

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Anna Pajor

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

Prognozowanie zdyskontowanej wypłaty europejskiej opcji kupna na indeks WIG20 w modelu ze stochastycz- ną wariancją i stochastyczną stopą procentową*

1. Wprowadzenie

Zagadnienie wyceny opcji z losową stopą procentową i losowym współczynnikiem zmienności nie jest tak powszechnie poruszane i stosowane jak słynny model Blacka i Scholesa. Powodem są trudności wynikające z istnienia dodatkowych źródeł ryzyka. W przypadku gdy zmienność jest odrębnym procesem stochastycznym, niemożliwe jest zbudowanie prostej postaci portfela replikującego. Założenie o niemożliwości arbitrażu jest niewystarczające do znalezienia sprawiedliwej¹ ceny opcji. Problem wyceny opcji, z wykorzystaniem ciągłych procesów SV w modelu ze stałą stopą procentową, po raz pierwszy podjęli Hull i White (1987), Wiggins (1987), Heston (1993). Amin i Ng (1993) wyprowadzają wzór na cenę opcji w przypadku losowego współczynnika zmienności oraz losowej (ale zdeterminowanej przeszłością) stopy procentowej. Podejście bayesowskie natomiast umożliwia pełną prognozę przyszłej wypłaty oraz wycenę opcji bezpośrednio z jej definicji, poprzez wykorzystanie charakterystyk predyktywnego rozkładu zdyskontowanej wypłaty. W taki sposób, w modele z klasy GARCH, dokonują wyceny opcji Bauwens i Lubrano (1998, 2002) oraz Osiewalski i Pipień (2003).

Głównym celem niniejszej pracy jest pokazanie, że uwzględnienie w modelu wyceny opcji stochastycznej stopy procentowej nie ma istotnego wpływu na jakość prognoz przyszłej wypłaty. Rozważony zostanie bayesowski model eko-

* Praca wykonana w ramach badań statutowych finansowanych przez AE w Krakowie.

¹ Ceny nie dającej możliwości arbitrażu.

nometryczny, w którym zarówno stopy zmian instrumentu podstawowego jak i stóp procentowych będą traktowane jako realizacje dwuwymiarowego procesu wariancji stochastycznej (SV). Model ten będzie się więc charakteryzował stochastycznymi warunkowymi wariancjami i stochastyczną stopą procentową. Rozważone zostaną również jednowymiarowe modele SV dla stóp zmian cen instrumentu podstawowego ze stałą stopą procentową. Modele te zostaną wykorzystane do prognozy przyszłej wypłaty europejskiej opcji kupna na indeks WIG20. W następnych częściach pracy przedstawiono bayesowskie modele SV. W części czwartej omówiono zagadnienie bayesowskiej prognozy zdyskontowanej wypłaty. Część piąta poświęcona jest wynikom empirycznym, zaś część szósta zawiera uwagi końcowe i podsumowanie.

2. Jednowymiarowy bayesowski model FCSV

Niech $\{x_t, t = 0, 1, \dots, T\}$ oznacza szereg czasowy cen instrumentu finansowego w chwili t (w niniejszej pracy są to notowania indeksu WIG20). Dla logarytmicznych stóp zmian $\{y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$, obliczonych według formuły (por. Campbell, Lo i MacKinlay, 1997): $y_t = 100 \ln(x_t / x_{t-1})$, $t = 1, \dots, T$, przyjęto strukturę AR(1):

$$y_t - \delta_1 = \rho_1(y_{t-1} - \delta_1) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

gdzie $\{\xi_t\}$ jest procesem FCSV (ang. *Fat-Tailed and Correlated SV*, zob. Jacquier, Polson i Rossi, 2002). Zatem dla każdego $t \in \{1, 2, \dots, T\}$:

$$\xi_t = u_t \sqrt{h_t / \omega_t}, \quad \ln h_t = \gamma + \phi \ln h_{t-1} + \sigma_h \eta_t, \quad (2)$$

gdzie $\omega_t \sim \chi^2(\nu) / \nu$ i $\omega_t \perp (u_s, \eta_s)$ dla $t, s \in \{1, 2, \dots, T\}$ oraz

$$(u_t, \eta_t)' \sim iiN\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Zapis *iiN* oznacza ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, natomiast symbol \perp oznacza, że zmienne losowe są nieskorelowane.

