

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Daniel Papla*

*Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu*

### **Wykorzystanie modelu DCC-MGARCH w analizie zmian zależności wybranych akcji GPW w Warszawie**

#### **1. Wstęp**

Celem artykułu jest zbadanie charakteru dynamiki zależności występujących pomiędzy akcjami na polskiej giełdzie. Ze względu na czasochłonność i złożoność obliczeń ograniczono się jedynie do wybranych spółek z polskiej giełdy. Z tego samego powodu w obliczeniach wykorzystano jedynie portfele składające się z dwóch elementów.

Hipotezę badawczą można sformułować w następujący sposób: zależność występująca na GPW w Warszawie nie jest stała, a jej zmiany mają charakter nieregularny. Poza tym zbadanie dynamiki zależności między akcjami na naszej giełdzie jest ważne również z praktycznego punktu widzenia – z punktu widzenia inwestora, próbującego zdywersyfikować swój portfel.

Aby zweryfikować hipotezę autor wykorzystał model dynamicznej korelacji DCC-MGARCH Engla. Analiza składała się z dwóch etapów. W pierwszym dla każdego z dwuelementowych portfeli akcji estymowano model dwuwymiarowy model autoregresji VAR. W drugim etapie dla reszt modelu VAR estymowano współczynniki modelu DCC. Istotne różne od zera współczynniki tego modelu są podstawą weryfikacji hipotezy badawczej.

Praca składa się z trzech części. W pierwszej omówiono zastosowany do modelowania korelacji model DCC Engla. W drugiej przedstawiono wyniki badań. W ostatniej części przedstawiono ich interpretacje.

#### **2. Model dynamicznej korelacji DCC**

Punktem wyjścia do dalszych rozważań będą pojęcia warunkowych wartości oczekiwanych ( $\mu_t$ ), warunkowej macierzy wariancji-kowariancji ( $\mathbf{H}_t$ ) wy-

znaczanych na podstawie informacji dostępnej w chwili  $t - 1$  oraz pojęcie postaci warunkowego rozkładu standaryzowanych reszt modelu. Wszystkie trzy zagadnienia należy rozpatrywać łącznie, gdyż wzajemnie wpływają na siebie i wspólnie determinują własności ostatecznego modelu. Więcej informacji na ten temat znaleźć można w pracach np. Bollersleva (1994), Piontka (2002) i Tsaya (2002). Tutaj przedstawione zostaną jedynie podstawowe i niezbędne informacje.

Aby zilustrować dynamiczny model warunkowej korelacji (DCC – *dynamic conditional correlation*) Engla (2002), założmy, że dysponujemy  $k$ -wymiarowym (w naszym przypadku  $k = 3$ , ale przedstawione dalej rozważania są prawdziwe również dla wyższych wymiarów) wektorem  $r_t$  obserwacji, np. stopy zwrotu  $k$  wybranych do portfela składników (akcji, indeksów lub walut) w momencie  $t$ . Wektor ten można przedstawić w równaniu warunkowej wartości oczekiwanej, jako zredukowany model wektorowej autoregresji (VAR):

$$A(L)r_t = \varepsilon_t, \text{ gdzie } \varepsilon_t \sim N(0, H_t), \quad (1)$$

gdzie:  $A(L)$  jest macierzą wielomianową operatora opóźnienia  $L$ ,  $\varepsilon_t$  to wektor reszt modelu VAR z warunkową macierzą wariancji-kowariancji:

$$H_t = \{h_{ij}\}_t = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kk} \end{bmatrix}_t, \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Ideę modelu DCC-GARCH najłatwiej zrozumieć, kiedy zapisze się warunkową macierz wariancji-kowariancji w postaci:

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (2)$$

gdzie:  $D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{ij}}\}_t$  jest diagonalną macierzą zmiennych w czasie odchyłeń standardowych jednowymiarowych procesów GARCH poszczególnych składników portfela,  $R_t = \{\sqrt{\rho_{ij}}\}_t$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$  to macierz korelacji zawierająca warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy składnikami portfela. Elementy macierzy  $D_t$  można opisać przy pomocy jednowymiarowych modeli GARCH( $p, q$ ) w następujący sposób:

$$h_{ij} = \omega_t + \sum_{p=1}^{P_t} \alpha_{ip} \varepsilon_{it-p}^2 + \sum_{q=1}^{Q_t} \beta_{ip} h_{it-q}, \quad (3)$$

gdzie:  $h_{it} = \{h_{ii}\}_t$ , czyli uproszczony zapis elementów diagonalnych macierzy  $D_t$ .

