Akademia Ekonomiczna
im. Oskara Langego we Wrocławiu
Wydział Zarządzania i Informatyki
Katedra Inwestycji Finansowych i Zarządzania Ryzykiem

Krzysztof Piontek

Weryfikacja modeli Blacka-Scholesa oraz AR-GARCH dla opcji na WIG20

1. Model Blacka-Scholesa, Mertona
2. Model wyceny GARCH
3. Własności modelu wyceny GARCH
4. Przykład empiryczny

Model Mertona, uogólnienie modelu Blacka-Scholesa

$$c = Se^{-qT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$
$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1)$$

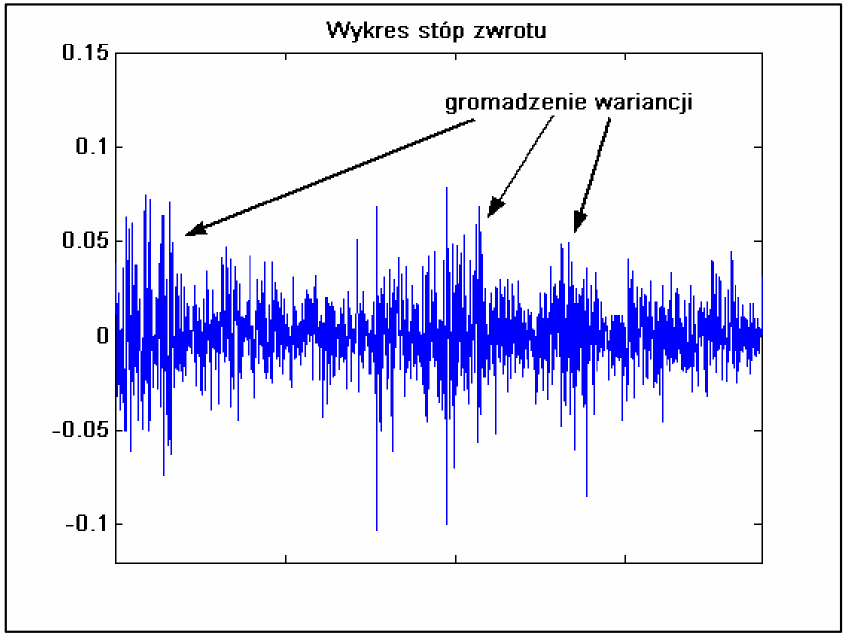
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

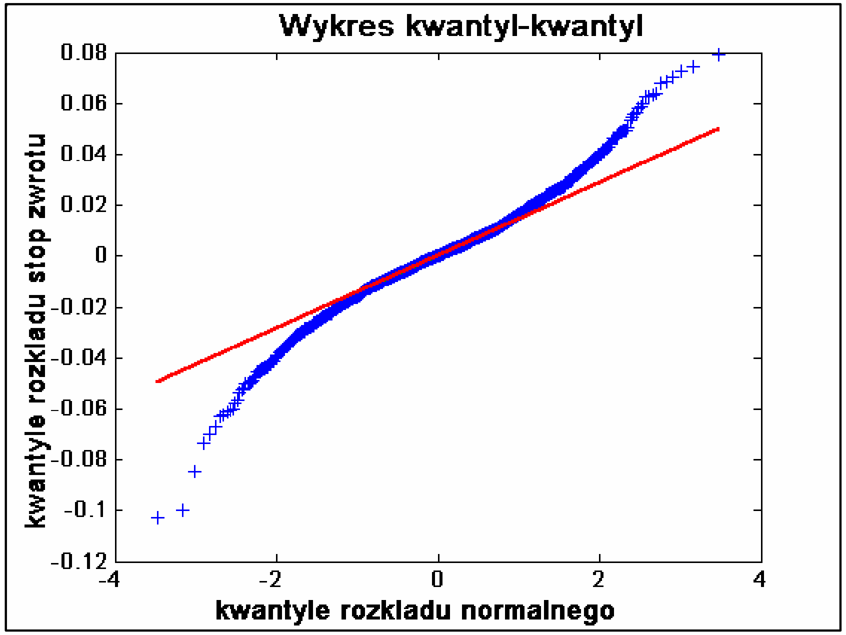
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