Proces FCSV umożliwia modelowanie takich własności finansowych szeregów czasowych, jak: 1) grube ogony – nawet gdy $\phi = 0$ kurtoza ξ_t jest większa niż dla rozkładu normalnego, ponadto mała liczba stopni swobody świadczy o bardzo grubych ogonach rozkładów zmiennych losowych opisujących sposób generowania danych, 2) efekt dźwigni, o którym informuje ujemna wartość parametru ρ (jeśli zmienne losowe u_t i η_t są ujemnie skorelowane, to ujemne wartości zmiennej losowej u_t są związane ze wzrostem wartości zmiennej ukrytej h_t w tej samej chwili i w konsekwencji w następnym czasie), 3) zjawisko skupiania się zmienności - za które w głównej mierze odpowiada parametr ϕ (wartości bliskie jeden świadczą o dużym nasileniu tego zjawiska), 4) zmienność warian-

cji warunkowej (wahliwość zmienności), która jest tym większa im wyższa jest wartość parametru σ_h^2 .

Aby model bayesowski był kompletny, konieczna jest specyfikacja rozkładu a priori na przestrzeni nieznanymi parametrów tego modelu. Przyjęto następującą strukturę rozkładu a priori (zob. Pajor, 2003):

$$p(\delta_1, \rho_1, \alpha, \nu, \sigma_h^2, \rho) = p(\delta_1) p(\rho_1) p(\alpha) p(\nu) p(\sigma_h^2, \rho),$$

gdzie $\delta_1 \sim N(0, 1)$, $\rho_1 \sim U(-1, 1)$, $\gamma \sim N(0, 100)$, $\phi \sim N(0, 100) I_{(-1, 1)}(\phi)$, $\nu \sim Exp(0, 1)$. Symbol $N(a, b)$ oznacza rozkład normalny o wartości oczekiwanej a i wariancji b , $IG(a, b)$ - gęstość odwróconego rozkładu gamma ze średnią $b/(a-1)$ (dla $a > 1$) i wariancją $b^2/[(a-1)^2(a-2)]$ (dla $a > 2$), $U(a, b)$ - rozkład jednostajny na przedziale (a, b) , $Exp(0, 1)$ - rozkład wykładniczy o średniej i odchyleniu standardowym równym 1, $I_A(\cdot)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $A \subseteq R$. Dla wektora (ρ, σ_h^2) rozkład nie jest standardowy:

$$p(\rho, \sigma_h^2) = s_0^{\nu_0} \Gamma(\nu_0)^{-1} (\sigma_h^{-2})^{\nu_0+1} e^{-\frac{s_0}{1-\rho^2} \frac{1}{\sigma_h^2}} (1-\rho^2)^{-\nu_0-1,5} p_0^{0,5} (2\pi)^{-0,5} e^{-\frac{(\rho\sigma_h - \psi_0)^2 p_0}{2(1-\rho^2)\sigma_h^2}},$$

$\nu_0 = 1$, $s_0 = 0,005$, $\psi_0 = 0$, $p_0 = 2$. Wartość początkowa procesu $\{\ln h_t\}$ jest stała: $h_0 = y_0^2$. Tak przyjęte rozkłady a priori odzwierciedlają nikłą wstępną wiedzę, przed wglądem w dane, na temat parametrów modelu AR(1)-FCSV.

