenie dla specyfikacji modeli zależności miedzy procesami (polami) przestrzenno-czasowymi.

Modele omawiane w punkcie 4 uwzględniają zasadę „dynamiki" czasowej, przestrzennej i przestrzenno-czasowej, przejawiającą się w wyspecyfikowaniu odpowiednich opóźnień czasowych, przesunięć przestrzennych a także jednoczesnych przesunięć przestrzenno-czasowych w modelowaniu zależności, oraz zasadę zgodności, która jest rozwinięciem zasady zgodności stosowanej w ekonometrii w liniowym dynamicznym modelowaniu zależności procesów stochastycznych.

Wskazuje się na korzyści wynikające z takiego podejścia dla modelowania zależności ekonomicznych zjawisk przestrzenno-czasowych. Rozważania teoretyczne ilustrowane są przykładem empirycznym dotyczącym zależności między bezrobociem a wynagrodzeniami brutto w sektorze przedsiębiorstw w Polsce, który zamieszczono w punkcie 5 referatu. W punkcie 6 sformułowano wnioski i wskazano na kierunki dalszych badań.

2. Modelowanie struktury trendowo-sezonowej

Niejednorodne/ niestacjonarne ze względu na średnią przestrzenno-czasowe procesy ekonomiczne można modelować wykorzystując wielomianowe funkcje trendu przestrzenno-czasowego/ i zero-jedynkowe modele składnika sezonowego.

Niech $X_{\mathbf{u}_i,t}$ oznacza przestrzenno-czasowy proces, obserwowany w przestrzennych jednostkach i, o współrzędnych lokalizacji $\mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i})$, w czasie t. Wyrażenie postaci:

$$f(u_{1i}, u_{2i}; t) = \sum_{r_1+r_2+r_3 \le r} \gamma_{r_1,r_2,r_3} u_{1i}^{r_1} u_{2i}^{r_2} t^{r_3} \tag{1}$$

przedstawia przestrzenno-czasowy trend stopnia r.

Model procesu przestrzenno-czasowego z trendem i z sezonowością przyjmuje postać:

$$X_{\mathbf{u}_i,t} = \sum_{r_1+r_2+r_3 \le r} \gamma_{r_1,r_2,r_3} u_{1i}^{r_1} u_{2i}^{r_2} t^{r_3} + \sum_{k=1}^{m} d_k Q_{kt} + \eta_{\mathbf{u}_i,t}, \tag{2}$$

gdzie: Q_{kt} – zero-jedynkowe zmienne sezonowe,
$\eta_{\mathbf{u}_i,t}$ – jednorodny/ stacjonarny przestrzenno-czasowy proces resztowy.

3. Modelowanie struktury autoregresyjnej

Konstrukcja autoregresyjnych modeli przestrzenno-czasowych opiera się na założeniu, że wartości zjawiska obserwowanego w określonych punktach w czasie i w przestrzeni zależą od wcześniejszych obserwacji tego zjawiska w innych punktach w przestrzeni. Powiązania między zmiennymi w różnych jednostkach w przestrzeni zależą w systematyczny sposób od odległości przestrzennej, podobnie jak zależności w czasie zależą od odległości czasowej. Rozważa się zależności między „sąsiadami" rożnych rzędów.

Aby formalnie wyrazić powiązania obserwacji zmiennej w jednym miejscu z obserwacjami na tej samej zmiennej w innych miejscach, wygodnie jest odwołać się do koncepcji przestrzennego lagu, tj. operatora przesunięcia przestrzennego.

Operator przesunięć przestrzennych różni się od operatora przesunięć czasowych, ponieważ ten ostatni powoduje przesunięcia zmiennej o jeden lub więcej okresów wstecz, podczas gdy operator przestrzenny działa w różnych kierunkach, zgodnie z faktem, iż kierunek przesunięć w przestrzeni może być różny.

Definicja operatora przesunięć przestrzennych zależy od układu danych przestrzennych oraz od tego, co jest wiadomo z góry o badanym zjawisku, na przykład, czy uzasadnione jest założenie, że wpływ zmiennej „zlokalizowanej" w określonym miejscu na taką zmienną „zlokalizowaną" w innym miejscu zależy głównie od odległości między lokalizacjami a nie zależy od kierunku, czy też należy przyjąć, że zależy także od kierunku[1].