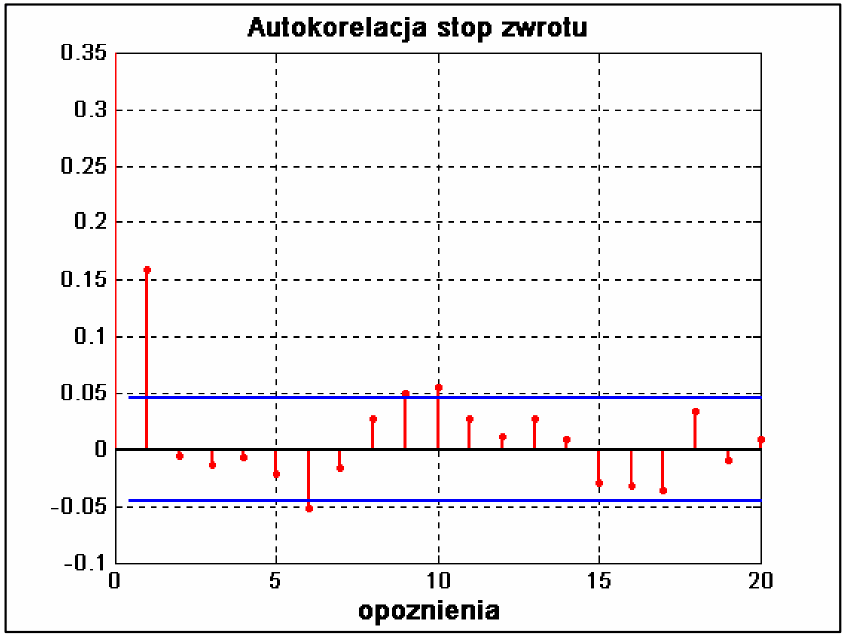
-Nierealistyczne założenie, że stopy zwrotu mają rozkład normalny i zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, którego parametry są stałe.

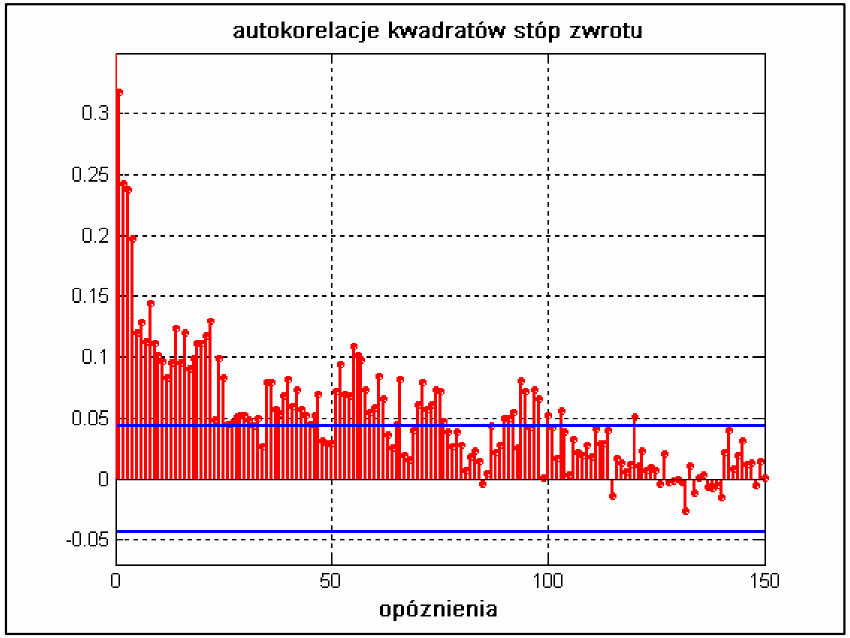
-Nie obserwuje się niezależności zmienności implikowanej od terminu do wygaśnięcia opcji (struktury czasowe zmienności) oraz od współczynnika *moneyness* (tzw. „uśmiech zmienności implikowanej”).

$$moneyness = \frac{S_t}{Xe^{-rT}}$$


Wykres stóp zwrotu
gromadzenie wariancji


Wykres kwantyl-kwantyl
kwantyle rozkladu stop zwrotu
kwantyle rozkladu normalnego


Autokorelacja stop zwrotu
opoznienia


autokorelacje kwadratów stóp zwrotu
opóznienia

Model szeregu prostych stóp zwrotu w czasie dyskretnym:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t$$

gdzie:

$\boldsymbol{X_t}$ - cena w chwili *t*,
$\boldsymbol{\mu_t}$ - warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu w chwili *t*,
$\boldsymbol{h_t}$ - warunkowa wariancja stopy zwrotu w chwili t,
$\boldsymbol{z_t}$ - niezależne reszty modelu o zerowej średniej i jednostkowej wariancji

