

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Magdalena Osińska, Marcin Fałdziński
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Modele GARCH i SV z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych

1. Wstęp

W badaniach naukowych oraz w życiu codziennym można zaobserwować tendencję do uśredniania wszystkich obserwowanych wartości. Można jednak wskazać wiele przypadków, kiedy miary średnie nie są odpowiednie. W przypadku wydarzeń o niespotykanej wielkości właściwa jest teoria wartości ekstremalnych (*Extreme Value Theory*, EVT). Metody estymacji w EVT można podzielić ogólnie na dwie grupy: metody nieparametryczne i parametryczne. Przedmiotem analizy jest metoda *Peaks over Threshold* (POT), należąca do grupy metod parametrycznych.

2. Metoda *Peaks over Threshold* w teorii wartości ekstremalnych

Metoda *Peaks over Threshold* zakłada, że dany jest szereg obserwacji X_1, \dots, X_n (i.i.d.) pochodzących z nieznannej dystrybuanty F , przy czym interesujące są przekroczenia powyżej zadanej wysokiej wartości progowej u . Warunkowy rozkład przekroczeń F_u ma postać $F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$, $0 \leq y \leq x_F - u$, gdzie X jest zmienną losową, u jest daną wartością progową, a $y = x - u$ są przekroczeniami (McNeil, Frey, 2000). Dystrybuanta F_u może być zapisana za pomocą:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (1)$$

Realizacje zmiennej losowej X mieszczą się w przedziale od 0 do u , stąd estymacja F w tym przedziale nie sprawia problem. Postać rozkładu F_u można znaleźć dzięki poniższemu twierdzeniu.

Twierdzenie 1 Pickandsa-Balkemy-de Haana (Pickands, 1975, Balkema, de Haan, 1974).

Dla rozkładów danych rzeczywistą dystrybuantą F , warunkowy rozkład przekroczeń $F_u(y)$, dla dużej wartości u , jest dobrze aproksymowany za pomocą $F_u(y) \approx G_{\gamma,\sigma}(y)$, $u \rightarrow \infty$, gdzie

$$G_{\gamma,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}y\right)^{-1/\gamma} & \text{jeżeli } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \text{jeżeli } \gamma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

dla $y \in [0, (x_F - u)]$ jeżeli $\gamma \geq 0$ i $y \in [0, -\sigma/\gamma]$ jeżeli $\gamma < 0$, gdzie $G_{\gamma,\sigma}$ jest uogólnionym rozkładem Pareto. Schemat metody POT przedstawia się jak następuje:

Wybór wartości progowej u dla danego szeregu zmiennych X_1, \dots, X_n . Niech N_u będzie liczbą obserwacji przekraczających u ($X_{i_1}, \dots, X_{i_{N_u}}$), czyli $Y_j = X_{i_j} - u \geq 0$. Dopasowanie $G_{\gamma,\sigma}$ do przekroczeń Y_1, \dots, Y_{N_u} , aby otrzymać oszacowanie parametrów γ i σ . (Beirlant, Mattys, 2001).

Zgodnie z twierdzeniem Pickandsa-Balkemy-de Haana dla $x \geq u$ można użyć estymację ogona $\hat{F}(x) = (1 - F_n(u))G_{\gamma,\mu,\sigma}(x) + F_n(u)$ do aproksymacji funkcji dystrybuanty $F(x)$. Można pokazać, że $\hat{F}(x)$ jest również uogólnionym rozkładem Pareto, z tym samym parametrem kształtu γ , ale z parametrem skali $\tilde{\sigma} = \sigma(1 - F_n(u))^\gamma$ i z parametrem położenia $\tilde{\mu} = \mu - \tilde{\sigma} \left((1 - F_n(u))^{-\gamma} - 1 \right) / \gamma$. Dlatego też estymator POT kwantyla x_p otrzymany jest przez odwrócenie formuły $\hat{F}(x)$. Następnie zamieniając nieznane parametry rozkładu GPD przez oszacowane parametry $(\hat{\gamma}, \hat{\sigma})$ otrzymujemy:

$$\hat{x}_p = \hat{F}^{\leftarrow}(p) = G_{\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}^{-1} \left(\frac{p - F_n(u)}{1 - F_n(u)} \right) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} \left(\left(\frac{1 - p}{1 - F_n(u)} \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right) \quad (3)$$

Jeśli N_u jest liczbą przekroczeń powyżej wartości progowej u i n jest liczbą wszystkich obserwacji w szeregu to estymator kwantyla wygląda następująco:

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1-p) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right) \quad (4)$$

gdzie p jest bliskie 1. Ważnym zagadnieniem jest wybór wartości progowej u , od której uzależnione są wartości oszacowanych parametrów. W teorii sugeruje się, aby wybór był oparty na kompromisie pomiędzy obciążeniem i wariancją. W przypadku większej wartości progowej, powinno otrzymać się mniejsze obciążenie. Z drugiej strony dostaje się mniej przekroczeń co skutkuje większą wariancją.