Punktem wyjścia odpowiedniego określenia operatora przesunięć przestrzennych jest identyfikacja sąsiadów każdego miejsca i na siatce D^2, zgodnie z określonym kryterium specyfikacji (np. wspólna granica dla tzw. „najbliższych" sąsiadów). Identyfikuje się sąsiadów pierwszego-, drugiego-, itd. rzędu. Odpowiednie zbiory sąsiadów oznacza się przez: $N_1(i)$, $N_2(i)$, ... (ogólnie, $N_s(i)$, gdzie s oznacza rząd sąsiedztwa).

Po wyznaczeniu zbiorów sąsiadów dla każdego miejsca i, można zdefiniować operator przesunięć przestrzennych rzędu s (ozn. $L^{(s)}$) w następujący sposób:

$$L^{(s)} X_{i,t} = \sum\nolimits_{j \in N_s(i)} w_{ij}^{(s)} X_{j,t} \,. \tag{3}$$

Z powyższego wynika, że przestrzenny operator przesunięć jest raczej operatorem odstępów rozłożonych w przestrzeni, niż operatorem przesunięć w określonym kierunku[3].

Przyjmuje się, że wagi w (3) spełniają następujące warunki:

1) $w_{ij}^{(s)} \geq 0$,

2) $w_{ii}^{(s)} = 0$,

3) $\sum\nolimits_{j \in N_s(i)} w_{ij}^{(s)} = 1$.

Wagi te są zwykle ustalane *a priori* przez badacza. Mogą one odzwierciedlać długość wspólnych granic, liczbę dróg, połączeń kolejowych, odległość geograficzną lub ekonomiczną między regionami.

Wykorzystując podane wyżej określenie przestrzennego operatora $L^{(s)}$ można zdefiniować przestrzenno-czasowy autoregresyjny model rzędu l w przestrzeni oraz q w czasie, ozn.: STAR(l, q), tj.:

$$X_{i,j} = \sum_{s=0}^{l} \sum_{\tau=1}^{q} \alpha_{s\tau} L^{(s)} X_{i,t-\tau} + \varepsilon_{it} \,. \tag{4}$$

W modelu (4) nie uwzględnia się tzw. autozależności czysto przestrzennych, tj. zależności między jednostkami przestrzennymi w tym samym czasie. Na ogół jest to uzasadnione. Można bowiem zgodzić się z argumentacją, że zdarzenia w różnych punktach w przestrzeni nie wpływają na zdarzenia w innych lokalizacjach natychmiast, ponieważ realizacja efektów oddziaływania

[1] Operator przesunięć przestrzennych jest czasami przedstawiany jako tzw. struktura przestrzennych przesunięć w modelu. Możliwe są różne struktury przesunięć przestrzennych. O ich roli w definiowaniu oraz własnościach tzw. modeli STARMA (spatio-temporal autoregressive-moving-average models) piszą, np. Hopper i Hewings (1981).

[2] Określenie przestrzennej siatki można znaleźć, np. w: Cressie (1993), rozdz. 6.

[3] Por., np. Giacomini, Clive, Granger (2004).

wymaga pewnego odstępu czasowego. Jednak należy zwrócić uwagę, że założenie o braku natychmiastowej zależności przestrzennej jest ważne, o ile odstęp czasu między obserwacjami jest mniejszy niż rzeczywiste opóźnienie reakcji. Jeśli mechanizm generujący przebieg zjawiska tworzy je z częstotliwością większą niż częstotliwość z jaką obserwowane są dane, wtedy mogą zachodzić pozornie natychmiastowe oddziaływania. Zatem, to czy przestrzenno-czasowy model autoregresyjny powinien zawierać składnik czysto przestrzenny zależy od skali czasu realizacji i pomiaru zjawiska. Ponadto, podczas gdy natychmiastowa przyczynowa zależność może być wątpliwa, przestrzenna korelacja w tym samym czasie (tzw. autokorelacja przestrzenna) jest oczywiście możliwa.

W niniejszym opracowaniu konstruując przestrzenno-czasowe modele autoregresyjne uwagę ogranicza się do modeli postaci (4). Zakłada się zatem, że potrzebny jest przynajmniej jeden odstęp czasu dla zaistnienia ewentualnej zależności przestrzennej.

4. Modelowanie zależności między procesami

Ważną koncepcją modelowania zależności między procesami przestrzenno-czasowymi, uwzględniającą strukturę powiązań w czasie i w przestrzeni jest zgodne modelowanie pól losowych, powstałe na wzór ekonometrycznego modelowania zgodnego, odnoszącego się do procesów stochastycznych.