Warto przypomnieć, że w przypadku granicznym $\nu = \infty$ oraz $\rho = 0$ otrzymuje się tzw. podstawowy model wariancji stochastycznej (ang. *Basic Stochastic Volatility Model*, BSV, zob. Pajor, 2003)

3. Dwuwymiarowy bayesowski model TSV

Niech teraz $\{x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})', t = 0, 1, \dots, T\}$ oznacza wektorowy szereg czasowy cen instrumentów finansowych (w niniejszej pracy są to notowania indeksu WIG20 i WIBOR1m). Dla logarytmicznych stóp zmian $\{y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})', t = 1, 2, \dots, T\}$, gdzie $y_{i,t} = 100 \ln(x_{i,t} / x_{i,t-1})$ ($i = 1, 2$), przyjęto strukturę VAR(1):

$$y_t - \delta = R(y_{t-1} - \delta) + \xi_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{bmatrix},$$

gdzie $\{\xi_t\}$ jest dwuwymiarowym procesem TSV (zob. Tsay, 2002). Oznacza to, że dla każdego $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ warunkowy (względem zmiennych ukrytych) rozkład zmiennej losowej ξ_t jest normalny o wektorze średnich $0_{[2 \times 1]}$ i macierzy

kowariancji Σ_t , tj. $\xi_t | \Theta_t \sim N(0_{[2 \times 1]}, \Sigma_t)$, gdzie $\Sigma_t = L_t G_t L_t'$,

$$L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21,t} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_t = \begin{bmatrix} q_{11,t} & 0 \\ 0 & q_{22,t} \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, zmienne ukryte (lub ich logarytmy) podlegają procesom autoregresyjnym rzędu pierwszego:

$$\begin{aligned}\ln q_{11,t} - \gamma_{11} &= \phi_{11}(\ln q_{11,t-1} - \gamma_{11}) + \sigma_{11}\eta_{11,t}, \\ \ln q_{22,t} - \gamma_{22} &= \phi_{22}(\ln q_{22,t-1} - \gamma_{22}) + \sigma_{22}\eta_{22,t}, \\ q_{21,t} - \gamma_{21} &= \phi_{21}(q_{21,t-1} - \gamma_{21}) + \sigma_{21}\eta_{21,t},\end{aligned}$$

gdzie $\eta_t = (\eta_{11,t}, \eta_{22,t}, \eta_{21,t})'$, $\{\eta_t\} \sim iiN(0_{[3 \times 1]}, I_3)$, $\Theta_t = (q_{11,t}, q_{22,t}, q_{21,t})'$.

Dla parametrów związanych ze strukturą VAR(1), a więc wektora $\omega = (\delta_1, \delta_2, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22})' \in \mathbb{R}^6$ przyjęto a priori standardowy rozkład normalny, ucięty restrykcją, że wektory własne macierzy R co do modułu są mniejsze od jeden. Dla pozostałych parametrów założono następujące niezależne rozkłady a priori: $\beta_{(ij)} \sim N_2(0, 100I_2)I_{(-1,1)}(\phi_{ij})$, $\beta_{(ij)} = (\gamma_{ij}, \phi_{ij})'$, $\sigma_{ij}^2 \sim IG(1, 0.005)$, $\ln q_{ii,0} \sim N_1(0, 100)$, $i, j = 1, 2$, $i \geq j$, $q_{21,0} \sim N_1(0, 100)$. Wartości początkowe procesów $\{\ln q_{ii,t}\}$ ($i = 1, 2$) oraz $\{q_{21,t}\}$, oznaczone odpowiednio przez $\ln q_{ii,0}$, $q_{21,0}$, traktowane są jako dodatkowe nieznanne parametry modelu - przyjęto dla nich a priori rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym 10.