Model DCC( $m, n$ ) Engla (2002) opisuje strukturę macierzy  $R_t$  w następujący sposób:

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}, \quad (4)$$

gdzie:

$$Q_t = \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m - \sum_{n=1}^N b_n \right) \bar{Q} + \sum_{m=1}^M a_m (\xi_{t-m} \xi'_{t-m}) \sum_{n=1}^N b_n Q_{t-n}, \quad (5)$$

$\xi_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sqrt{h_{it}}}$  – elementy wektora standaryzowanych reszt,  $Q_t = \{\sqrt{q_{ij}}\}_t$  – macierz wariancji-kowariancji standaryzowanych reszt, której bezwarunkowa (niezależna od czasu) macierz wariancji-kowariancji  $\bar{Q}$  otrzymywana jest w pierwszym kroku estymacji.  $Q_t^*$  to diagonalna macierz zawierająca pierwiastki kwadratowe elementów leżących na przekątnej macierzy  $Q_t$ :

$$Q_t^* = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{q_{kk}} \end{bmatrix}_t. \quad (6)$$

Model DCC-GARCH można estymować przy pomocy metody największej wiarygodności, w której logarytm funkcji wiarygodności można opisać następującym wzorem:

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{ 2 \log(2\pi) + 2 \log|D_t| + \log|R_t| + \xi'_t R_t^{-1} \xi_t \}. \quad (7)$$

W swoim artykule Engle (2002) wykazał, że proces estymacji można przeprowadzić dwuetapowo. W pierwszym etapie macierz  $R_t$  jest zastępowana przez  $k$ -wymiarową macierz jednostkową, co redukuje równanie (7) do sumy logarytmów funkcji wiarygodności jednowymiarowych modeli GARCH. W drugim etapie estymuje się parametry modelu DCC w równaniu (5) wykorzystując pełny logarytm funkcji wiarygodności (7) przy warunku wykorzystania parametrów jednowymiarowych modeli GARCH otrzymanych w pierwszym etapie (Lee, 2004).

### 3. Dane i wyniki estymacji

Ze względu na czasochłonność (i trudną do ogarnięcia obszerność wyników) w tej pracy zostaną zaprezentowane wyniki dotyczące tylko wybranej grupy akcji. Są to akcje 10 najdłuższej notowanych spółek: BRE, Elektrim, Irena,

Kable, Krosno, Millennium, Mostostal Export, Próchnik, Swarzędz i Żywiec. W obliczeniach wykorzystano dzienne logarytmiczne stopy zwrotu z okresu 2 stycznia 1995 r.-14 czerwca 2007 r. Aby zbadać, jak kształtowała się korelacja między tymi spółkami model DCC estymowano dla wszystkich dwuelementowych portfeli, które można otrzymać z tych 10 spółek.

Tabela 1. Estymatory współczynników modelu GARCH (1,1)-DCC(1,1)

Współ.	BRE-Elektrim	BRE-Iren	BRE-Kable	BRE-Millennium	BRE-Mostostal Exp
$\omega_1$	0.0000172	0.0000212	0.0000172	0.0000188	0.0000173
$\alpha_1$	0.0954600	0.1017485	0.0946796	0.0984952	0.0935200
$\beta_1$	0.8842777	0.8728890	0.8853161	0.8791947	0.8859511
$\omega_2$	0.0000871	0.0001390	0.0002254	0.0000602	0.0000453
$\alpha_2$	0.1750953	0.1668078	0.4010722	0.1503670	0.0905003
$\beta_2$	0.8183525	0.6601931	0.5058729	0.7966006	0.8737490
$A$	0.0341883	0.0145445	0.0054209	0.0406789	0.0206550
$B$	0.9218794	0.9665578	0.9738289	0.9074792	0.9667977
Współ.	BRE-Próchnik	BRE-Żywiec	Elektrim-Kable	Elektrim-Swarzędz	Krosno-Próchnik
$\omega_1$	0.0000203	0.0000261	0.0000794	0.0000845	0.0000189
$\alpha_1$	0.1019002	0.0978074	0.1655767	0.1731699	0.0982479
$\beta_1$	0.8747224	0.8694211	0.8286967	0.8210955	0.8795736
$\omega_2$	0.0001067	0.0000019	0.0002252	0.0002325	0.0001025
$\alpha_2$	0.1440699	0.0660221	0.3881780	0.1598288	0.1418603
$\beta_2$	0.8214476	0.9339759	0.5155116	0.6969278	0.8247459
$A$	0.0099513	0.0312718	0.0051981	0.0520336	0.0196325
$B$	0.9749702	0.8278820	0.9947999	0.3113997	0.9436846
Współ.	Millennium-Mostostal Exp	Millennium-Żywiec	Mostostal Exp-Swarzędz	Próchnik-Swarzędz	Swarzędz-Żywiec
$\omega_1$	0.0000600	0.0000678	0.0000439	0.0001029	0.0001997
$\alpha_1$	0.1522742	0.1520009	0.0900736	0.1444020	0.1411839
$\beta_1$	0.7950510	0.7880329	0.8755471	0.8228383	0.7371797
$\omega_2$	0.0000433	0.0000019	0.0002107	0.0002137	0.0000019
$\alpha_2$	0.0883875	0.0668459	0.1497020	0.1434771	0.0663840
$\beta_2$	0.8776799	0.9331521	0.7197672	0.7230783	0.9336140
$A$	0.0395757	0.0160174	0.0674296	0.0118506	0.0000020
$B$	0.9275765	0.0000020	0.0603194	0.9834382	0.0000020

