DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Mateusz Pipień
Akademia Ekonomiczna w Krakowie

Wykorzystanie warunkowej asymetrii w badaniu zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a poziomem ryzyka. Bayesowska analiza dla indeksu WIG

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest zastosowanie wnioskowania bayesowskiego w badaniu relacji pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a poziomem ryzyka na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Na podstawie międzyokresowego modelu CAPM (ang. Intertemporal-CAPM), zaproponowanego przez Mertona (1973), zbudowano ogólny model próbkowy, w którym możliwe jest testowanie omawianej relacji. W rozważanym modelu statystycznym jednym ze źródeł zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka jest asymetria rozkładu warunkowego stóp zmian. Propozycja ta wykorzystuje koncepcję GARCH-In-Mean Osiewalskiego i Pipienia (2000) oraz dostarcza formalnej, ekonomicznej interpretacji skośności występującej w modelu próbkowym.

W artykule rozważamy wiele konkurencyjnych specyfikacji dopuszczających warunkową asymetrię. W szczególności zastosowano mechanizm ukrytego ucięcia, alternatywne skalowania wokół modalnej, transformacje rozkładem Beta, gęstości Bersteina oraz podejście konstruktywne.

Na podstawie danych dotyczących notowań indeksu WIG dokonujemy analizy wpływu wprowadzenia do modelu warunkowej asymetrii stóp zmian na postulowaną relację pomiędzy oczekiwaną stopą zmian a poziomem ryzyka. Prezentowane są też dodatkowo wyniki bayesowskiego porównania modeli oraz dyskusja nad źródłami różnic w mocy wyjaśniającej rozważanych specyfikacji.

2. Wprowadzenie asymetrii do rozkładu prawdopodobieństwa

W pracy rozważamy ogólne podejście do narzucenia skośności na gęstość symetrycznego jednowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, które wykorzystuje transformację dystrybuanty. Rodzina zmiennych losowych $IP=\{\varepsilon_s, \varepsilon_s:\Omega\rightarrow R\}$, o gęstości $s(.|\theta,\eta_p)$ jest nazywana uskośnieniem rodziny I (zmiennych losowych o symetrycznych jednomodalnych gęstościach $f(.|\theta)$ i dystrybuantach $F(.|\theta)$, takich, że wartość modalna jest osiągana dla $x=0$) jeśli s jest zadane przez iloczyn:

$$s(x\,|\theta,\eta_p)=f(x|\theta)\cdot p(F(x|\theta)\,|\eta_p),\ \text{for}\ x\in R, \tag{1}$$

gdzie $p(.|\eta_p)$ to gęstość rozkładu prawdopodobieństwa określona na (0,1). Zgodnie z (1) asymetryczną gęstość $s(.|\theta,\eta_p)$ uzyskujemy z $f(.|\theta)$ przez zastosowanie $p(.|\eta_p)$ jako funkcji wagowej. Jeśli $p(.|\eta_p)$ jest gęstością rozkładu jednostajnego, to $s=f$. W ramach (1) możliwe jest zarówno wprowadzenie skośności poprzez definicję odpowiedniej rodziny rozkładów $p(.|\eta_p)$, jak również rozważenie już istniejących rodzin gęstości dopuszczających asymetrię. Tabela 1 prezentuje przegląd mechanizmów uskośnienia stosowanych w części empirycznej. W każdym z rozważanych rozkładów $p(.|\eta_p)$ jest możliwe przywrócenie symetrii (w sensie równości s i f) poprzez odpowiednią restrykcję narzuconą na parametr η_p.