4. Prognozowanie wypłaty europejskiej opcji kupna

Niech S_t oznacza cenę instrumentu bazowego w chwili t . Dla europejskiej opcji kupna z ceną wykonania K , o terminie wygaśnięcia $T+s$ funkcja wypłaty (tzn. funkcja opisująca wypłatę w terminie wykonania opcji) wynosi $(S_{T+s} - K)^+ = \max\{S_{T+s} - K, 0\}$. Jeżeli funkcję tę zdyskontujemy według zmiennej stopy procentowej r_t zgodnie z kapitalizacją ciągłą, to otrzymamy wartość w chwili T wypłaty dokonywanej za okres s :

$$W_{T|T+s} = \exp\left(-\int_T^{T+s} r_t dt\right) \max(S_{T+s} - K, 0).$$

Zdyskontowana wypłata $W_{T|T+s}$ jest zmienną losową jako mierzalna funkcja zmiennych losowych S_{T+s} i r_t (w modelu AR(1)-TSV $S_{T+s} = x_{1,T+s}$, $r_t = x_{2,t}$; w modelu FCSV $S_{T+s} = x_{T+s}$, $r_t = r$) oraz ma rozkład dyskretno-ciągły, gdyż prawdopodobieństwo zdarzenia $W_{T|T+s} = 0$ może być niezerowe.

Bayesowskie podejście do wyceny opcji z wykorzystaniem modeli z klasy GARCH po raz pierwszy prezentują Bauwens i Lubrano (1998, 2002). Za cenę opcji przyjmują wartość oczekiwaną (a dokładniej średnią z próby pseudolosowej) zdyskontowanej wypłaty względem rozkładu predyktywnego tej wypłaty lub też wykorzystując tzw. zależność (miarę) lokalnie wolną od ryzyka (ang. Locally Risk Neutral Valuation Relationship). Natomiast Osiewalski i Pipień (2003) proponują za cenę opcji przyjąć medianę predyktywnego rozkładu zdyskontowanej wypłaty (ponieważ wartość oczekiwana nie zawsze istnieje).

W przypadku modeli SV występuje problem zupełności rynku. W modelach z losowym współczynnikiem zmienności rynek jest niezupełny (losowość współczynnika zmienności jest dodatkowym źródłem ryzyka). Zatem nie istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa, którą można wykorzystać do wyznaczenia ceny opcji. Ponadto istnieje wiele metod wyceny opcji, po zastosowaniu których można uzyskać różne ceny tej samej opcji. Przegląd tych metod można znaleźć w pracy Hobson (2004). Wykorzystywane w niniejszej pracy wnioskowanie bayesowskie pozwala na pełny opis niepewności związanej z przyszłą wypłatą poprzez konstrukcję rozkładu predyktywnego tejże wypłaty. W niniejszej pracy ograniczono się jedynie do skonstruowania predyktywnego rozkładu zdyskontowanej wypłaty:

$$p(W_{T|T+s} | y) = \int p(W_{T|T+s} | \theta, y) p(\theta | y) d\theta,$$

gdzie θ jest wektorem parametrów i zmiennych ukrytych, y jest wektorem obserwacji, zaś $p(\theta | y)$ jest rozkładem a posteriori parametrów modelu i zmiennych ukrytych.

5. Wyniki empiryczne²

Przedmiotem rozważań są opcje na indeks WIG20 notowane na Gieldzie Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie w dniu 31 grudnia 2004. Pod uwagę wzięto europejskie opcje kupna z datą wygaśnięcia na dzień 18 marca oraz 17 czerwca 2005 roku (tj. odpowiednio $s = 55$ i $s = 115$ dni roboczych), z kursem wykonania: 1700, 1800, 1900, 2000 i 2100 punktów indeksowych. Predyktywny rozkład zdyskontowanej wypłaty dla rozważanych opcji uzyskano modelując logarytmiczne stopy zmian notowań indeksu WIG20 z okresu od 29 grudnia 2000 roku do 31 grudnia 2004 roku (liczba obserwacji modelowanych $T = 1004$) oraz stóp procentowych WIBOR1m z tego samego okresu. Wykorzystanie innych stóp procentowych WIBOR nie ma istotnego wpływu na prognozę przyszłej wypłaty, zob. Pajor (2007). W modelach ze stałą stopą procentową przyjęto $r = 6.5\%$ w skali roku, zgodnie z założeniami GPW i Krajowego Depozytu Papierów Wartościowych³ (KDPW), por. Kostrzewski i Pajor (2006).