Autorka podejmowała już próby konstrukcji modeli zgodnych dla pól losowych i badania ich własności na gruncie rozważań teoretycznych oraz na podstawie danych generowanych[4]. W niniejszym opracowaniu zaprezentowano przykład empiryczny modelowania zależności dwóch procesów przestrzenno-czasowych.

Procedura budowy modelu zgodnego jest w tym wypadku następująca:

1) Dopasowuje się modele z przestrzenno-czasowym trendem i sezonowością:

$$X_{\mathbf{u}_i,t} = \sum_{r_1+r_2+r_3 \le r^{(x)}} \gamma_{r_1,r_2,r_3} u_{1i}^{r_1} u_{2i}^{r_2} t^{r_3} + \sum_{k=1}^{m} d_k^{(x)} Q_{kt} + \eta_{\mathbf{u}_i,t}^{(x)}, \tag{5}$$

$$Y_{\mathbf{u}_i,t} = \sum_{r_1+r_2+r_3 \le r^{(y)}} \delta_{r_1,r_2,r_3} u_{1i}^{r_1} u_{2i}^{r_2} t^{r_3} + \sum_{k=1}^{m} d_k^{(y)} Q_{kt} + \eta_{\mathbf{u}_i,t}^{(y)}. \tag{6}$$

2) Przestrzenno-czasowe procesy $\eta_{\mathbf{u}_i,t}^{(x)}$, $\eta_{\mathbf{u}_i,t}^{(y)}$ identyfikuje się jako procesy autoregresyjne, dopasowując modele postaci[5]:

$$\eta_{i,t}^{(x)} = \sum_{s=0}^{l} \sum_{\tau=1}^{q} \alpha_{s,\tau} L^{(s)} \eta_{i,t-\tau}^{(x)} + \varepsilon_{i,t}^{(x)}, \tag{7}$$

[4] Patrz, Szulc (1998, 2003).
[5] Dla uproszczenia notacji w dalszych zapisach indeks $\mathbf{u}_i$ zastąpiono indeksem i.

$$\eta_{i,t}^{(y)} = \sum_{s=0}^{h}\sum_{\tau=1}^{p}\beta_{s,\tau}L^{(s)}\eta_{i,t-\tau}^{(y)} + \varepsilon_{i,t}^{(y)}. \tag{8}$$

3) Konstruuje się równanie zależności dla białoszumowych procesów przestrzenno-czasowych $\varepsilon_{i,t}^{(x)}$, $\varepsilon_{i,t}^{(y)}$, tj.:

$$\varepsilon_{i,t}^{(y)} = \rho\varepsilon_{i,t}^{(x)} + \varepsilon_{i,t}, \tag{9}$$

gdzie: $\varepsilon_{i,t}$ – biały szum niezależny od $\varepsilon_{i,t}^{(x)}$.

4) Zgodny model dla procesów rzeczywistych otrzymuje się wyznaczając procesy resztowe z (5) i (6) i podstawiając odpowiednio do (7) i (8), a następnie przekształcone (7) i (8) podstawiając do (9). W efekcie otrzymuje się:

$$\begin{aligned} Y_{i,t} = & \sum_{r_1+r_2+r_3\le r}\theta_{r_1,r_2,r_3}u_{1i}^{r_1}u_{2i}^{r_2}t^{r_3} + \sum_{k=1}^{m}d_kQ_{kt} + \rho X_{i,t} \\ & + \sum_{s=0}^{h}\sum_{\tau=1}^{p}\beta_{s,\tau}L^{(s)}Y_{i,t-\tau} + \sum_{s=0}^{l}\sum_{\tau=1}^{q}\alpha_{s,\tau}^{*}L^{(s)}X_{i,t-\tau} + \varepsilon_{i,t} \end{aligned}, \tag{10}$$

gdzie: $r = \max\{r^{(x)}, r^{(y)}\}$, $\alpha_{s,\tau}^{*} = -\rho\alpha_{s,\tau}$.