3. Konkurencyjne modele GARCH-In-Mean

Oznaczmy przez x_j wartość akcji lub indeksu giełdowego w dniu j. Przedmiotem naszego zainteresowania jest różnica pomiędzy logarytmiczną dzienną stopą zmian $r_j=100\ln[x_j/x_{j-1}]$ oraz stopą zwrotu z inwestycji wolnej od ryzyka r_j^f. Różnicę tą, nazywaną w literaturze angielskiej *excess return*, oznaczamy przez $y_j=r_j-r_j^f$. Testowanie zależności pomiędzy zwrotem a ryzykiem odbywać się może w ramach międzyokresowego modelu CAPM (ang. Intertemporal Capital Asset Pricing Model), który zaproponował Merton (1973). Zgodnie z założeniami teorii Mertona oczekiwana stopa zwrotu y_j jest proporcjonalna do odchylenia standardowego (warunkowo względem zbioru informacji, oznaczanego przez ψ_{j-1}):

$$E(y_j|\psi_{j-1})=\alpha^* D(y_j|\psi_{j-1}). \tag{2}$$

Współczynnik α^* w (2) mierzy względną awersję inwestora do ryzyka i powinien mieć znak dodatni. Za pracami Engle, Lilien i Robins (1987), French, Schwert i Stambaugh (1987) oraz Osiewalski i Pipień (2000) rozważamy dla y_j prostą wersję modelu GARCH-In-Mean:

$$y_j=[\alpha+E(z_j)]\,h_j^{0.5}+u_j,\ j=1,2,....\ , \tag{3}$$

gdzie $u_j=[z_j-E(z_j)]h_j^{0.5}$, zaś z_j to ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, dla których $E(z_j)<+\infty$. Czynnik skalujący h_j jest zadany przez równanie GARCH(1,1); por. Bollerslev (1986):

$$h_j=\alpha_0+\alpha_1 u_{j-1}^2+\beta_1 h_{j-1}.$$

Typ rozkładu warunkowego stóp zmian y_j jest ściśle zależny od rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych z_j. Jako punkt wyjścia, w modelu oznaczanym przez M_0, zakładamy, iż z_j jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie t-Studenta z liczbą stopni swobody $\nu>1$, o zerowej modalnej i jednostkowej odwrotności precyzji:

$$z_j|M_0 \sim \text{ii}St(0,1,\nu),\ \nu>1.$$

Gęstość zmiennej z_j w M_0 oznaczamy jako $f_t(z|0,1,\nu)$. W ramach modelu M_0, $E(z_j)=0$ oraz $u_j=z_j h_j^{0.5}$, stąd (3) redukuje się do prostszej postaci $y_j=\alpha\, h_j^{0.5}+u_j$. Oznaczmy przez $\theta=(\alpha,\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\nu)$ wektor wszystkich parametrów w modelu M_0. Rozkład warunkowy (względem przeszłości ψ_{j-1}) składnika losowego u_j jest w M_0 rozkładem t-Studenta o liczbie stopni swobody $\nu>1$, zerowej modalnej oraz odwrotności precyzji h_j:

$$p(u_j|\psi_{j-1},\theta, M_0)=h_j^{-0.5} f_t(h_j^{-0.5}\, u_j|0,1,\nu), j=1,2,\dots\ .$$

W konsekwencji rozkład warunkowy stóp zmian y_j w chwili j ma postać:

$$p(y_j\,|\psi_{j-1},\theta, M_0)=h_j^{-0.5} f_t(h_j^{-0.5}\cdot(y_j-\alpha h_j^{0.5})|0,1,\nu), j=1,2,\dots\ .$$

W ramach modelu M_0 oczekiwana stopa zmian y_j jest proporcjonalna do pierwiastka z odwrotności precyzji h_j:

$$E(y_j\,|\psi_{j-1},\theta, M_0)=\alpha\, h_j^{0.5}. \tag{4}$$

Zatem parametr $\alpha\in R$ mierzy zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu (skorygowaną o zwrot z inwestycji wolnej od ryzyka) $E(y_j|\psi_{j-1},M_0,\theta)$ a zmiennością (mierzoną przez $h_j^{0.5}$), która wyraża bieżący poziom ryzyka.