Tabela 1 przedstawia charakterystyki rozkładów predyktywnych zdyskontowanej wypłaty europejskich opcji kupna na indeks WIG20 z datą wykonania na 18 marca i 17 czerwca 2005, otrzymane w modelach ze stałą stopą procentową

² Do wyznaczenia rozkładów predyktywnych wektora przyszłych obserwacji oraz ich charakterystyk wykorzystano metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa: próbnik Gibbsa, wewnątrz którego stosowano algorytm Metropolisa i Hastingsa. Metody te, w kontekście modeli SV, zostały omówione w pracach: Jacquier, Polson i Rossi (2004), Pajor (2003, 2005), Tsay (2002).

³ por.: Informacja KDPW o wysokości depozytów zabezpieczających na 31 grudnia 2004r. na podstawie komunikatu NR 393/DZ/2004 z dnia 31 grudnia 2004r.

ową: AR(1)-BSV (czyli w przypadku $v = \infty$, $\rho = 0$) i AR(1)-FCSV⁴ oraz w modelu AR(1)-TSV. We wszystkich modelach uzyskano bardzo rozproszone rozkłady predyktywne zdyskontowanej wypłaty, o czym świadczy wartość rozstępu międzykwartylowego (IQR). Histogramy dla wybranych opcji przedstawiono na rysunku 1, gdzie rzeczywistą wartość zdyskontowanej wypłaty zaznaczono trójkątem. Jest ona zlokalizowana między pierwszym kwartylem a medianą predyktywnego rozkładu. Dla wszystkich opcji prawdopodobieństwo ich niewykonania jest wyższe w modelu AR(1)-FCSV i równocześnie w tym modelu niepewność związana z przyszłą wypłatą jest najmniejsza (wartości IQR są odpowiednio najmniejsze).

Tabela 1. Charakterystyki rozkładów predyktywnych zdyskontowanej wypłaty europejskich opcji kupna na indeks WIG20 z datą wykonania na 18 marca i 17 czerwca 2005. W modelach ze stałą stopą procentową $r=0.065/251$

Model		s=55					s=115				
		K					K				
BSV	Kwanty	1700	1800	1900	2000	2100	1700	1800	1900	2000	2100
	0.05	25.73	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.25	185.38	88.66	0	0	0	163.37	64.17	0	0	0
	0.50	298.53	202.12	102.3	2.79	0	340.38	245.52	147.87	49.91	0
	0.75	417.57	322.4	221.65	122.14	26.97	534.13	442.68	342.55	244.59	150.97
	0.95	614.11	519.56	422.53	319.92	228.78	873.58	783.99	689.13	589	498.17
	IQR	232.19	233.74	221.65	122.14	26.97	370.76	378.51	342.55	244.59	150.97
$P(W_{T+T}=0 y)$	0.036	0.115	0.273	0.494	0.702	0.093	0.178	0.292	0.430	0.564	
FCSV	kwantyl	1700	1800	1900	2000	2100	1700	1800	1900	2000	2100
	0.05	11.16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.25	171.74	73.47	0	0	0	131.44	35.96	0	0	0
	0.50	283.03	185.38	88.66	0	0	305.97	210.8	118.42	20.77	0
	0.75	399.59	302.25	207.08	106.95	5.58	495.07	399.59	310.31	210.18	106.33
	0.95	592.1	492.9	403	300.39	199.33	817.78	722.92	637.67	535.68	428.42
	IQR	227.85	228.78	207.08	106.95	5.58	363.63	363.63	310.31	210.18	106.33
$P(W_{T+T}=0 y)$	0.044	0.132	0.298	0.524	0.740	0.114	0.208	0.329	0.470	0.6196	
rzeczywista wypłata	275	175	75	0	0	324	224	124	24	0	
wypłata zdysk.	271.11	172.53	73.94	0	0	314.49	217.43	120.36	23.30	0	
TSV	kwantyl	1700	1800	1900	2000	2100	1700	1800	1900	2000	2100
	0.05	49.29	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.25	200.26	100.44	2.17	0	0	192.51	90.83	0	0	0
	0.50	305.66	206.15	105.4	11.16	0	355.88	255.13	155	65.72	0
	0.75	415.09	317.44	214.83	121.83	21.39	531.03	434.31	330.15	243.04	144.77
	0.95	596.13	501.89	394.63	307.52	202.43	838.55	747.1	629.3	549.94	448.88
	IQR	214.83	217	212.66	121.83	21.39	338.52	343.48	330.15	243.04	144.77
$P(W_{T+T}=0 y)$	0.026	0.094	0.246	0.473	0.707	0.068	0.146	0.261	0.396	0.553	
wypłata zdysk.	271.07	172.5	73.93	0	0	315.01	217.79	120.56	23.33	0	
kurs zamk. z 31.12.2004	285	200	105	50	15.1	-	189	119	78	45	