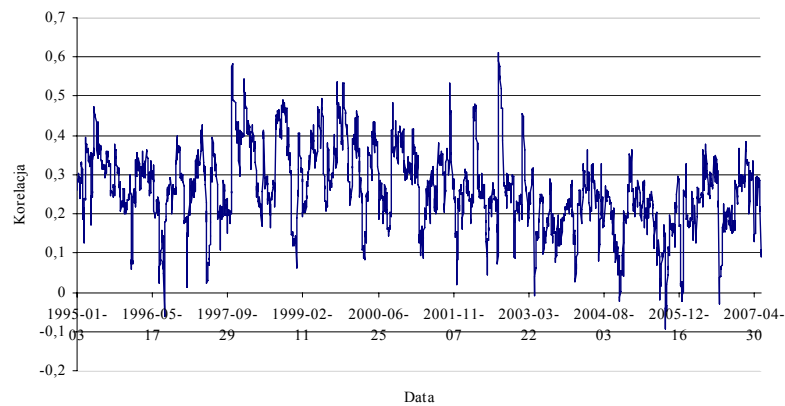
Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 1 przedstawiono wynik estymacji modelu dynamicznej korelacji (dla wybranych par spółek), zaś na wykresach 1-7 zaprezentowano warunkową korelację między wybranymi parami spółek. Obliczenia wykonano w pakiecie Matlab korzystając z bibliotek autorstwa K. Shepparda (Engle, Sheppard, 2001). Analizując tab. 1 nasuwa się kilka wniosków:

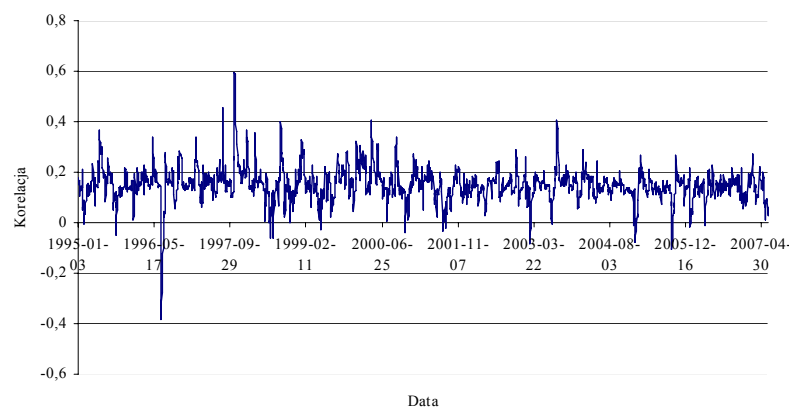
- a) w większości wypadków suma współczynników modeli GARCH pojedynczych składników dwuelementowych portfeli jest zbliżona do jed-

ności, co wskazuje na to, że wariancja w momencie  $t$  jest w dużym stopniu uzależniona od wariancji w momencie  $t-1$  – na naszej giełdzie występuje w takim razie tzw. „grupowanie wariancji” (por. Piontek, 2002);