Uwzględnienie w modelu (10) składnika trendowo-sezonowego „filtruje” z procesów $X_{i,t}$, $Y_{i,t}$ niejednorodną/ niestacjonarną średnią, dzięki czemu parametry: $\alpha_{s,\tau}^{*}$, $\beta_{s,\tau}$, ρ mierzą zależności między jednorodnymi/ stacjonarnymi składowymi tych procesów. Oprócz bieżącej zależności między procesami $X_{i,t}$, $Y_{i,t}$, mierzonej przez parametr ρ, w modelu (10) uwzględnia się zależności „opóźnione” i przesunięte w przestrzeni. Wpływ zjawiska objaśniającego obserwowanego w tych samych punktach w czasie i przestrzeni, w których obserwowane jest zjawisko objaśniane został oddzielony od wpływu tego zjawiska obserwowanego gdzie indziej i kiedy indziej. Te wpływy mierzone są odpowiednio przez ρ oraz $\alpha_{s,\tau}^{*}$. Parametry $\beta_{s,\tau}$ odzwierciedlają związki w czasie między wielkościami zjawiska objaśnianego w sąsiadujących jednostkach przestrzennych. Dzięki wyodrębnieniu *explicite* zmiennych $L^{(s)}X_{i,t-\tau}$, nie będą one mieściły w sobie tzw. pośrednich wpływów na $Y_{i,t}$.

Specyfikacja modelu (10) wynika z badania wewnętrznej struktury poszczególnych procesów. Jest to model „pełny”, który po oszacowaniu parametrów wymaga redukcji nieistotnych składników.

5. Przykład empiryczny

Przykład empiryczny dotyczy zależności między bezrobociem i wynagrodzeniami brutto w sektorze przedsiębiorstw w Polsce w układzie województw w okresie: styczeń 1999 – grudzień 2006. Analizuje się stopę bezrobocia oraz realne wynagrodzenia. Dane pochodzą z *Biuletynów statystycznych województw* za odpowiednie okresy oraz ze źródeł internetowych: http://www.stat.gov.pl. Próba statystyczna składa się z dwóch zbiorów danych, liczących po 96 obserwacji czasowych dla każdej z 16 jednostek przestrzennych, tj. łącznie 1536 obserwacji.

Zebrane dane zarówno w zakresie bezrobocia, jak i wynagrodzeń wykazują zmiany trendowe i sezonowe. Uzasadnione jest także podejrzenie, że dane te mogą być przestrzennie skorelowane.

A. Badanie trendu i sezonowości

Rozważono modele wielomianowych funkcji trendu przestrzenno-czasowego z sezonowością. Dla procesu wynagrodzeń wybrano model postaci:

$$
\begin{aligned}
x_{ijt} = {} & \underset{(157{,}448)}{884{,}412} + \underset{(138{,}129)}{504{,}143}\,i + \underset{(138{,}129)}{700{,}863}\,j + \underset{(3{,}11171)}{3{,}54733}\,t \\
& - \underset{(53{,}6069)}{504{,}188}\,i^2 - \underset{(53{,}6069)}{598{,}971}\,j^2 - \underset{(0{,}04675)}{0{,}08795}\,t^2 + \underset{(30{,}2185)}{568{,}350}\,ij \\
& + \underset{(1{,}08349)}{0{,}10905}\,it + \underset{(1{,}08349)}{0{,}98416}\,jt - \underset{(4{,}14105)}{78{,}7202}\,i^2 j + \underset{(0{,}167074)}{0{,}00053}\,i^2 t \\
& - \underset{(4{,}14105)}{40{,}6421}\,ij^2 + \underset{(0{,}00603)}{0{,}003877}\,it^2 - \underset{(0{,}133659)}{0{,}173863}\,ijt + \underset{(6{,}90176)}{90{,}7726}\,i^3 \\
& + \underset{(6{,}90176)}{95{,}2109}\,j^3 + \underset{(0{,}0002)}{0{,}0007}\,t^3 - \underset{(0{,}167074)}{0{,}05476}\,j^2 t - \underset{(0{,}00603)}{0{,}0049375}\,jt^2 \\
& - \underset{(15{,}4515)}{62{,}1517}\,Q^*_{1t} - \underset{(154186)}{65{,}4650}\,Q^*_{2t} + \underset{(15{,}3931)}{6{,}82298}\,Q^*_{3t} - \underset{(15{,}3746)}{7{,}14584}\,Q^*_{4t} \\
& - \underset{(153624)}{43{,}6428}\,Q^*_{5t} - \underset{(15{,}3564)}{12{,}3288}\,Q^*_{6t} + \underset{(15{,}3564)}{4{,}9931}\,Q^*_{7t} - \underset{(15{,}3624)}{3{,}51258}\,Q^*_{8t} \\
& - \underset{(15{,}3746)}{4{,}9217}\,Q^*_{9t} - \underset{(15{,}3931)}{10{,}9073}\,Q^*_{10t} + \underset{(15{,}4186)}{46{,}1711}\,Q^*_{11t} + u^{(x)}_{ijt}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Model (11) przedstawia przestrzenno-czasowy trend trzeciego stopnia i sezonowość. Charakteryzuje się on istotnością większości parametrów. Stopień dopasowania modelu do rzeczywistości jest w tym wypadku niewielki (R^2=0,456623).