3. Value-at-Risk i Expected Shortfall w teorii wartości ekstremalnych

Wartość zagrożona w teorii wartości ekstremalnych dla metody *Peaks over Threshold* jest równa:

$$VaR(\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} \left(\left(\frac{n}{N_u} \alpha \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right), \quad (5)$$

gdzie α jest poziomem tolerancji. Z powodu wad wartości zagrożonej powstała alternatywna miara ryzyka, która nazywana jest oczekiwanym niedoborem (*Expected Shortfall*, ES). Aby móc skonstruować oczekiwany niedobór Artzner i in. (1998) zdefiniowali na początku miarę ryzyka za pomocą czterech aksjomatów. Miara ryzyka, która spełnia aksjomaty monotoniczności, subaddytywności, dodatniej jednorodności i niezmienniczości ze względu na translację, nazywana jest koherentną miarą ryzyka. Z punktu widzenia koherentności, VaR ogólnie nie jest miarą ryzyka, ponieważ nie spełnia aksjomatu subaddytywności. Dzięki twierdzeniu 1 wiemy, że warunkowy rozkład przekroczeń dla wartości progowej u jest równy $F_u(y) \approx G_{\gamma, \sigma}(y)$. Jeśli wartością progową będzie $VaR(\alpha)$, to warunkowy rozkład przekroczeń z taką wartością progową jest również uogólnionym rozkładem Pareto (GPD) z tym samym parametrem kształtu, ale innym parametrem skalującym. Konsekwencją tego równania $F_u(y) \approx G_{\gamma, \sigma}(y)$, jest następująca formuła:

$$F_{VaR(\alpha)}(y) \approx G_{\gamma, \sigma + \gamma(VaR(\alpha) - u)}(y). \quad (6)$$

Zauważając, że dla $\gamma < 1$ średnia z rozkładu jest równa $(\sigma + \gamma(VaR(\alpha) - u)) / (1 - \gamma)$, możemy otrzymać *Expected Shortfall* dla metody *Peaks over Threshold*:

$$ES(\alpha) = \frac{VaR(\alpha)}{1 - \gamma} + \frac{\sigma - \gamma u}{1 - \gamma}. \quad (7)$$

Oczekiwany niedobór portfela określany jest jako $ES(\alpha) = E[X | X > VaR(\alpha)]$, tzn., że jest średnią stratą, pod warunkiem, że VaR zostanie przekroczony. Dowd (2002) przedstawił sposób szacowania ES, jako średnią ważoną z wartości zagrożonych ogona rozkładu.

Do testowania wstecznego użyto trzech testów: test liczby przekroczeń LR_{uc} , test niezależności przekroczeń LR_{ind} (Haas, 2001), test niezależności przekroczeń LR_{ind} (Christoffersen, 1998). Powyższe metody nie dają możliwości stworzenia rankingu modeli, dlatego też Lopez (1999) zaproponował przyjęcie jako kryterium funkcji straty. Angelidis i Degiannakis (2006) wskazują na dwa braki podejścia Lopeza. Po pierwsze, model, który nie generuje żadnego przekroczenia uznawany jest za najlepszy. Po drugie, zwrot y_{t+1} powinien być porównany z oczekiwanym niedoborem (ES), ponieważ wartość zagrożona (VaR) nic nie mówi na temat wielkości oczekiwanych strat. Dlatego też zaproponowali następujące funkcje straty:

$$\Psi_{1,t+1} = \begin{cases} |y_{t+1} - ES_{t+1|t}| & \text{jeżeli nastąpi przekroczenie} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (8)$$

$$\Psi_{2,t+1} = \begin{cases} (y_{t+1} - ES_{t+1|t})^2 & \text{jeżeli nastąpi przekroczenie} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (9)$$

Aby ocenić, który model jest najlepszy, dla każdego oblicza się średni błąd absolutny (MAE) $MAE = \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \Psi_{1,t} / \tilde{T}$, oraz średni błąd kwadratowy (MSE)

$MSE = \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \Psi_{2,t} / \tilde{T}$, gdzie \tilde{T} jest liczbą wykonanych prognoz, a funkcja straty (LF) jest sumą tych błędów (Angelidis, Degiannakis, 2006).