- warunkowa wartość oczekiwana

$$\mu_t = E\left[y_t \middle| \Im_{t-1} \right]$$

$$\boxed{\mu_t = \mu + \phi_1 y_{t-1}}$$

- warunkowa wariancja

$$h_t = \mathrm{Var}\left[\varepsilon_\mathrm{t} \middle| \Im_{t-1} \right]$$

$$I_{(p)} = \begin{cases} 1;\ \text{gdy } p = \text{prawda} \\ 0;\ \text{gdy } p = \text{fałsz} \end{cases}$$

$$\boxed{h_t = \omega + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_1^- I_{(z_{t-1}<0)} \right) z_{t-1}^2 + \beta_1 \right] h_{t-1}}$$

- standaryzowany błąd modelu

$$\boxed{z_t \sim N(0,1)}$$

Duan (1995)

- uogólnienie tradycyjnej metody wyceny przy neutralnym podejściu do ryzyka,
- dla modeli AR-GARCH modyfikuje się proces stóp zwrotu, by dla każdej chwili warunkowa wartość oczekiwana była równa stopie wolnej od ryzyka,
-wprowadza się więc pojęcia miary P, dla procesu nieprzekształconego oraz arbitrażowej miary Q, względem której zdyskontowany proces cen instrumentu bazowego jest martyngałem.
- podejście to nazwane zostało "wyceną przy punktowej neutralności wobec ryzyka" (*Locally Risk-Neutral Valuation Relationship - LRNVR*)

Względem miar Q stopy zwrotu mają nadal warunkowy rozkład normalny

$$\operatorname{var}^P\left(y_t \mid \Im_{t-1}\right) = \operatorname{var}^Q\left(y_t \mid \Im_{t-1}\right)$$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\left(y_t \mid \Im_{t-1}\right) = r_1$$

Uwzględnienie zmiennej w czasie wariancji powoduje, tzw. "niezupełność rynku" (*incompleteness of market*) oraz istnienie w ogólności wielu możliwych miar Q, dla których spełnione jest założenie braku arbitrażu.
Niezbędne staje się założenie o preferencjach inwestora względem ryzyka i postaci funkcji użyteczności.

Względna awersja do ryzyka jest stała

$$\boxed{U(y) = a\ln(by) + c}$$

Locally risk-neutral valuation relationship (LRNVR)

"wycena przy punktowej własności neutralności wobec ryzyka"

Jin-Chuan Duan (1995)

$$y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

$$\text{miara } P \quad \begin{cases} y_t = r_1 + \lambda\sqrt{h_t} - 0.5h_t + \sqrt{h_t}\,z_t \\ z_t \sim N(0,1) \\ h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{cases}$$

$$\text{miara } Q \quad \begin{cases} y_t = r_1 - 0.5h_t + \sqrt{h_t}\,\eta_t \\ \eta_t \sim N(0,1) \\ h_t = \omega + \alpha\left(\eta_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}}\right)^2 + \beta h_{t-1} \end{cases}$$

LRNVR dla modelu AR-GJR-GARCH

Härdle, Hafner (1996)

$$y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

miara P

$$\begin{cases} y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} - 0.5h_t + \sqrt{h_t}\, z_t \\ z_t \sim N(0,1) \\ h_t = \omega + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_1^{-} I_{(z_{t-1}<0)}\right) z_{t-1}^2 + \beta_1\right] h_{t-1} \end{cases}$$

miara Q

$$\begin{cases} y_t = r_1 - 0.5h_t + \sqrt{h_t}\,\eta_t \\ \eta_t \sim N(0,1) \\ h_t = \omega + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_1^{-} I_{(\eta_{t-1}-\lambda_{t-1}<0)}\right)\left(\eta_{t-1} - \lambda_{t-1}\right)^2 + \beta_1\right] h_{t-1} \\ \lambda_t = \dfrac{\mu + \phi_1 y_{t-1} - r_1}{\sqrt{h_t}} \end{cases}$$

1) Estymacja parametrów modelu względem miary *P*

$$\mu,\ \varphi_1,\ \omega,\ \alpha_1,\ \alpha_1^-,\ \beta$$

2) Generowanie *m* trajektorii długości *n* względem miary *Q*
(z war. początkowym na h_0)

$$y_{i,t} = r_1 - d_1 - 0.5h_{i,t} + \sqrt{h_{i,t}}\,\eta_{i,t}$$

$$h_t = \omega + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_1^- I_{(\eta_{t-1}-\lambda_{t-1}<0)}\right)\left(\eta_{t-1} - \lambda_{t-1}\right)^2 + \beta_1\right]$$