Analiza zmian trendowych i sezonowych w przestrzenno-czasowym procesie bezrobocia pozwoliła na dopasowanie modelu (12), który charakteryzuje się istotnością zdecydowanej większości parametrów oraz wysokim stopniem dopasowania do rzeczywistości (R^2 = 0,828638).

$$
\begin{aligned}
y_{ijt} = {} & \underset{(1{,}69643)}{39{,}4207} - \underset{(1{,}48827)}{9{,}3825}\,i - \underset{(1{,}48827)}{32{,}7187}\,j + \underset{(0{,}033527)}{0{,}485652}\,t + \underset{(0{,}577588)}{6{,}48565}\,i^2 \\
& - \underset{(0{,}577588)}{18{,}3333}\,j^2 + \underset{(0{,}0005)}{0{,}001957}\,t^2 - \underset{(0{,}32559)}{6{,}44723}\,ij - \underset{(0{,}0116741)}{0{,}0452969}\,it \\
& - \underset{(0{,}011674)}{0{,}091844}\,jt + \underset{(0{,}0446179)}{0{,}349141}\,i^2 j + \underset{(0{,}0018)}{0{,}00043}\,i^2 t + \underset{(0{,}044618)}{1{,}01326}\,ij^2 \\
& + \underset{(0{,}000006)}{0{,}000312}\,it^2 + \underset{(0{,}00144)}{0{,}00435}\,ijt - \underset{(0{,}074363)}{0{,}956293}\,i^3 - \underset{(0{,}074363)}{2{,}79388}\,j^3 \\
& - \underset{(0{,}000003)}{0{,}000002}\,t^3 - \underset{(0{,}0018)}{0{,}00153}\,j^2 t - \underset{(0{,}00006)}{0{,}0007}\,jt^2 + \underset{(0{,}166482)}{0{,}82513}\,Q^*_{1t} \\
& + \underset{(0{,}166128)}{0{,}895193}\,Q^*_{2t} + \underset{(0{,}165854)}{0{,}75089}\,Q^*_{3t} + \underset{(0{,}165653)}{0{,}316561}\,Q^*_{4t} - \underset{(0{,}16552)}{0{,}1647}\,Q^*_{5t} \\
& - \underset{(0{,}165458)}{0{,}334965}\,Q^*_{6t} - \underset{(0{,}165458)}{0{,}364415}\,Q^*_{7t} - \underset{(0{,}165522)}{0{,}443557}\,Q^*_{8t} \\
& - \underset{(0{,}165653)}{0{,}497265}\,Q^*_{9t} - \underset{(0{,}165854)}{0{,}610573}\,Q^*_{10t} - \underset{(0{,}166128)}{0{,}419296}\,Q^*_{11t} + u^{(y)}_{ijt}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

B. Badanie struktury autoregresyjnej

Celem analizy struktury autoregresyjnej badanych procesów była identyfikacja największych istotnych opóźnień czasowych i przesunięć przestrzennych. W zakresie opóźnień czasowych w obu procesach stwierdzono istotność opóźnień rzędu 12, natomiast w zakresie przesunięć przestrzennych, istotność przesunięć rzędu pierwszego, tzn. powiązania między „najbliższymi" sąsiadami. Oszacowano modele STAR(12, 1). Na przykład, dla wynagrodzeń otrzymano:

$$
\begin{aligned}
u^{(x)}_{i,t} = {} & \underset{(1{,}23748)}{0{,}353579} + \underset{(0{,}021151)}{0{,}118691}\,u^{(x)}_{i,t-1} + \underset{(0{,}021257)}{0{,}08124}\,u^{(x)}_{i,t-2} + \underset{(0{,}021357)}{0{,}00984}\,u^{(x)}_{i,t-3} \\
& + \underset{(0{,}021288)}{0{,}02756}\,u_{i,t-4}\; \underset{(0{,}0213116)}{0{,}046427}\,u^{(x)}_{i,t-5} + \underset{(0{,}021313)}{0{,}01471}\,u^{(x)}_{i,t-6} + \underset{(0{,}02133)}{0{,}0379}\,u^{(x)}_{i,t-7} \\
& - \underset{(0{,}021352)}{0{,}02156}\,u^{(x)}_{i,t-8} - \underset{(0{,}02137)}{0{,}03754}\,u^{(x)}_{i,t-9} + \underset{(0{,}02057)}{0{,}0206}\,u^{(x)}_{i,t-10} + \underset{(0{,}021428)}{0{,}07003}\,u^{(x)}_{i,t-11} \\
& + \underset{(0{,}02119)}{0{,}62846}\,u^{(x)}_{i,t-12} + \underset{(0{,}039737)}{0{,}16958}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-1} + \underset{(0{,}04105)}{0{,}03398}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-2} \\
& + \underset{(0{,}041366)}{0{,}0183}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-3} - \underset{(0{,}041299)}{0{,}00355}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-4} + \underset{(0{,}041)}{0{,}065}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-5} \\
& - \underset{(0{,}03361)}{0{,}01289}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-6} - \underset{(0{,}04123)}{0{,}0699}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-7} + \underset{(0{,}04135)}{0{,}0003}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-8} \\
& + \underset{(0{,}041488)}{0{,}02965}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-9} - \underset{(0{,}0416)}{0{,}0565}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-10} + \underset{(0{,}041372)}{0{,}0203}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-11} \\
& - \underset{(0{,}039317)}{0{,}28162}\,L^{(1)}u^{(x)}_{i,t-12} + e^{(x)}_{i,t}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Modele autoregresyjne odnoszące się zarówno do wynagrodzeń, jak i bezrobocia zawierały nieistotne składniki. Jednak na tym etapie analizy nie przeprowadzono redukcji. Redukcja nieistotnych składników została przeprowadzona dopiero w odniesieniu do „pełnego” modelu zgodnego.

C. Empiryczny model zgodny

Stosując procedurę opisaną w punkcie 4 niniejszego opracowania otrzymano model zgodny, opisujący zależności między wynagrodzeniami a bezrobociem. Model zredukowany do istotnych składników przyjął następującą postać:

$$
\begin{aligned}
y_{i,j,t} = {} & \underset{(0{,}605992)}{0{,}25759} + \underset{(0{,}32561)}{1{,}55534}\, i + \underset{(0{,}275879)}{0{,}384159}\, j + \underset{(0{,}011879)}{0{,}06988}\, t \\
& - \underset{(0{,}119399)}{0{,}5518}\, i^2 + \underset{(0{,}111278)}{0{,}072165}\, j^2 - \underset{(0{,}00012)}{0{,}0004}\, t^2 - \underset{(0{,}08458)}{0{,}3897}\, ij \\
& - \underset{(0{,}002265)}{0{,}00565}\, it - \underset{(0{,}002566)}{0{,}010899}\, jt + \underset{(0{,}00964)}{0{,}02997}\, i^2 j - \underset{(0{,}0003)}{0{,}00009}\, i^2 t \\
& + \underset{(0{,}010402)}{0{,}052743}\, ij^2 + \underset{(0{,}000014)}{0{,}00006}\, it^2 + \underset{(0{,}000247)}{0{,}00017}\, ijt + \underset{(0{,}014874)}{0{,}06462}\, i^3 \\
& - \underset{(0{,}015386)}{0{,}02951}\, j^3 - \underset{(0{,}000008)}{0{,}00003}\, t^3 + \underset{(0{,}000302)}{0{,}000316}\, j^2 t + \underset{(0{,}000017)}{0{,}0001}\, jt^2 \\
& + \underset{(0{,}042416)}{0{,}73533}\, Q^*_{1t} + \underset{(0{,}039101)}{0{,}20754}\, Q^*_{2t} - \underset{(0{,}0318657)}{0{,}02705}\, Q^*_{3t} - \underset{(0{,}03269)}{0{,}3872}\, Q^*_{4t} \\
& - \underset{(0{,}02984)}{0{,}44331}\, Q^*_{5t} - \underset{(0{,}030782)}{0{,}14771}\, Q^*_{6t} - \underset{(0{,}025848)}{0{,}07501}\, Q^*_{7t} - \underset{(0{,}02548)}{0{,}14575}\, Q^*_{8t} \\
& - \underset{(0{,}02756)}{0{,}0807}\, Q^*_{9t} - \underset{(0{,}038725)}{0{,}05377}\, Q^*_{10t} + \underset{(0{,}031767)}{0{,}06938}\, Q^*_{11} + \underset{(0{,}04451)}{1{,}0768}\, y_{i,j,t-1} \\
& - \underset{(0{,}04409)}{0{,}15001}\, y_{i,j,t-2} + \underset{(0{,}044276)}{0{,}19646}\, y_{i,j,t-11} - \underset{(0{,}04494)}{0{,}16087}\, y_{i,j,t-12} \\
& - \underset{(0{,}05018)}{0{,}17677}\, L^{(1)} y_{i,j,t-1} + \underset{(0{,}049885)}{0{,}14694}\, L^{(1)} y_{i,j,t-2} - \underset{(0{,}050076)}{0{,}21551}\, L^{(1)} y_{i,j,t-11} \\
& + \underset{(0{,}050608)}{0{,}13605}\, L^{(1)} y_{i,j,t-12} + \underset{(0{,}00008)}{0{,}0002}\, x_{i,j,t-4} + \underset{(0{,}000193)}{0{,}00083}\, L^{(1)} x_{i,j,t-1} \\
& - \underset{(0{,}000199)}{0{,}00087}\, L^{(1)} x_{i,j,t-10} + e_{i,j,t};
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$R^2 = 0{,}996568.$

