DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Iwona Müller - Frączek
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wykorzystanie multiczęstościowego modelu Markowa do opisu zmienności szeregów finansowych

1. Wstęp

W ciągu minionych 10 lat, odkąd do modelowania szeregów finansowych wykorzystano procesy multifraktalne (Mandelbrot, Fisher, Calvet, 1997), podejście takie zyskuje na popularności. Pojawiają się nowe wersje modeli, inne metody estymacji oraz dokonywane są próby wykorzystania multifraktali w zagadnieniach szczegółowych.

W referacie przywołano model multifraktalnej zmienności stochastycznej, zwany *multiczęstościowym modelem Markowa*, zaproponowany do opisu kursów wymiany walut przez Calveta i Fishera (2004). Wykorzystano zawartą w tej pracy procedurę estymacji parametrów takiego modelu do badania szeregów finansowych pochodzących z GPW w Warszawie.

2. Opis multiczęstościowego modelu Markowa

W modelach zmienności stochastycznej zakłada się, że proces innowacji, $\{x_t = X_t - X_{t-1}\}$ pochodzący od procesu ekonomicznego $\{X_t\}$ o dużej zmienności (np. logarytmiczna cena aktywu finansowego), da się przedstawić w postaci:

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t . \tag{1}$$

W opisie tym występują dwa niezależne od siebie źródła losowości: proces $\{\varepsilon_t\}$ niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym oraz stochastyczny proces zmienności chwilowej $\{\sigma_t\}$, który może przyjmować różną postać w zależności od konkretnego modelu.

W modelu multifraktalnym proces ten ma postać multiplikatywną:

$$\sigma_t = \sigma\sqrt{M_{1,t} \cdot M_{2,t} \cdot \ldots \cdot M_{\bar{k},t}}\,, \tag{2}$$

w której σ jest dodatnią stałą, a $M_{k,t}$ są nieujemnymi czynnikami losowymi, dla których $E(M_{k,t}) = 1$. Dodatkowo zakłada się, że dla ustalonego *t*, wszystkie czynniki $M_{1,t}, M_{2,t}, \ldots, M_{\bar{k},t}$ są statystycznie niezależne, a wtedy parametr σ jest równy bezwarunkowemu odchyleniu standardowemu innowacji x_t.

W multifraktalnym modelu Markowa przyjmuje się ponadto, że $M_t = \left(M_{1,t}, M_{2,t}, \ldots, M_{\bar{k},t}\right)$ jest procesem Markowa rzędu pierwszego. Niejawne M_t możemy wówczas nazywać *wektorem stanu zmienności*, a każdą $M_{k,t}$ - *zmienną stanu zmienności*. Poszczególne zmienne odpowiadają różnym częstościom występowania zjawisk mających wpływ na zmienność procesu. Maksymalna dopuszczalna częstość $\bar{k} = 2,3,\ldots$ jest z góry przyjmowana.

Dynamika procesu $\{\sigma_t\}$ jest konsekwencją konstrukcji kolejnych wektorów stanu zmienności. Konstrukcja ta jest iteracyjna. Bazuje ona na jednakowym, z góry zadanym, rozkładzie *M* dla wszystkich mnożników $M_{k,t}$ oraz prawdopodobieństwach przejścia γ_k różnych dla poszczególnych częstości. W kolejnych krokach iteracji, znając wektor stanu M_{t-1}, tworzymy poszczególne składowe późniejszego wektora M_t. Dla dowolnego $k = 1,\ldots,\bar{k}$ mogą zajść dwie sytuacje: z prawdopodobieństwem przejścia γ_k składowa $M_{k,t}$ jest niezależnie losowane z rozkładu *M* albo z prawdopodobieństwem przeciwnym zachowuje wartość z poprzedniej chwili czyli $M_{k,t-1}$.