3) Wyznaczenie *m* cen instrumentu bazowego po *n* dniach, ewentualna poprawka
(Empirical Martingale Simulation, Duan, Simonato,1998)

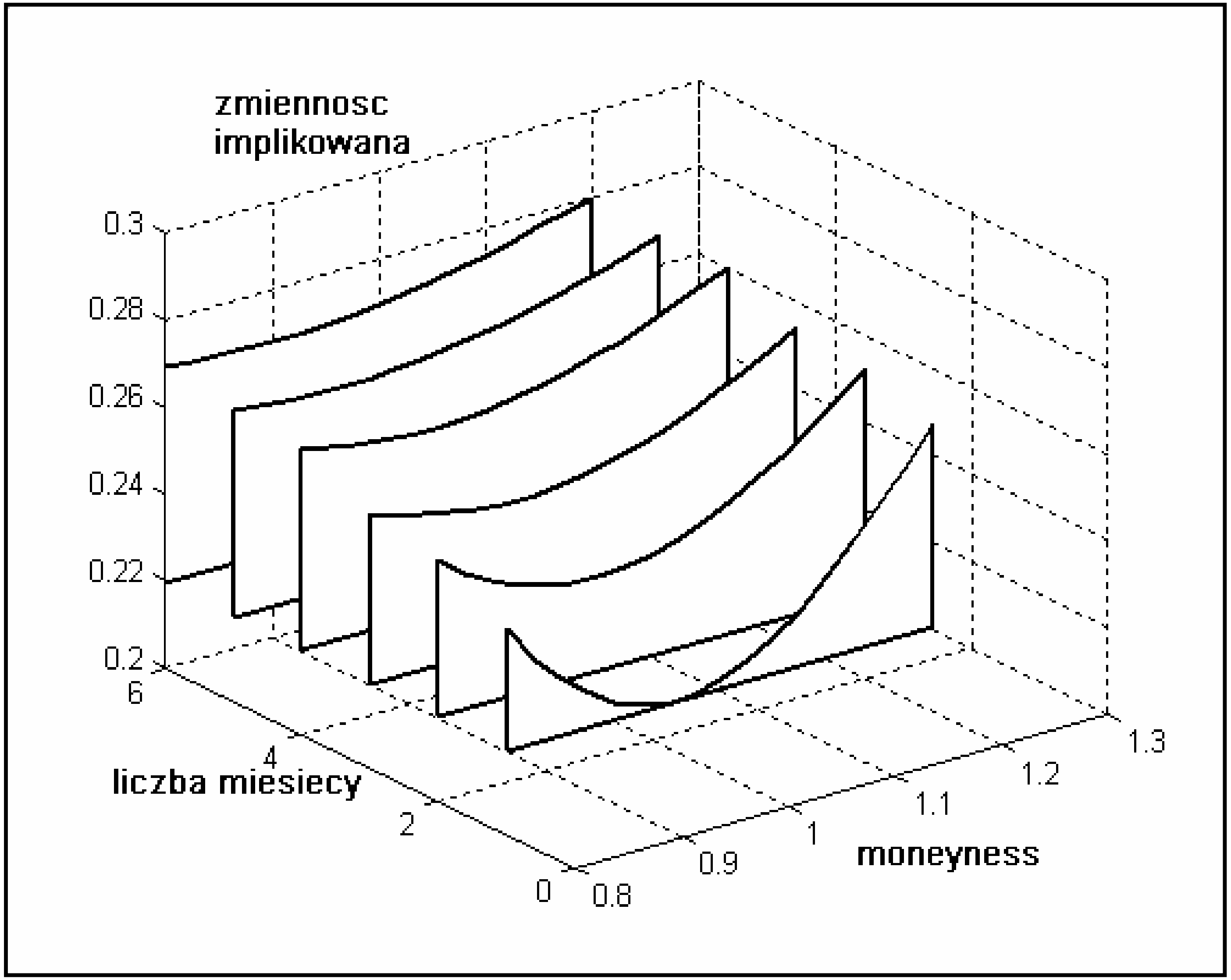
$$S_{i,n} = S_t \exp\left(nr_1 - nd_1 - 0.5\sum_{s=1}^{n} h_{i,t+s} + \sum_{s=1}^{n} \eta_{i,t+s} \right)$$