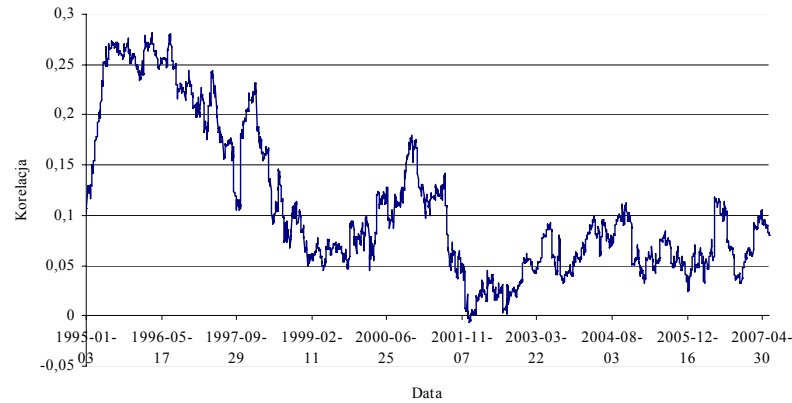
- b) dla większości przypadków również suma współczynników modelu DCC jest zbliżona do jedności, co z kolei świadczy o tym, że warunkowa kowariancja pomiędzy parami akcji w momencie  $t$  jest uzależniona od korelacji w momencie  $t-1$ ;
- c) ciekawe są jednak wyjątki od zasady sformułowanej w punkcie b): dla niektórych par (których składnikiem jest Swarzędz i/lub Żywiec) współczynniki modelu DCC są niskie, świadcząc o braku zależności pomiędzy warunkowymi kowariancjami w momentach  $t$  i  $t-1$ .



Wykres 1. Warunkowa korelacja BRE-Elektrim  
 Źródło: opracowanie własne.

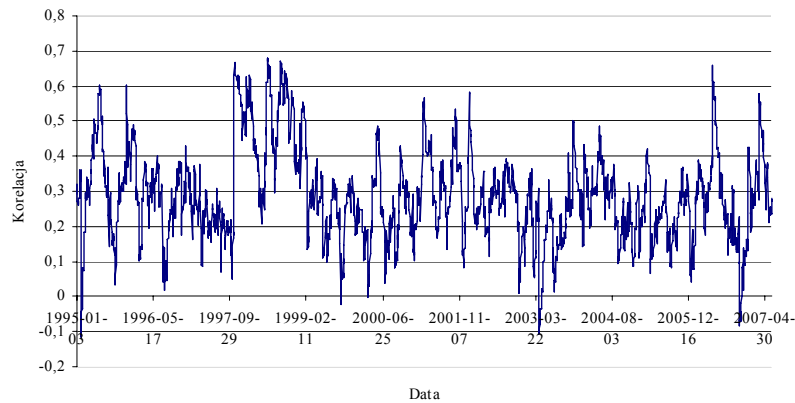


Wykres 2. Warunkowa korelacja BRE-Żywiec  
 Źródło: opracowanie własne.



Wykres 3. Warunkowa korelacja Elektrim-Kable

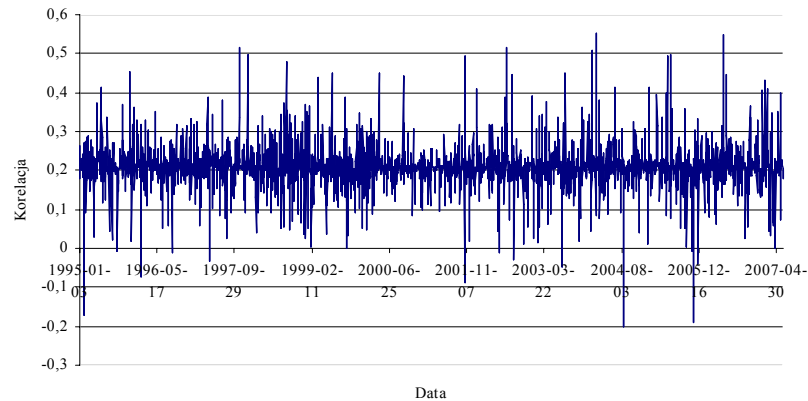
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4. Warunkowa korelacja Millennium-Mostostal Exp

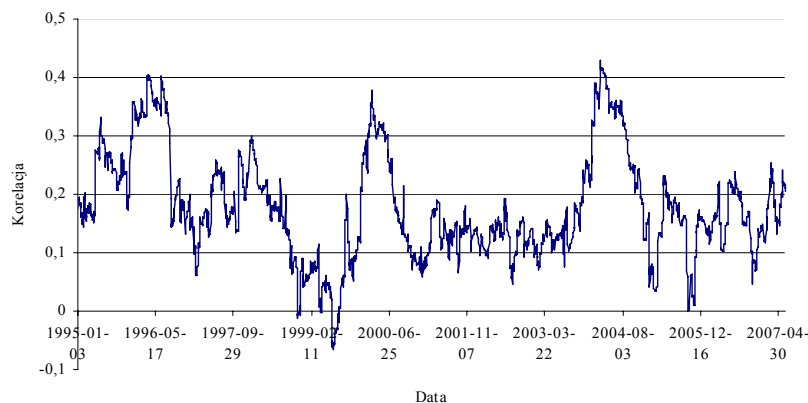
Źródło: opracowanie własne.