W celu skonstruowania zbioru konkurencyjnych specyfikacji GARCH-In-Mean $\{M_i,\ i=1,\dots,k\}$ narzucamy asymetrię na rozkład warunkowy $p(y_j|\psi_{j-1},\theta,M_0)$. Skośny rozkład warunkowy dla y_j uzyskujemy poprzez uskośnienie rozkładu zmiennej z_j, zgodnie z metodami, których przegląd zawarto w Tabeli 1. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa z_j ma, zgodnie z (1), następującą ogólną postać:

$$p(z\,|M_i)=f_t(z|0,1,\nu)\cdot p[F_t(z)\,|\eta_i,M_i],\ z\in R,\ i=1,2,\dots,k,$$

gdzie $p(.|\eta_i,M_i)$ definiuje mechanizm uskośnienia parametryzowany przez wektor η_i, zaś $F_t(.)$ to dystrybuanta rozkładu t-Studenta o $\nu>1$ stopniach swobody, zerowej modalnej i jednostkowej precyzji. W konsekwencji uzyskujemy ogólną postać na rozkład warunkowy składnika losowego u_j w modelu M_i:

$$p(u_j|\psi_{j-1},\theta,\eta_i,M_i)=h_j^{-0.5} f_t(h_j^{-0.5}u_j|0,1,\nu)\cdot p(F_t(h_j^{-0.5}u_j)\,|\eta_i,M_i), j=1,2,\dots,$$

oraz gęstość rozkadu warunkowego stopu zwrotu y_j:

$$p(y_j\,|\,\psi_{j\text{-}1},\theta,\eta_i,M_i)=h_j^{-0.5}\cdot f_t(h_j^{-0.5}(y_j-\mu_j)|0,1,\nu)\cdot p[F_t(h_j^{-0.5}(y_j-\mu_j))|\,\eta_i,M_i],\ j=1,\ldots \quad (5)$$

gdzie $\mu_j=[\alpha+E(z_j)]h_j^{0.5}$. W modelu M_1, rozważamy GARCH z warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta zaproponowanym przez Fernández i Steela (1998). W mechanizmie uskośnienia $p[.|\eta_1,M_1]$ $\eta_1=\gamma_1>0$, oraz $\gamma_1=1$ redukuje M_1 do M_0. Model M_2 uzyskujemy poprzez narzucenie mechanizmu uskośnienia ukrytego ucięcia. W tym przypadku $\eta_2=\gamma_2\in R$, oraz $\gamma_2=0$ definiuje warunkową symetrię. W modelu M_3 stosujemy transformację rozkładem Beta z jednym swobodnym parametrem; $\eta_3=\gamma_3>0$, oraz $\gamma_3=1$ wyznacza warunkową symetrię. Specyfikacja M_4 bazuje na transformacji rozkładem Beta z dwoma swobodnymi parametrami. W mechanizmie $p[.|\eta_4,M_4]$, $\eta_4=(a,b)$, zaś $a=b=1$ redukuje M_4 do M_0. W M_5 stosujemy transformację rozkładem Bernsteina z $m=2$ swobodnymi parametrami. W $p[.|\eta_5,M_5]$ $\eta_5=(w_1,w_2)$ oraz $w_1=w_2=1/3$ przywraca symetrię rozkładu warunkowego y_j. W modelu M_6 stosujemy konstrukcję Ferreiry i Steela (2006). W mechanizmie uskośnienia $p[.|\eta_6,M_6]$ $\eta_6=\gamma_4\in R$ oraz $\gamma_4=0$ definiuje warunkową symetrię. W Tabeli 1 zawarto dodatkowo mechanizm uskośnienia możliwy do wydobycia z gęstości rozkładu skośnego t-Studenta zaproponowanego przez Hansena (1994). Można jednak udowodnić, iż propozycja Hansena (1994) jest równoważna z uskośnieniem stosowanym w modelu M_1. Stąd pomijamy ten przypadek jako równoważny z M_1 (z dokładnością reparametryzacji).