4) Wyznaczenie wartości opcji

$$t = 1, 2, \ldots, n$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$c_t = \exp\left(-nr_1\right)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \max\left[S_{i,n} - X, 0\right]$$



$$moneyness = \frac{S_t}{Xe^{-rT}}$$

opcje call

moneyness* < 1 → *OTM

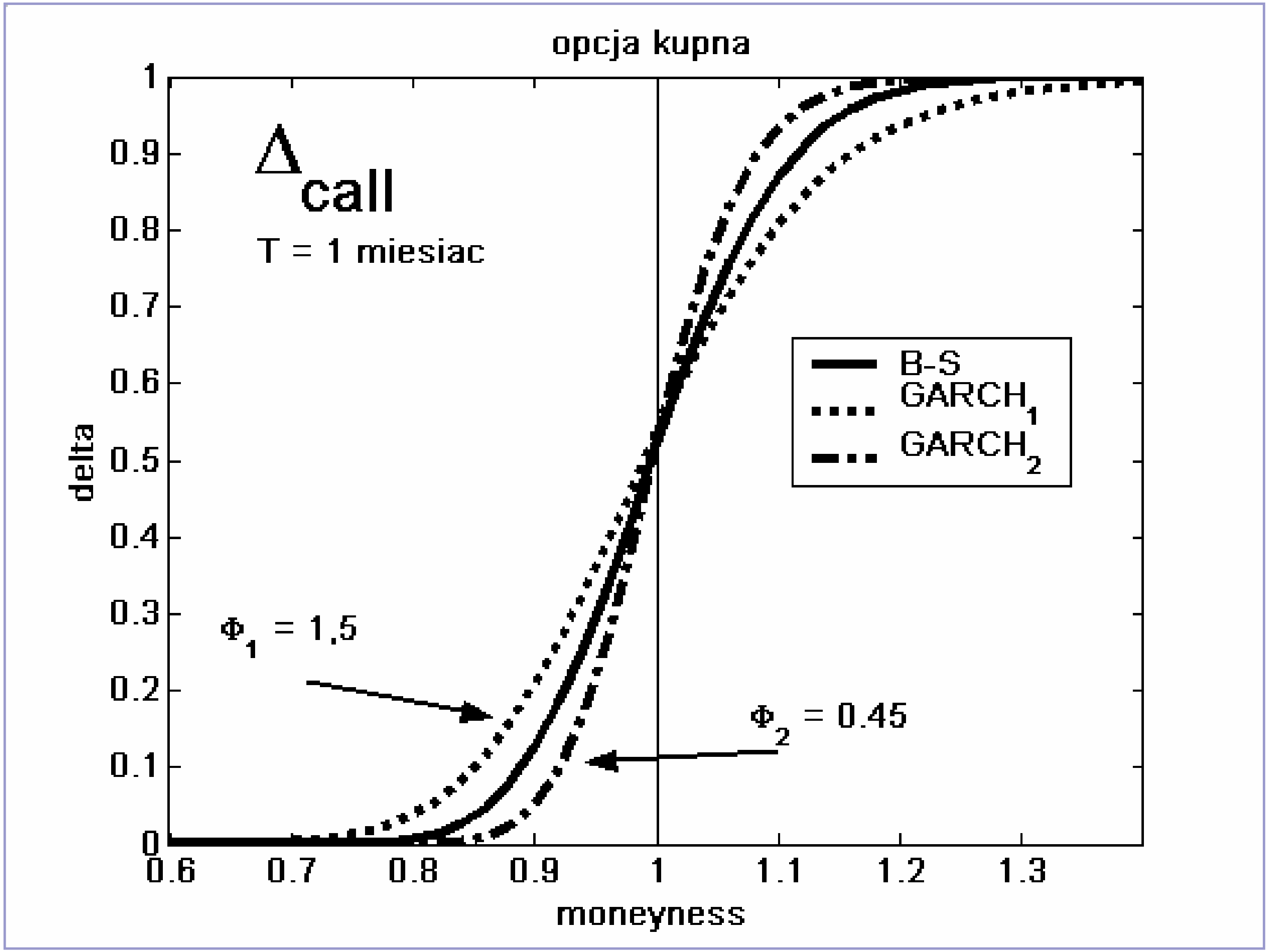
moneyness* = 1 → *ATM

moneyness* > 1 → *ITM

Wyznaczanie współczynnika Δ

$$\Delta_t^{GARCH}\{c\} = \exp(-r_1 n)\,\mathrm{E}^Q\left[\frac{S_n}{S_t} I_{(S_n > X)}\right]$$

$$\Delta_t^{GARCH}\{c\} \cong \frac{1}{m}\exp(-r_1 n)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{S_{n,i}}{S_t} I_{(S_{n,i} > X)}\right)$$



$$\Phi = \frac{\sqrt{h_0}}{\sigma}$$

Przykład empiryczny

-Analizie poddano serie opcji wygasających w 2007 roku, dla danych dostępnych do dnia 24-08-2007