Wykresy 1-7 pokazują jak różnie może zachowywać się warunkowa korelacja między wybranymi spółkami. Najbardziej typowy wydaje się być obraz zależności pomiędzy korelacjami z okresów  $t$  i  $t - 1$ , z dosyć wysoką zmiennością tej korelacji w poszczególnych okresach – wykres 1, 4. Odpowiada to parametrowi  $b$  modelu DCC z przedziału 0.94-0.96. Przy  $b$  nieco niższym, równym np. 0.85 (wykres 2, para BRE-Żywiec) widać mniejszą zmienność warunkowej korelacji niż w poprzednim przypadku, wydaje się jednak, że zależność między wartościami korelacji w różnych okresach nadal występuje.



Wykres 5. Warunkowa korelacja Mostostal Exp-Swarzędz.

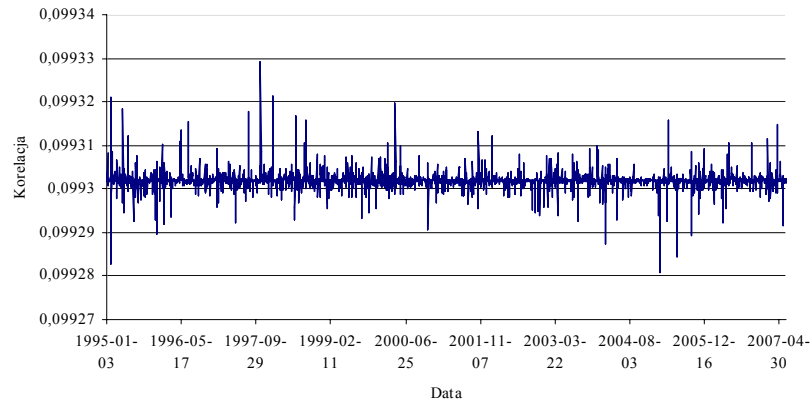
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 6. Warunkowa korelacja Próchnik-Swarzędz

Źródło: opracowanie własne.

Najbardziej interesująco, zdaniem autora, prezentują się dwa pozostałe przypadki, również z praktycznego punktu widzenia. Pierwszy ilustrują wykres 3 i 6. Widać na nich warunkową korelację, która w wyraźny sposób jest zależna od korelacji z okresu poprzedniego, zdecydowanie jednak nie pozostaje na stałym poziomie. W przypadku pary Elektrim-Kable (wykres 3) wykazuje tendencję malejącą, zaś dla pary Próchnik-Swarzędz (wykres 6) jej zmiany wydają się mieć charakter okresowy. Z kolei wykres 5 i 7 pokazują przypadek korelacji odchylającej się w sposób losowy od stałego poziomu. Odpowiadają one przypadkowi, w którym współczynnik  $b$  modelu jest nieistotnie różny od zera.



Wykres 7. Warunkowa korelacja Swarzędz-Żywiec

Źródło: opracowanie własne.

Z punktu widzenia inwestora ważny wydaje się wniosek, że korelacja pomiędzy dwoma papierami wartościowymi może się zmieniać, czasami w sposób dosyć gwałtowny. Uwzględnienie tego faktu np. przy budowie portfela jest zdaniem autora konieczne. Dlatego też celem dalszych badań autora będzie wykorzystanie modelu DCC w analizie portfelowej, czy też analizie ryzyka (np. za pomocą VaR).

## Literatura

- Bollerslev, T., Engle, R., Nelson, D. (1994), ARCH Models, w: *Handbook of Econometrics*, IV, Amsterdam, 2959–3038.
- Engle, R.F. (2002), Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 339–50.
- Engle, R.F. Sheppard, K. (2001), Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, Working Paper, 8554, NBER.
- Lee, J. (2004), *The Comovement Between Output and Prices: Evidence from Canada*, Texas A&M University-Corpus Christi, Corpus Christi.
- Piontek, K. (2002), *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, praca doktorska, AE, Wrocław.
- Tsay, R. (2002), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley and Sons.