Model (14) otrzymano z „pełnego” modelu zgodnego stosując metodę selekcji *a posteriori*. W modelu pozostał trend i sezonowość, stopa bezrobocia w danym województwie i województwach sąsiadujących z poprzedniego miesiąca, sprzed dwóch, jedenastu i dwunastu miesięcy oraz wynagrodzenia w danym województwie sprzed czterech miesięcy. Ponadto, na stopę bezrobocia w danym województwie istotny wpływ zdają się mieć wynagrodzenia z poprzedniego miesiąca i sprzed dziesięciu miesięcy w województwach sąsiadujących. Model (14) nie zawiera bieżących wynagrodzeń.

Należy zauważyć, iż bieżące wynagrodzenia znalazłyby się w modelu stopy bezrobocia, gdyby w modelu zależności między rozważanymi procesami nie uwzględniono struktury trendowo-sezonowo-autoregresyjnej. Model przyjąłby wówczas następującą postać:

$$y_{i,j,t} = \underset{(0{,}812304)}{25{,}846} - \underset{(0{,}0004745)}{0{,}004773}\, x_{i,j,t} + u_{i,j,t} \tag{15}$$

i charakteryzowałby się autozależnościami w resztach oraz bardzo niskim stopniem dopasowania do rzeczywistości (R^2 = 0,0618769).

Również uwzględnienie jedynie struktury trendowo-sezonowej badanych procesów powoduje, że w modelu stopy bezrobocia wśród składników objaśniających pozostają bieżące wynagrodzenia w sektorze przedsiębiorstw. W tym wypadku oszacowany model jest następujący:

$$\begin{aligned} y_{i,j,t} = {} & \underset{(1{,}69264)}{40{,}9441} - \underset{(1{,}47611)}{8{,}51411}\, i - \underset{(1{,}48213)}{31{,}5114}\, j + \underset{(0{,}0331213)}{0{,}491762}\, t \\ & + \underset{(0{,}586871)}{5{,}61938}\, i^2 + \underset{(0{,}593534)}{17{,}3016}\, j^2 - \underset{(0{,}000498)}{0{,}002108}\, t^2 - \underset{(0{,}3573)}{5{,}4682}\, ij \\ & - \underset{(0{,}011528)}{0{,}04511}\, it - \underset{(0{,}011531)}{0{,}09015}\, jt + \underset{(0{,}049064)}{0{,}213544}\, i^2 j + \underset{(0{,}00178)}{0{,}0004}\, i^2 t \\ & + \underset{(0{,}045447)}{0{,}94325}\, ij^2 + \underset{(0{,}000064)}{0{,}00032}\, it^2 + \underset{(0{,}001423)}{0{,}00404}\, ijt - \underset{(0{,}07754)}{0{,}7999}\, i^3 \\ & - \underset{(0{,}0779)}{2{,}6299}\, j^3 - \underset{(0{,}000003)}{0{,}00002}\, t^3 + \underset{(0{,}001777)}{0{,}00143}\, j^2 t + \underset{(0{,}00006)}{0{,}00067}\, jt^2 \\ & + \underset{(0{,}165277)}{0{,}71807}\, Q^*_{1t} + \underset{(0{,}165025)}{0{,}78243}\, Q^*_{2t} + \underset{(0{,}163786)}{0{,}76264}\, Q^*_{3t} \\ & + \underset{(0{,}163589)}{0{,}30425}\, Q^*_{4t} - \underset{(0{,}163886)}{0{,}23988}\, Q^*_{5t} - \underset{(0{,}163419)}{0{,}356201}\, Q^*_{6t} \\ & - \underset{(0{,}16339)}{0{,}35582}\, Q^*_{7t} - \underset{(0{,}163451)}{0{,}44961}\, Q^*_{8t} - \underset{(0{,}163583)}{0{,}505742}\, Q^*_{9t} \\ & - \underset{(0{,}163802)}{0{,}62936}\, Q^*_{10t} - \underset{(0{,}164534)}{0{,}33977}\, Q^*_{11t} - \underset{(0{,}0002743)}{0{,}001723}\, x_{i,j,t} + u_{i,j,t}. \end{aligned} \tag{16}$$

Współczynnik R^2 dla modelu (16) wynosi 0,833018. Reszty wykazują autokorelację przestrzenną i przestrzenno-czasową.

W różnych modelach przy bieżących wynagrodzeniach otrzymuje się różne parametry nie tylko co do istotności, ale także co do wartości. Ponadto, parametry wpływu wynagrodzeń na bezrobocie w różnych odstępach czasu różnią się co do istotności, wartości i znaku. Fakt ten należy wiązać m.in. z oddziaływaniem wynagrodzeń, z jednej strony na popyt na siłę roboczą, z drugiej zaś na aktywność zawodową. Wydaje się, że wpływy te mogą przejawiać się z różną siłą w różnym czasie.

Wracając do modelu (14), dokonano analizy procesu resztowego. Model STAR (1, 1) przyjął następującą postać:

$$\hat{e}_{i,j,t} = -\underset{(0{,}00798)}{0{,}00192} + \underset{(0{,}048389)}{0{,}02395}\, e_{i,j,t-1} - \underset{(0{,}0549243)}{0{,}059552}\, L^{(1)} e_{i,j,t-1}. \tag{17}$$

Nieistotność parametrów modelu (17) świadczy o braku czasowej i przestrzenno-czasowej autokorelacji rzędu pierwszego.

Rozważano również modele STAR wyższych rzędów w wymiarze *t*. Nie stwierdzono istotnych parametrów w tych modelach.

6. Podsumowanie

Uwzględnienie wewnętrznej struktury procesów przestrzenno-czasowych jest ważnym elementem modelowania zależności między tymi procesami. Otrzymuje się model zgodny, który charakteryzuje się odpowiednimi własnościami reszt, wysokim stopniem dopasowania do rzeczywistości oraz interpretowalnością parametrów.

W prezentowanej analizie przyjęto założenia upraszczające. W zakresie struktury autoregresyjnej badanych procesów w wymiarze przestrzennym, uwagę ograniczono do autozależnosci pierwszego rzędu, co oznacza, że identyfikowano jedynie tzw. „najbliższych" sąsiadów. W modelach nie uwzględniano tzw. autozależności czysto przestrzennych. Do kwestii tych należy wrócić w kolejnych badaniach.

Literatura

Cressie, N. A. (1993), *Statistics for Spatial Data*, John Wiley & Sons, New York.

Giacomini, R., Clive, C. W. J., Granger, W. J. (2004), Aggregation of Space-Time Processes, *Journal of Econometrics*, 118/1–2, 7–26.

Hopper, P. M., Hewings, G. J. D. (1981), Some Properties of Space-Time Processes, *Geographical Analysis*, 13, 202–223.

Szulc, E. (1998), On Conformable Econometric Modelling of Space-Time Series, w: Zieliński, Z. (red.), *Dynamic Econometric Models*, 3, UMK, Toruń, 153–166.

Szulc, E. (2003), Identyfikacja odstępów czasowych realizacji zależności w przestrzenno-czasowych modelach ekonometrycznych, w: Zeliaś, A. (red.), *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, AE, Kraków, 357–366.