4. Metoda POT z zastosowaniem modeli zmienności

Istniejące podejścia do modelowania rozkładu zysków/strat portfela instrumentów finansowych można schematycznie podzielić na trzy grupy: nieparametryczne metody symulacji historycznej, parametryczne metody oparte na modelach zmienności oraz metody oparte na teorii wartości ekstremalnych. McNeil i Frey (2000) połączyli wszystkie trzy metody, aby usunąć ich wady i wydobyć najlepsze cechy. Przyjmijmy, że X_t jest szeregiem czasowym dziennych obserwacji stóp zwrotów instrumentu finansowego, postaci $X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$, gdzie Z_t jest białym szumem z zerową średnią, jednostkową wariancją i dystrybuantą rozkładu brzegowego $F_Z(z)$. Zakładamy, że μ_t jest

oczekiwanym zwrotem, a σ_t jest zmiennością stóp zwrotów. Aby zastosować procedurę estymacji dla procesu X_t należy wybrać dynamiczny model warunkowej średniej i warunkowej wariancji. McNeil i Frey zdefiniowali proste jednodniowe formy miar ryzyka w stosunku do procesu X_t jako:

$$VaR_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR(Z)_q \quad (10)$$

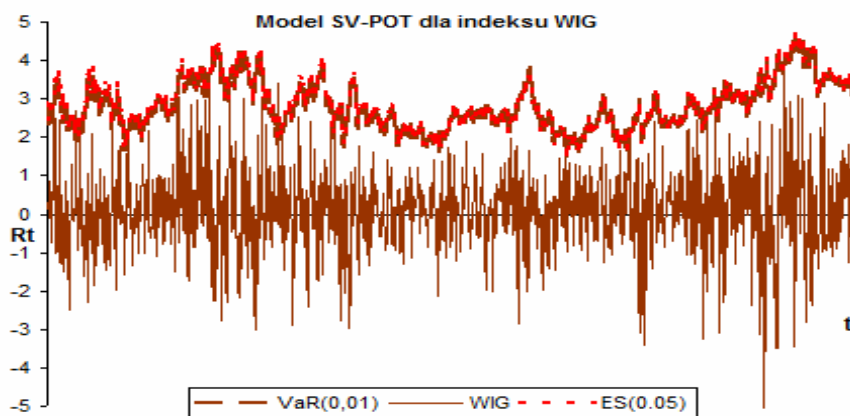
$$ES_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} ES(Z)_q, \quad (11)$$

gdzie $VaR_q^t(Z)$ jest wartością zagrożoną procesu Z_t , a $ES_q^t(Z)$ jest odpowiadającym oczekiwany niedoborem. Podejście polega na dopasowaniu modelu zmienności do stóp zwrotów. Szacuje się μ_{t+1} oraz σ_{t+1} i oblicza się standaryzowane reszty modelu. Następnie stosuje się teorię wartości ekstremalnych, aby otrzymać wartości $VaR_q^t(Z)$ i $ES_q^t(Z)$ za pomocą metody POT na podstawie standaryzowanych reszt modelu. Problem przed jakim stajemy w przypadku tej metody dotyczy wyboru liczby ekstremów k branych do estymacji. Wiele autorów sugerowało różne rozwiązania, ale żadne z nich nie zostało uznane za uniwersalne.