Wszystkie sformułowane specyfikacje modelowe zakładają, iż rozkład warunkowy stóp zmian y_j jest heteroskedastyczny, gdzie zmienna w czasie miara zmienności h_j jest określona równaniem GARCH(1,1). Liczba stopni swobody $\nu>1$ umożliwia modelowanie grubych ogonów rozkładu $p(y_j|\psi_{j\text{-}1},\theta,\eta_i,M_i)$, jak również testowanie warunkowej normalności. Narzucenie mechanizmu uskośnienia umożliwia modelowanie jak i wskazanie źródeł warunkowej asymetrii. Asymetria rozkładu z_j w M_i powoduje, iż $E(z_j)\neq 0$. A zatem zgodnie z (3) warunkowa wartość oczekiwana stopy zmian y_j przyjmuje postać:

$$E(y_j\,|\,\psi_{j\text{-}1},\theta,\eta_i,M_i)=[\alpha+E(z_j)]h_j^{0.5},\ \text{dla } E(z_j)\neq 0. \quad (6)$$

Stąd w każdym z modeli M_i warunkowa skośność rozkładu y_j może być interpretowana jako dodatkowe źródło zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka. Takie podejście w pełni wykorzystuje sugestię zawartą w pracy Harvey i Siddique (2000), że skośność rozkładów finansowych szeregów czasowych jest wszechobecna, ponieważ determinuje premię za ryzyko.

Oznaczmy przez $y^{(t)}=(y_1,...,y_t)\in Y$ wektor zaobserwowanych do dnia t stóp zmian rozważanego aktywu finansowego, zaś przez $y_f^{(t)}=(y_{t+1},...,y_{t+n})\in Y_f$ wektor stóp zmian podlegających prognozie. Następujący iloczyn prezentuje ogólną formułę na i-ty model próbkowy:

$$p(y^{(t)},y_f^{(t)}\,|\,\theta,\eta_i,M_i)=\prod_{j=1}^{t+n}p(y_j\,|\,\psi_{j-1},\theta,\eta_i,M_i),\ i=1,2,3,4,5,6.$$

Model Bayesowski, zdefiniowany łączną gęstość wektora obserwacji i parametrów modelu (θ,η_i) przyjmuje postać:

$$p(y^{(t)}, y_f^{(t)},\theta,\eta_i\,|M_i)=p(y^{(t)}, y_f^{(t)}|\,\theta,\eta_i,M_i)\cdot p(\theta,\eta_i\,|M_i) \qquad (7)$$

i wymaga specyfikacji rozkładu a priori $p(\theta,\eta_i\,|M_i)$ w każdym z modeli M_i. Ogólnie zakładamy następującą niezależność a priori pomiędzy parametrami wspólnymi θ a parametrami swoistymi modelu M_i, czyli η_i:

$$p(\theta,\eta_i\,|M_i)=p(\theta|M_i)\cdot p(\eta_i|M_i),\ i=1,2,3,4,5,6. \qquad (8)$$

Dodatkowo przyjmujemy, iż:

$$p(\theta|M_i)=p(\theta)=p(\alpha)p(\alpha_0)p(\alpha_1)p(\beta_1)p(\nu),$$

gdzie $p(\alpha)$ jest gęstością rozkładu normalnego o zerowej średniej i wariancji 10, $p(\alpha_0)$ wyznacza rozkład wykładniczy o średniej 1, $p(\alpha_1)$ oraz $p(\beta_1)$ to gęstości rozkładów jednostajnych określonych na przedziale (0,1), oraz $p(\nu)$ definiuje rozkład wykładniczy o średniej 10.