- łącznie 105 serii opcji (50 serii opcji kupna (C,F,I,L) oraz 55 serii opcji sprzedaży (O,R,U,X))

-Przyjęta stopa wolna od ryzyka w skali roku 4,5%

-Przyjęta stopa dywidendy w skali roku 2,5%

-Dla każdej transakcji dla opcji odczytano odpowiadający kurs indeksu WIG20

-Odrzucono transakcje dla opcji o terminie do wykonania krótszym niż 5 dni roboczych

-Analizie poddano 23.411 transakcji dla opcji kupna oraz 34.075 transakcji dla opcji sprzedaży

-Parametry modelu GARCH estymowano dla 1000 obserwacji do dnia poprzedzającego dzień transakcji

-Parametry zmienności dla modelu Mertona estymowano dla 1000, 500 oraz 250 obserwacji do dnia poprzedzającego transakcję

Liczba transakcji dla opcji kupna – łącznie **23.411**

Współczynnik moneyness

OTM ATM ITM

	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14	0	45	409	1465	1324	239	28	10	15	26	2	0
15-24	32	247	919	1569	1046	253	15	15	7	30	6	12
25-34	65	395	996	1566	775	197	46	31	26	6	2	12
35-44	0	25	874	1160	729	248	43	5	6	9	23	6
45-54	0	188	676	782	431	145	27	2	13	15	11	3
55-64	0	74	798	713	481	152	39	20	6	1	9	0
65-74	32	152	314	427	304	125	37	11	4	10	34	15
75-84	1	74	252	212	129	51	13	6	2	6	7	0
85-94	26	118	238	165	79	19	4	2	3	7	0	0
95-104	0	50	111	125	33	17	2	2	2	3	5	0
105-114	0	4	68	105	46	22	9	15	7	4	2	0
115-124	0	4	58	48	24	5	4	8	9	0	0	0
125-134	0	1	57	71	36	11	7	9	2	1	0	0

Długość okresu do wygaśnięcia opcji
(w dniach sesyjnych)

Liczba transakcji dla opcji sprzedaży – łącznie **34.075**

Współczynnik moneyness

ITM | ATM | OTM

	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14	3	8	57	365	1421	1684	1026	464	263	164	64	10
15-24	0	1	32	123	852	1329	901	849	618	339	86	7
25-34	0	14	58	233	807	1064	1057	1063	766	513	372	79
35-44	0	0	14	86	472	752	900	848	594	623	755	156
45-54	0	6	8	69	296	596	598	576	502	496	377	150
55-64	0	3	19	30	271	464	480	533	451	459	436	118
65-74	0	10	12	31	169	352	294	379	239	148	345	84
75-84	0	6	14	54	86	144	191	167	183	243	120	0
85-94	6	5	7	13	39	54	81	155	145	180	16	0
95-104	0	2	4	7	18	21	38	56	98	142	27	0
105-114	0	0	11	13	15	24	30	29	61	110	102	0
115-124	0	0	1	15	7	13	21	32	19	41	84	4
125-134	0	0	1	3	0	4	73	73	24	30	20	0

Długość okresu do wygaśnięcia opcji
(w dniach sesyjnych)