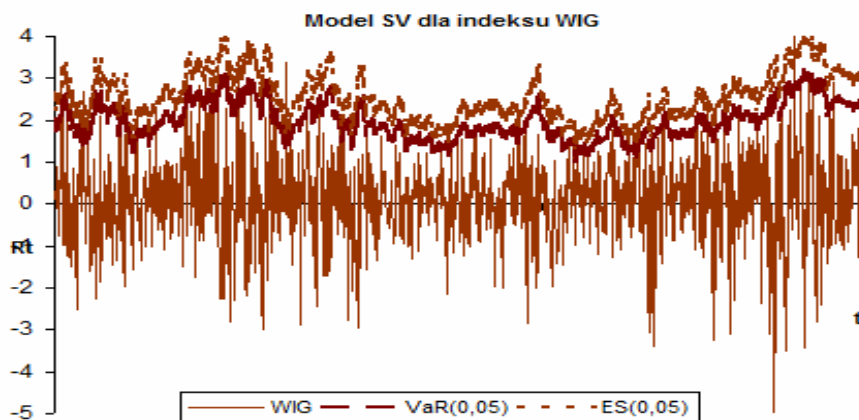
5. Wyniki symulacji

Przedmiotem symulacji było porównanie oszacowań wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru dla wybranych modeli zmienności z modelami, gdzie zastosowano EVT. Porównanie polegało na wybraniu najlepszego modelu na podstawie funkcji straty zaproponowanej przez Angelidisa i Degiannakisa (2006). Do symulacji wykorzystano model SV z rozkładem normalnym oraz model GARCH z rozkładami: normalnym i t-Studenta. Parametry szacowane były za pomocą metody największej wiarygodności w przypadku modeli GARCH i metody *quasi*-największej wiarygodności w przypadku modelu SV. W tabelach 1 i 2 pokazane zostały wyniki symulacji przeprowadzonych na danych dziennych. W symulacjach użyto szeregów złożonych z 3000 obserwacji (dane dzienne: 07.11.1994 – 31.10.2006), dla których szacowano 1000 wartości zagrożonych i oczekiwanych niedoborów dla $k \in [20; 350]$. Do wyznaczenia ES dla modeli zmienności użyto podejścia Dowda (2002), stąd też szacowano 1000 wartości zagrożonych do określenia jednego oczekiwanego niedoboru. Najniższe wartości funkcji straty wystąpiły dla modeli z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych. Ponadto model SV-POT jest zazwyczaj lepszy dla indeksów giełdowych, a model GARCH-POT dla kursów walut. Należy zwrócić uwagę na fakt, że liczba przekroczeń w przypadku modeli z EVT jest zazwyczaj mniejsza niż oczekiwana liczba przekroczeń, natomiast dla standardowych modeli zmienności liczba przekroczeń jest większa. W przypadku modeli zmienności z EVT można odnaleźć takie wartości k (liczba ekstremów), gdzie staty-

styka LR_{uc} jest znacznie niższa, ale z drugiej strony wartość funkcji straty jest nieznacznie większa. Należałoby zdecydować czy wybrać model, który posiada lepsze właściwości w świetle statystyk testowania wstecznego, czy wybrać model, który lepiej szacuje VaR i ES (mniejsza wartość funkcji straty). Tutaj zdecydowano pokazywać takie modele, które charakteryzowały się najmniejszymi wartościami funkcji straty. Na wykresach 1 i 2 przedstawione zostały wartości VaR i ES na poziomie $\alpha = 0.05$ dla indeksu WIG wyznaczone według modelu SV i SV-POT. Model SV-POT znacznie lepiej szacuje oczekiwaną wartość stóp zwrotów w przypadkach zaburzeń na rynku. Drugą istotną własnością jaką można zauważyć w przypadku modelu SV-POT (ogólnie modele z EVT) jest to, że oszacowania VaR są bardzo bliskie oszacowań ES, czego nie można powiedzieć o modelach bez użycia EVT.



Wykres 1. Oszacowania VaR i ES modelu SV na poziomie $\alpha = 0.05$ dla indeksu WIG
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 2. Oszacowania VaR i ES modelu SV-POT na poziomie $\alpha = 0.05$ dla indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Wyniki symulacji dla indeksu WIG i EUR-USD (dane dzienne: 07.11.1994 – 31.10.2006, liczba obserwacji = 3000, liczba powtórzeń 1000)