Rozkłady a priori $p(\eta_i|M_i)$ określają w każdym z modeli wstępną wiedzę o możliwym nasileniu efektu warunkowej asymetrii gęstości $p(y_j|\psi_{j\text{-}1},\theta,\eta_i,M_i)$. Celem naszym badań było narzucenie słabej i porównywalnej informacji a priori o tym fenomenie, niezależnie od rozważanego modelu. Stosując miernik skośności zaproponowany przez Arnolda i Groenvelda (1995) dokonano doboru konkretnych rozkładów $p(\eta_i|M_i)$ przyjmując a priori, iż równe szanse (w sensie mediany a priori) ma zarówno lewostronna jak i prawostronna asymetria $p(y_j|\psi_{j\text{-}1},\theta,\eta_i,M_i)$. Szczegółową procedurę doboru, jak i analizę porównawczą, rozkładów a priori opisano w pracy Pipień (2006).

4. Wyniki empiryczne

Prezentowane wyniki empiryczne analizy bayesowskiej wpływu warunkowej asymetrii na relację pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka dotyczą Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Szereg skorygowanych stóp zwrotu y_j skonstruowano na bazie dziennych stóp zmian indeksu WIG w dniach 06.01.1998 do 31.07.2006; T=2144 obserwacji. Jako aproksymację krótkoterminowej stopy procentowej r_j^f przyjęto oprocentowanie lokat międzybankowych z rynku WIBOR; instrument WIBORo/n. W badaniach wykorzystano także inne przybliżenia stopy r_j^f, łącznie z przypadkiem r_j^f=0, jednak wyniki pozostały praktycznie niewrażliwe na korektę stopy zmian indeksu WIG.

Tabela 1 zawiera najważniejsze rezultaty empiryczne. Prezentujemy logarytmy dziesiętne wartości brzegowej gęstości wektora obserwacji w każdym modeli, prawdopodobieństwa a posteriori konkurencyjnych specyfikacji oraz wyniki analizy a posteriori wpływu narzucenia mechanizmu uskośnienia na zależność pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka.

Model M_0, w którym nie zapewniamy możliwości warunkowej asymetrii rozkładu warunkowego dla y_j, uzyskał nieco więcej niż 8% masy prawdopodobieństwa a posteriori. Pozostałe 0.92 jest rozproszone w ramach modeli z narzuconym na rozkład warunkowy mechanizmem uskośnienia. Klasa specyfikacji M_i, i=1,2,3,4,5,6 została wyraźnie podzielona na dwa zbiory ze względu na wartość prawdopodobieństwa $P(M_i|y^{(t)})$. Modele z mechanizmem uskośnienia zaproponowanym przez Fernández i Steela (1998), Ferreirę i Steela (2006) oraz wykorzystującym transformację rozkładem Bernsteina (a więc M_1, M_5 i M_6) zyskują niskie wartości prawdopodobieństwa a posteriori, co świadczy o ich słabej względnej (a więc na tle całej klasy modeli) mocy wyjaśniającej. Relatywnie wysoką wartość $P(M_i|y^{(t)})$ uzyskuje mechanizm ukrytego ucięcia oraz obydwie wersje transformacji rozkładem Beta. Modele M_2, M_3 i M_4 kumulują bowiem ponad 90% masy prawdopodobieństwa a posteriori. Najwyższą wartość prawdopodobieństwa $P(M_i|y^{(t)})$ obserwujemy dla modelu M_4, który zbudowano na podstawie transformacji rozkładem Beta z dwoma swobodnymi parametrami. Narzucony typ skośności w gęstości $p(y_j|\psi_{j-1},\theta,\eta_4,M_4)$ okazał się najbardziej wrażliwy na informację o tym fenomenie, która jest zawarta w rozważanym szeregu czasowym.

W dalszej kolejności dokonano porównania wpływu warunkowej asymetrii na siłę zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka w przypadku rozważanego szeregu czasowego WIG. Zgodnie z (3) zależność ta jest określana w każdym z modeli przez funkcję parametrów $\alpha+E(z_j)$. W Tabeli 1 zamieszczono wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (kursywą) tej wielkości, jak również prawdopodobieństwa a posteriori dodatniego znaku $\alpha+E(z_j)$ uzyskane w ramach każdej specyfikacji.