Opcje kupna

GARCH	OTM				ATM							ITM
	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14		4,5774	1,5548	1,2199	1,1056	1,0344	1,0220	1,0247	1,0092	1,0155	1,0182	
15-24	1,9220	1,0729	0,8181	0,9226	0,9725	0,9737	1,0180	0,9979	0,9559	1,0059	1,0090	1,0186
25-34	5,8389	2,4392	1,4249	1,0270	1,0192	1,0547	1,0610	1,0723	1,0153	1,0058	1,0177	1,0224
35-44		1,3384	0,9063	0,9201	0,9519	0,9878	0,9947	0,9829	0,9676	0,9707	0,9933	0,9972
45-54		1,3778	1,1123	0,9433	1,0104	1,0438	0,9712	0,9399	0,9565	1,0126	1,0180	1,0005
55-64		0,7697	0,7668	0,8369	0,9152	0,9454	0,9713	0,9752	0,9634	1,0076	1,0066	
65-74	0,9855	0,9581	0,9095	0,9259	0,9862	1,0170	0,9753	0,9522	0,9565	0,9600	0,9629	0,9389
75-84	1,1378	0,8195	0,9448	0,9436	0,9724	0,9835	0,9923	1,0193	0,9888	0,9478	0,9410	
85-94	1,2332	1,1453	0,8613	0,8705	0,8970	1,0664	1,0644	0,9682	0,9474	0,9365		
95-104		1,7814	1,0989	0,8567	0,8871	0,9327	1,0507	1,0377	0,9668	0,9197	0,9254	
105-114		0,9510	0,9193	1,0419	1,0082	0,9336	0,9765	1,0100	0,9919	0,9888	0,9613	
115-124		0,8978	0,8000	0,8215	0,8937	0,9195	1,0406	1,0159	1,0001			
125-134		1,6436	1,0636	0,8740	0,8950	0,8918	0,9933	1,0265	0,9854	0,9496		

BLS	OTM				ATM							ITM
	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14		352,0979	8,4069	1,8514	1,2245	1,0411	1,0238	1,0255	1,0093	1,0157	1,0184	
15-24	99,6532	14,7058	1,9988	1,0733	1,0294	1,0385	1,0561	0,9985	0,9562	1,0073	1,0094	1,0188
25-34	47,5683	4,3869	1,4951	0,9797	1,0360	1,0706	1,0681	1,0777	1,0157	1,0065	1,0180	1,0226
35-44		1,5300	1,0886	0,9568	0,9836	1,0149	1,0216	1,0049	0,9689	0,9712	0,9937	0,9979
45-54		1,7651	1,1667	0,9646	0,9794	1,0403	0,9902	0,9479	0,9588	1,0150	1,0183	1,0008
55-64		1,3488	0,9718	0,9289	0,9607	0,9818	0,9955	1,0002	0,9734	1,0109	1,0084	
65-74	2,8479	2,0057	1,1283	0,9268	0,9937	1,0289	1,0184	0,9529	0,9593	0,9618	0,9640	0,9403
75-84	3,3549	1,5873	1,1151	0,9636	0,9585	0,9602	1,0316	1,0371	0,9905	0,9490	0,9423	
85-94	3,2215	1,9231	0,8257	0,8929	0,9126	1,1630	1,1166	0,9783	0,9501	0,9380		
95-104		1,6106	1,0668	0,8999	0,9135	0,9493	1,0541	1,0374	0,9923	0,9213	0,9260	
105-114		1,0894	0,8963	1,0008	1,0058	0,9626	0,9600	1,0174	0,9913	0,9932	0,9649	
115-124		0,9265	0,8624	0,8421	0,9046	0,9782	1,0443	1,0269	1,0084			
125-134		2,1542	1,0194	0,9173	0,9251	0,9010	1,0390	1,0300	1,0170	0,9692		

BLS - 1000

Opcje sprzedaży

GARCH	ITM				ATM						OTM	
	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14	0,980	1,000	0,991	0,988	1,165	2,062	5,034	9,729	7,459	3,763	1,547	0,922
15-24		1,019	0,995	0,993	1,039	1,584	2,804	5,051	6,486	6,591	3,259	1,211
25-34		1,008	0,999	1,074	1,107	1,760	2,926	7,148	9,394	9,565	8,401	3,403
35-44			1,044	1,084	1,196	1,498	2,050	3,189	4,842	7,876	7,177	4,318
45-54		1,003	0,980	1,036	1,116	1,353	1,714	2,442	3,274	4,231	4,933	4,640
55-64		0,910	1,051	1,110	1,106	1,273	1,624	2,115	2,665	3,433	4,236	5,502
65-74		1,032	1,039	1,064	1,080	1,289	1,568	1,973	2,451	3,545	4,331	5,212
75-84		0,989	1,001	1,093	1,120	1,343	1,526	2,012	2,547	3,939	3,892	
85-94	1,036	1,041	1,011	1,076	1,124	1,520	1,866	2,103	2,856	3,746	2,059	
95-104		1,010	1,033	1,193	1,120	1,284	1,601	2,060	2,683	3,348	5,001	
105-114			1,051	1,082	1,231	1,237	1,415	1,942	2,436	2,863	2,656	
115-124			1,117	1,088	1,072	1,189	1,390	1,860	2,287	2,293	2,227	2,835
125-134			0,993	1,075		1,131	1,465	1,672	1,899	2,167	2,458	