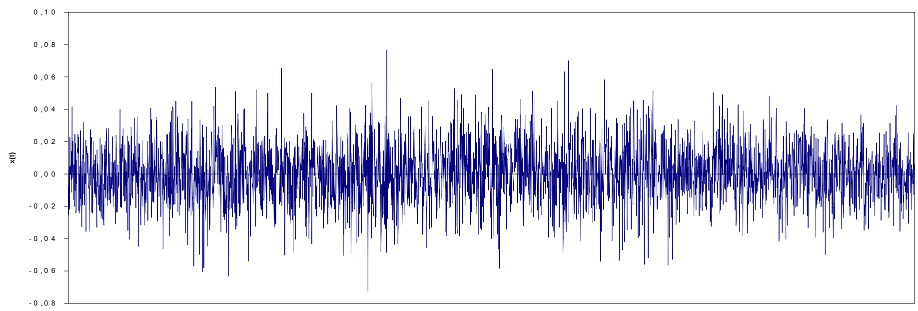
Na wektor prawdopodobieństw $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\bar{k}})$ nakłada się założenia:

$$\gamma_k = 1 - (1 - \gamma_1)\left(b^{k-1}\right), \tag{3}$$

gdzie $\gamma_1 \in (0,1)$, $b \in (0,\infty)$. Powodują one, że opisany model z czasem dyskretnym jest zbieżny do tzw. multifraktali Poissona, dla których podane zostały teoretyczne podstawy prognozowania zmienności (Calvet, Fisher, 2001).

W praktyce wykorzystuje się dwa typy multiczęstościowych modeli Markowa, jeden z czynnikami o rozkładzie dwupunktowym, drugi – normalnym. Są one bardzo oszczędnie parametryzowane, a ilość parametrów nie zależy od zakładanej maksymalnej częstości bodźców działających na system.

W pierwszym przypadku zakłada się, że czynnik *M* może przyjąć wartość m_0 albo $2 - m_0$ z jednakowym prawdopodobieństwem. Model posiada wówczas tylko cztery parametry $\psi \equiv \left(m_0, \sigma, b, \gamma_{\bar{k}}\right)$ nawet przy dużej ilości stanów (np. 128 dla $\bar{k} = 7$). Parametry modelu można estymować metodę największej wiarygodności, opisaną (na podstawie Calvet, Fisher, 2004) w następnym punkcie i wykorzystaną w badaniach empirycznych. Przykładową symulowaną trajektorię takiego modelu przedstawiono na wykresie 1.



Wykres 1. Symulacja multiczęstościowego modelu Markowa z czynnikami o rozkładzie dwupunktowym $\bar{k}=4$, $m_0=1.23$, $\sigma=0.02$, $b=15$, $\gamma_{\bar{k}}=0.59$.

Źródło: obliczenia własne.

Model z czynnikami o rozkładzie normalnym posiada pięć parametrów, jednak do ich estymacji, ze względu na nieskończoną liczbę stanów, nie można stosować tej samej metody co w pierwszym przypadku. W tym celu wykorzystuje się uogólnioną metodę momentów przedstawioną przez Luxa (2001).

3. Estymacja parametrów modelu

Wektor zmienności chwilowej M_t dla czynników losowych o rozkładzie dwupunktowym przyjmuje $d=2^{\bar{k}}$ wartości: $m^1, m^2, ..., m^{\bar{k}} \in R_+^{\bar{k}}$. Dynamikę łańcucha Markowa $\{M_t, t=0,...,T\}$ charakteryzuje wówczas macierz przejścia $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le d}$ o elementach:

$$a_{i,j}=P\left(M_{t+1}=m^j \mid M_t=m^i\right)=\prod_{k=1}^{\bar{k}}\left[(1-\gamma_k)1_{\{m_k^i=m_k^j\}}+\frac{1}{2}\gamma_k\right]. \tag{4}$$

Niech $n(.)$ oznacza gęstość standardowego rozkładu normalnego, natomiast $g(m)$ oznacza iloczyn wszystkich współrzędnych wektora m. Można pokazać, że w przypadku opisywanego modelu logarytm funkcji wiarygodności ma postać:

$$\ln L(x_1,...,x_T;\psi)=\sum_{t=1}^{T}\ln\left[\omega(x_t)\cdot(\Pi_{t-1}A)\right], \tag{5}$$

gdzie

$$\omega(x_t)=\left[\frac{n\left(x_t/\sigma\cdot g\left(m^1\right)\right)}{\sigma\cdot g\left(m^1\right)},...,\frac{n\left(x_t/\sigma\cdot g\left(m^d\right)\right)}{\sigma\cdot g\left(m^d\right)}\right], \tag{6}$$

natomiast wektor $\Pi_t = \left(\Pi_t^1,...,\Pi_t^k\right)$ jest wektorem warunkowych prawdopodobieństw

$$\Pi_t^j = P\left(M_t = m^j \mid x_1,...,x_t\right), \tag{7}$$

które można wyznaczyć rekurencyjnie zadając wektor początkowy $\Pi_0 = \left(2^{-\bar{k}},...,2^{-\bar{k}}\right)$ oraz regułę:

$$\Pi_{t+1} = \frac{\omega\left(x_{t+1}\right) * \left(\Pi_t A\right)}{\left[\omega\left(x_{t+1}\right) * \left(\Pi_t A\right)\right]\iota'}. \tag{8}$$