Źródło: obliczenia własne.

⁴ Wartość oczekiwana a posteriori dla v wynosi 14.02 z odchyleniem standardowym a posteriori 6.49; natomiast dla ρ wartość oczekiwana jest równa -0.074 z odchyleniem 0.177.

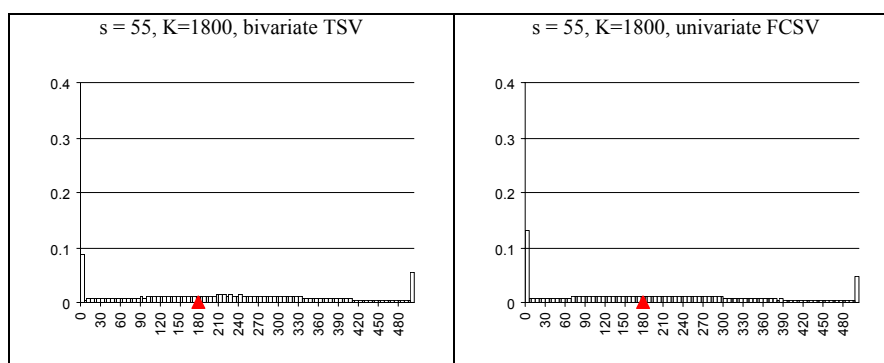
Jeśli porównamy mediany predykcyjnych rozkładów z rzeczywistymi wartościami zdyskontowanych wypłat (zaobserwowanymi ex-post, zob. tabela 2), to model AR(1)-FCSV (ze stałą stopą procentową) generuje najlepsze prognozy w sensie średniego błędu predykcji (ME). W modelach z warunkowym rozkładem normalnym (czyli AR(1)-BSV i AR(1)-TSV), w każdym przypadku, mediany rozkładów predykcyjnych są wyższe niż rzeczywiste wartości zdyskontowanej wypłaty, równocześnie niepewność związana z przyszłą wypłatą (mierzona rozstępem międzykwartylowym) jest większa niż w modelu AR(1)-FCSV. Dwuwymiarowy model AR(1)-TSV, w sensie ME, wypada najgorzej.