WIG, $\alpha=0.05$							
Model	k	N	LRuc	LRind K.	LRind Ch.	LF	Ranking
GARCH	-	56	0.73	73.77	1.07	0.0656	5
GARCH TS	-	60	1.98	79.29	1.54	0.1438	6
SV	-	56	0.73	63.14	0.01	0.0276	4
GARCH-POT	41	39	2.75	61.38	1.23	0.017	3
GARCH-POT TS	36	38	3.29	58.75	1.41	0.0163	2
SV-POT	22	11	46.27	67.54	2.61	0.0052	1
WIG, $\alpha=0.01$							
Model	k	N	LRuc	LRind K.	LRind Ch.	LF	Ranking
GARCH	-	16	3.08	31.74	0.52	0.00492	4
GARCH TS	-	9	0.10	18.2	0.16	0.00496	5
SV	-	27	19.93	55.81	0.10	0.01168	6
GARCH-POT	52	10	0.00	18.64	0.20	0.00394	3
GARCH-POT TS	32	11	0.10	21.35	0.24	0.00374	2
SV-POT	252	6	1.89	22.11	5.05	0.00279	1
EUR – USD, $\alpha=0.05$							
Model	k	N	LRuc	LRind K.	LRind Ch.	LF	Ranking
GARCH	-	21	22.44	27.90	0.90	0.0179	4
GARCH TS	-	23	19.04	26.62	1.08	0.0392	6
SV	-	74	10.63	96.92	0.04	0.0203	5
GARCH-POT	74	14	37.70	34.98	0.40	0.0027	2
GARCH-POT TS	66	14	37.70	34.98	0.40	0.0026	1
SV-POT	130	34	6.04	24.18	2.40	0.0103	3
EUR – USD, $\alpha=0.01$							
Model	k	N	LRuc	LRind K.	LRind Ch.	LF	Ranking
GARCH	-	1	13.48	11.11	0.00	0.00020	4
GARCH TS	-	1	13.48	11.11	0.00	0.00015	3
SV	-	48	76.06	113.55	4.74	0.01485	6
GARCH-POT	24	1	13.48	11.11	0.00	0.00002	1
GARCH-POT TS	104	1	13.48	13.48	0.00	0.00005	2
SV-POT	130	22	10.84	31.08	0.99	0.00688	5

Oznaczenia: k - liczba ekstremów wziętych do estymacji dla modeli z zastosowaniem EVT, N - liczba przekroczeń stopy zwrotu ponad VaR, LR_{uc} - statystyka liczby przekroczeń, $LR_{ind}K$ - statystyka Kupca na niezależność przekroczeń, $LR_{ind}CH$ - statystyka Christoffersena na niezależność przekroczeń, LF - wartość funkcji straty i α - poziom istotności.

Źródło: obliczenia własne.

Z przedstawionych rezultatów empirycznych wynika, że modele zmienności z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych lepiej szacują oczekiwane wartości przyszłych stóp zwrotów, co może być bardzo użyteczne w przypadku zjawisk o charakterze szokowych.

Tabela 2. Wyniki symulacji (dane dzienne: 07.11.1994 – 31.10.2006, liczba obserwacji = 3000, liczba powtórzeń 1000)

Ranking modeli wg funkcji straty dla $\alpha=0.05$						
Szereg	GARCH	GARCH TS	SV	GARCH-POT	GARCH-POT TS	SV-POT
WIG	5	6	4	3	2	1
WIG20	5	6	4	2	3	1
NSDQ100	4	5	6	2	3	1
USD-PLN	3	5	4	1	2	6
EUR-USD	4	6	5	2	1	3
Ranking modeli wg funkcji straty dla $\alpha=0.01$						
Szereg	GARCH	GARCH TS	SV	GARCH-POT	GARCH-POT TS	SV-POT
WIG	4	5	6	3	2	1
WIG20	4	5	6	3	2	1
NSDQ100	3	2	6	4	5	1
USD-PLN	4	3	5	2	1	6
EUR-USD	4	3	6	1	2	5

Źródło: obliczenia własne.

Literatura

- Angelidis, T., Degiannakis, S. (2006), Backtesting VaR Models: An Expected Shortfall Approach, Working Papers, University of Crete, Athens University of Economics and Business.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1998), Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- Balkema, A.A., De Haan L., (1974), Residual Life Time at Great Age, *Annals of Probability*, vol.2, No. 5, 792–804.
- Beirlant, J., Matthys, G., (2001), Extreme quantile estimation for heavy-tailed distributions. *Mimeo*.
- Christoffersen, P.F. (1998), Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review*, vol. 39, No. 4.
- Dowd, K. (2002), Measuring Market Risk, *John Wiley & Sons Ltd.*, New York
- Haas, M. (2001), New Methods in Backtesting, *Financial Engineering Research Center*, Bonn.
- McNeil, J.A., Frey, F. (2000), Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, vol. 7, 271–300.
- Pickands, J. (1975), Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, *Annals of Statistics*, vol. 3, No 1, 119–131.
- Tasche, D. (2002), Expected Shortfall and Beyond, *Journal of Banking & Finance*, 26, 1519–1533.