Występujący w powyższym wzorze symbol $*$ oznacza działanie, którego wynikiem jest wektor, o i-tej współrzędnej będącej iloczynem i-tych współrzędnych wektorów składowych, natomiast $\iota = (1,...,1) \in R^d$.

4. Przykład empiryczny

Omówioną w poprzednim punkcie procedurę wykorzystano do estymacji parametrów Multiczęstościowego Modelu Markowa dla trzech szeregów pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Badaniu poddano dzienne logarytmiczne stopy zwrotu indeksu WIG20 oraz spółek Irena i Żywiec za okres od początku 1995 roku do końca stycznia roku 2007.

Niestety nie powiodła się próba dopasowania multifraktalnego modelu zmienności dla akcji (maksymalizacja logarytmicznej funkcji wiarygodności nie dawała sensownych rezultatów).

Wyniki, które otrzymano dla indeksu WIG20 przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry modelu dla WIG20

model	m_0	σ	b	γ_k	lnL
$\bar{k} = 2$	1.2998	0.0207	20.5	0.0822	8125.3
$\bar{k} = 3$	1.2340	0.02	4.37	0.0688	8135.1
$\bar{k} = 4$	1.2268	0.0177	16.03	0.59	8138.4
$\bar{k} = 5$	1.1829	0.0192	4.55	0.2460	8138.6
$\bar{k} = 6$	1.1690	0.0185	4.65	0.7079	8138.7
$\bar{k} = 7$	1.1690	0.0223	4.68	0.7103	8138.2

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki, które otrzymano są zbliżone do tych, które prowadzono dla krótszego o około 500 obserwacji szeregu (Müller-Frączek (2005)). Może to świadczyć o pewnej stabilności metody estymacji.

Wydaje się, że wybór maksymalnej częstości ma wpływ na wielkość parametrów modelu szczególnie dla małych $\bar{k}$, natomiast w miarę zwiększania ilości możliwych stanów jego znaczenie się zmniejsza. Oczywiście, spostrzeżenie takie należałoby jeszcze potwierdzić dalszymi badaniami.

5. Podsumowanie

Wyniki przedstawionych badań empirycznych nie dają jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy proponowany pierwotnie dla innych szeregów finansowych Multiczęstościowy Model Markowa może być z powodzeniem stosowany dla notowań spółek giełdowych. Niepowodzenie procedury estymacyjnej nie musi wynikać ze złych charakterystyk szeregów, ale może być spowodowane innymi czynnikami, np. numerycznymi. Konieczne są dalsze badania, szczególnie akcji pochodzących z dojrzalszych rynków finansowych.

Literatura

Calvet, L., Fisher, A. (2001), Forecasting Multifractal Volatility, *Journal of Econometrics*, nr 105.

Calvet, L., Fisher, A. (2002) Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence, *The Review of Economics and Statistics*, nr 33.

Calvet, L., Fisher, A, (2004), Regime Switching and the estimation of Multifractal Processes, *Journal of Financial Econometrics*, nr 2.

Calvet, L., Fisher, A., Mandelbrot, B. B. (1997), Large Deviation and the Distribution of Price Changes, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale University (http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html).

Fisher, A., Calvet, L., Mandelbrot, B. B. (1997), Multifractality of Deutschemark / US Dollar Exchange Rates, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale Universit (http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html).

Lux, T. (2001), The Multifractal Model of Asset Returns: Simple Moment and GMM Estimation, Materiały dyskusyjne Kiel University.

Mandelbrot, B. B., Fisher, A., Calvet, L. (1997), A Multifractal Model of Asset Returns, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale University (http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html).

Müller-Frączek, I. (2001), Modele MMAR na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń.

Müller-Frączek, I. (2005), Modele multifraktalne na rynkach finansowych, w druku.

Müller-Frączek, I. (2006), Multifraktalny model zmienności, w druku.