Tabela 2. Różnice między rzeczywistą zdyskontowaną wypłatą a medianą rozkładu predykcyjnego: $C_i - \hat{C}_i$, gdzie C_i oznacza rzeczywistą zdyskontowaną wypłatę, \hat{C}_i - medianę

$$\text{rozkładu predykcyjnego, } ME = (1/n) \sum_{i=1}^n C_i - \hat{C}_i$$

Model	S=55					S=115					ME
	1700	1800	1900	2000	2100	1700	1800	1900	2000	2100	
BSV	-27.42	-29.59	-28.36	-2.79	0.00	-25.89	-28.09	-27.51	-26.61	0.00	-19.63
FCSV	-11.92	-12.85	-14.72	0.00	0.00	8.52	6.63	1.94	2.53	0.00	-1.99
TSV	-34.59	-33.65	-31.47	-11.16	0.00	-40.87	-37.34	-34.44	-42.39	0.00	-26.59

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 1. Histogramy rozkładów predykcyjnych zdyskontowanej wypłaty

Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

Na przykładzie europejskich opcji kupna na indeks WIG20 pokazano, że uwzględnienie w modelu wyceny opcji stochastycznej stopy procentowej nie “poprawia” jakości prognoz zdyskontowanej wypłaty. Modele SV ze stałą stopą procentową generują lepsze prognozy przyszłej wypłaty (na poziomie mediany rozkładu predykcyjnego zdyskontowanej wypłaty) niż model ze stochastyczną stopą procentową. Ponadto w modelu FCSV ze stałą stopą procentową i grubszymi ogonami niż modele BSV i TSV, mediany predykcyjnych rozkładów

przyszłych wypłat są najbliższe rzeczywistym wartościom tych wypłat (zaobserwowanym ex-post). Stąd na prognozę przyszłej wypłaty większy wpływ ma specyfikacja rozkładu warunkowego dla stóp zmian cen instrumentu podstawowego niż uzmiennienie stopy procentowej. Duże rozproszenie rozkładów predyktywnych wskazuje jednak na ogromną niepewność co do przyszłej wypłaty.

Literatura

- Amin, K.I., Ng, V.K. (1993), Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility, *The Journal of Finance*, vol. 48, no. 3, 881–910.
- Bauwens, L., Lubrano, M. (1998), Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler, *Econometrics Journal* 1, C23–C46.
- Bauwens, L., Lubrano, M. (2002), Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models, *Journal of Empirical Finance* 9, 321–342.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Chichester.
- Heston, S.L. (1993), A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies*, vol. 6, no 2, 327–343.
- Hobson, D. (2004), A Survey of Mathematical Finance, (Adams Prize Essay). *Proceedings of the Royal Society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 460:2052, 3369–3401, 2004. Published electronically at FirstCite October 2004.
- Hull, J., White, A. (1987), The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, vol. 42, 281–300.
- Jacquier, E., Polson, N., Rossi, P. (1994), Bayesian analysis of stochastic volatility models, [with discussion], *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, 371–417.
- Jacquier, E., Polson, N., Rossi, P. (2004), Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors, *Journal of Econometrics*, vol. 122, 185–212.
- Kostrzewski, M., Pajor, A. (2006), Bayesowska wycena opcji na index WIG20: procesy Itô a dyskretne procesy SV, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, in press
- Osiewalski, J., Pipień, M. (2003), Bayesian Analysis and Option Pricing in Univariate GARCH Models with Asymmetries and GARCH-in-Mean Effects, *Przegląd Statystyczny* vol. 50, No 3, 5–29.
- Pajor, A. (2003), Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych, *Monografie: Prace Doktorskie*, Nr 2, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków.
- Pajor, A. (2005), Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Model and Portfolio Allocation, [in:] *Issues in Modelling, Forecasting and Decision-Making in Financial Markets*, *Acta Universitatis Lodzensis – Folia Oeconomica* 192, 229–249.
- Pajor, A. (2007), Bayesian Forecasting of the Payoff of European Call Options on WIG20 Index under Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rates, referat wygłoszony na 6th *Annual International Conference Forecasting Financial Markets and Economic Decision-Making FindEcon 2007*, University of Łódź, 9–12 May 2007, przesłany do recenzji.
- Tsay, R. S. (2002), *Analysis of Financial Time Series. Financial Econometrics*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, INC.
- Wiggins, J. B. (1987), Option Values under Stochastic Volatility. Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics* 19, 351–372.