W modelu M_0, w którym postulujemy symetrię gęstości rozkładu warunkowej y_j (a więc $E(z_j)=0$) prawdopodobieństwo $P(\alpha+E(z_j)>0|M_0,y^{(t)})$ nieznacznie przekracza 0.91. Z jednej strony potwierdza to hipotezę Mertona o dodatniej premii za ryzyko, jednak 8% prawdopodobieństwa a posteriori przeciwnego znaku zostawia dużo niepewności co do prawdziwej siły zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka. Wprowadzenie asymetrii do rozkładu warunkowego y_j w większości modeli okazało się trafne. Obserwujemy wyraźnie wyższe wartości prawdopodobieństwa a posteriori dodatniego znaku $\alpha+E(z_j)$ dla modeli z narzuconym mechanizmem ukrytego ucięcia oraz z transformacją rozkładami Beta lub Bernsteina. Dla specyfikacji M_1 i M_6, które były odrzucane w świetle danych (miały bardzo niskie wartości $P(M_i|y^{(t)})$) obserwujemy zaś brak wpływu efektu warunkowej asymetrii na siłę badanej zależności. W ramach M_1 i M_2 prawdopodobieństwo a posteriori dodatniej premii za ryzyko nieznacznie przekracza 0.90, podobnie jak w przypadku M_0. Dla najlepszego modelu (M_4), który uzyskał wartość prawdopodobieństwa $P(M_i|y^{(t)})$ około 0.40, otrzymano bardzo silne potwierdzenie dodatniego znaku $\alpha+E(z_j)$. W przypadku M_4 prawdopodobieństwo $P(\alpha+E(z_j)>0|M_i,y^{(t)})$ jest bowiem większe od 0.99. Mechanizm uskośnienia oparty na transformacji rozkładem Beta z dwoma swobodnymi parametrami właściwie opisując efekt warunkowej asymetrii rozkładu stóp zmian y_j wzmacnia postulowaną zależność i czyni ją zdecydowanie prawdziwą w świetle danych. Silne potwierdzenie teorii Mertona o dodatniej premii za ryzyko otrzymujemy także narzucając mechanizm ukrytego ucięcia (model M_2) oraz stosując transformację rozkładem Bernsteina. Tak silny rozdział pomiędzy mechanizmami uskośnienia, które nie dostarczają źródła zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem i poziomem ryzyka (modele M_1 i M_6), a mechanizmami wrażliwymi na ten typ zależności tłumaczy wyniki Bayesowskiego porównania modeli w oparciu o prawdopodobieństwa a posteriori. Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, iż wysoką wartość prawdopodobieństwa $P(M_i|y^{(t)})$ uzyskały modele, które były w stanie w sposób istotny wzmocnić siłę postulowanej relacji. Pozostałe modele były odrzucane w świetle rozważanego szeregu czasowego.

Literatura

Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics* 12, 171–178.

Bollerslev, T. (1986), Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307–327.

Engle, R.F., Lilien, D.M., Robins R.P. (1987), Estimating Time-varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model, *Econometrica* 55, 391–408.

Fernández, C., Steel, M.F.J. (1998), On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness, *Journal of the American Statistical Association* 93, 359–371.

Ferreira, J.T.A.S, Steel, M.F.J. (2006), A Constructive Representation of Univariate Skewed Distributions, *Journal of the American Statistical Association* 101, 823–839.

French, K.R., Schwert, G.W., Stambaugh, R.F. (1987), Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics* 19, 3–29

Hansen, B.E. (1994), Autoregressive Conditional Density Estimation, *International Economic Review* 35, 705–730.

Harvey, C.R., Siddique, A. (2000), Conditional Skewness in Asset Pricing Models, *Journal of Finance* 55, 1263–1295.

Jones, M.C. (2004), Families of Distributions Arising from Distributions of Order Statistics, *Test* 13, 1–43.