BLS	ITM				ATM						OTM	
	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
5-14	0,9797	1,0005	0,9972	1,0130	1,2835	2,8376	14,1088	139,4619	5259,2705	182552,2610	1487131,4842	4895544914161,4200
15-24		1,0371	1,0186	1,0361	1,1846	1,9681	4,4710	21,1099	116,0763	656,3941	4006,5941	440199,0075
25-34		1,0092	1,0094	1,0839	1,1351	1,7837	3,3132	8,8391	21,4796	63,3629	331,6712	1612,1188
35-44			1,0548	1,0816	1,2040	1,5511	2,3978	4,5045	8,9551	24,5817	60,3545	96,7553
45-54		1,0044	0,9860	1,0503	1,1223	1,3969	1,8871	3,0516	5,1205	10,5409	19,9622	26,9768
55-64		0,9118	1,0787	1,1475	1,1101	1,3726	1,8445	2,8232	4,7972	8,1154	10,9601	23,2220
65-74		1,0567	1,0783	1,1454	1,1260	1,4071	1,850	2,5690	3,6679	5,4800	8,2798	13,6218
75-84		1,0197	1,0179	1,1106	1,2025	1,3995	1,6846	2,2291	2,9912	4,8387	6,2839	
85-94	1,0503	1,0701	1,0991	1,1299	1,3143	1,5161	2,1024	2,5651	3,3750	4,5610	10,5873	
95-104		1,0081	1,0502	1,1615	1,1505	1,2379	1,6186	2,2535	2,9171	3,8807	6,0073	
105-114			1,0355	1,0882	1,1862	1,2463	1,4575	2,1447	2,5161	3,1830	3,0276	
115-124			1,1199	1,1196	1,0762	1,2153	1,4877	2,2763	3,0777	3,5440	3,1808	3,8697
125-134			0,9795	1,0733		1,1245	1,5490	2,0824	2,7091	2,5852	2,9736	

BLS - 1000

Podsumowanie:

- Trudno zagadnienie oceniać dosłownie w kategorii poprawności modeli wyceny opcji, gdyż także obserwowane ceny opcji mogą nie odzwierciedlać „ceny sprawiedliwej” i być właściwe dla rynku polskiego w pewnym danym, charakterystycznym okresie.

- Analiza sprowadziła się więc bardziej do porównania ceny obserwowanej na rynku polskim w drugiej połowie 2006 roku oraz w pierwszej połowie 2007 i wartości teoretycznych uzyskanych dla badanych modeli.

- Należy również uwzględnić fakt popularności modelu B-S, który jest punktem odniesienia dla inwestorów.

Podsumowanie:

-Modele B-S i GARCH prowadzą do bardzo zbliżonych wyników dla opcji ITM, szczególnie o dłuższym terminie do wygaśnięcia.

-Wartości teoretyczne cen dla opcji ITM są praktycznie zgodne (co do mediany) z obserwowanymi na rynku.

- W obydwu modelach ceny teoretyczne opcji OTM (kupna i sprzedaży), szczególnie o krótkim terminie do wygaśnięcia są zdecydowanie niższe niż obserwowane na rynku. Są to opcje o bardzo niskich wartościach premii.

- Wartości dla modelu GARCH są jednak bliższe cenom rynkowym.

Podsumowanie:

- Opcje kupna ATM i nieznacznie OTM o dłuższym terminie do wygaśnięcia mają ceny niższe niż wartości teoretyczne,

-Opcje sprzedaży ATM i OTM mają ceny wyższe niż wartości teoretyczne

Prawdopodobnym wytłumaczeniem jest subiektywne zaniżanie przez inwestorów prawdopodobieństwa dalszych wzrostów w czasie hossy

Dla opcji blisko ATM brak jest jednoznacznej przewagi któregoś z modeli, a wyniki pozostają niejednoznaczne.

Kierunki dalszych badań:

- poszerzenie badań na wcześniejsze serie opcji,

- podział na okresy hossy i bessy,

- uwzględnienie w analizach wolumenu transakcji

- uwzględnienie innej miary oceny zgodności cen obserwowanych i wartości teoretycznych

- uwzględnienie innych modeli klasy GARCH

- analiza w kontekście zmienności implikowanej

Akademia Ekonomiczna
im. Oskara Langego we Wrocławiu
Wydział Zarządzania i Informatyki
Katedra Inwestycji Finansowych i Zarządzania Ryzykiem

Krzysztof Piontek

Weryfikacja modeli Blacka-Scholesa oraz AR-GARCH dla opcji na WIG20

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