Jones, M.C., Faddy, M.J. (2003), A Skew Extension of the *t*-Distribution, with Applications, *Journal of Royal Statistical Association* B 65, 159–174.

Merton, R.C. (1973), An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 41, 867–887.

Osiewalski, J., Pipień, M., (2000), GARCH-In-Mean through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates, *26-th International Conference MACROMODELS'99*, ed. Welfe W., Wdowiński P., Łódź , 354–369.

Pipień, M. (2006), Bayesian Comparison of GARCH Processes with Skewness Mechanism in Conditional Distributions, *Acta Physica Polonica* B 11, 3105–3121.

Tabela 1. Zestawienie konkurencyjnych mechanizmów uskośnienia

<table>
<tr>
<td>Ukryte ucięcie
Azzalini (1985)
$\gamma_2 \in \mathrm{R}$
$p(y|\gamma_2)=2\cdot F(\gamma_2\cdot F^{-1}(y)|\theta)$
symetria: $\gamma_2=0$</td>
<td>Rozkład Beta I
Jones (2004)
$\gamma_3>0$
$p(y|\gamma_3)=Be(y|\gamma_3,\gamma_3^{-1})$
symetria: $\gamma_3=1$</td>
<td colspan="2">Rozkład Beta II
Jones, Faddy (2003)
$a>0, b>0$
$p(y|a,b)=Be(y|a,b$
symetria: $a=b=1$</td>
<td>Bernstein
(2 parametry)
$p(y|w_1,w_2)=w_1$ $Be(y|1,3)+$ $+w_2$ $Be(y|2,2)+(1-w_1-w_2)$ $Be(y|3,1)$
symetria: $w_i=1/3$, $i=1,2,3$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ferreira, Steel (2006)
$p(y|\gamma_4)=1+l(\gamma_4)[g(y|\gamma_4)-1]$
symetria: $\gamma_4=0$</td>
<td colspan="2">Fernández, Steel (1998)
$p(y|\gamma_1)= \frac{2}{\gamma_1+\gamma_1^{-1}}\cdot \frac{f(\gamma_1\cdot F^{-1}(y)I_{(0;0.5)}(y)+f(\gamma_1^{-1}\cdot F^{-1}(y)I_{(0.5;1)}(y)}{f(F^{-1}(y))}$
symetria: $\gamma_1=1$</td>
<td colspan="2">Hansen (1994)
$p(y|\gamma_5)= \frac{f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1-\gamma_5}\right)I_{(0;0.5)}(y)+f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1+\gamma_5}\right)I_{[0.5;1)}(y)}{f(F^{-1}(y))}$
symetria: $\gamma_5=0$</td>
</tr>
</table>

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Logarytmy dziesiętne brzegowych gęstości wektora obserwacji, prawdopodobieństwa a posteriori konkurencyjnych specyfikacji oraz analiza wpływu założenia warunkowej asymetrii na zależność pomiędzy zwrotem a ryzykiem

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_0
$\log p(y^{(t)}\|M_i)$	-1559.5	-1558.5	-1558.8	-1558.4	-1560.8	-1560.1	-1559.1
$P(M_i\|y^{(t)})$, $i=0,...,6$	0.0338	0.3015	0.1582	0.3709	0.0014	0.0076	0.0830
$P(M_i\|y^{(t)})$, $i=1,...,6$	0.0369	0.3288	0.1725	0.4045	0.0016	0.0083	x
$\alpha+E(z_j)$	0.0469 *0.0349*	0.2567 *0.1162*	0.1440 *0.0912*	0.2148 *0.0852*	0.2085 *0.0933*	0.0489 *0.0338*	0.0483 *0.0337*
$P(\alpha+E(z_j)>0\|M_i,y^{(t)})$	0.9102	0.9894	0.9528	0.9972	0.9893	0.9230	0.9201
$P(\alpha+E(z_j)>0\|y^{(t)})$				0.9777			

Źródło: obliczenia własne.