Wykorzystanie funkcji powiązań do pomiaru ryzyka rynkowego

Katarzyna Kuziak

Cel:

- łączenie różnych rodzajów ryzyka rynkowego za pomocą wielowymiarowej funkcji powiązań

Ryzyko rynkowe

W pomiarze ryzyka rynkowego konieczne jest szacowanie zależności między rodzajami ryzyka

Rodzaje ryzyka rynkowego:

- kursu walutowego,
- cen akcji,
- stóp procentowych.

Pomiar zależności

współczynniki parametryczne:

- współczynnik korelacji liniowej Pearsona,
- współczynnik determinacji

współczynniki nieparametryczne:

- rang Spearmana
- współczynnik τ-Kendalla
- funkcja powiązań (*copula function*)

Funkcja powiązań

Przewaga funkcji powiązań nad klasycznym współczynnikiem korelacji polega na:

- uwzględnianiu grubych ogonów rozkładów oraz innej struktury zależności niż liniowa
- funkcja powiązań obejmuje precyzyjnie zależność między zmiennymi
- funkcja powiązań umożliwia rozwiązanie problemu dotyczącego rozkładów wielowymiarowych, jakim jest nieznajomość postaci analitycznej empirycznego rozkładu łącznego

Wielowymiarowa funkcja powiązań

funkcja $C(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, dla której:

- dziedziną funkcji $C \in [0,1]^n$;
- $C(u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) = 0$;
- C jest funkcją *n*-rosnącą;
- C ma rozkłady brzegowe C_k, które spełniają warunek $C(1, \ldots, 1, u_k, 1, \ldots, 1) = u_k$ dla wszystkich $u_k \in [0,1]$.

(Schweizer, Sklar 1958)

Wielowymiarowa funkcja powiązań

- Wielowymiarowa funkcja powiązań

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

gdzie: $u_1 = F_1(x_1), u_2 = F_2(x_2), \dots, u_n = F_n(x_n)$

Zmienne $u_1, u_2, \dots, u_n$ mają brzegowe rozkłady jednostajne

Twierdzenie Sklara

- Niech *H* oznacza dystrybuantę łączną rozkładu *n*-wymiarowego, z rozkładami brzegowymi $F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)$. Wówczas istnieje funkcja powiązań C taka, że dla wszystkich ***x*** w $\overline{R}^{\,n}$(Sklar 1959):

$$H(x_1,\ldots,x_n)=C\left(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)\right)$$

Funkcja powiązań, dlaczego?

- struktura zależności w rozkładzie wielowymiarowym może być analizowana niezależnie od rozkładów brzegowych
- wśród wielu różnych funkcji powiązań istnieją takie, które pozwalają na modelowanie zależności nieliniowej, zależności między wartościami ekstremalnymi oraz zależności asymetrycznej
- dla ściśle monotonicznych przekształceń zmiennych losowych wartości funkcji powiązań pozostają niezmienione, lub zmieniają się w pewien standardowy sposób

Funkcje powiązań w analizie ryzyka

- Genest, MacKay 1989,
- Embrechts, Lindskog, McNeil 2001,
- Embrechts, McNeil, Straumann 2002,
- Cherubini, Luciano, Vecchiato 2004,
- Guegan, Ladoucette 2004
- Cech 2006

Wielowymiarowe funkcje powiązań

- Tworzone metodą inwersji na podstawie twierdzenia Sklara (np. wielowymiarowy rozkład normalny, rozkład t-Studenta)
- Archimedesowskie (np. wielowymiarowa funkcja powiązań Franka, Ali-Mikhail-Haq)

Wielowymiarowa funkcja powiązań rozkładu *t*-Studenta

$$C_{k,\Sigma}(u_1, u_2, \ldots u_n) = t_{k,\Sigma}{}^{n}\left(t_k^{-1}(u_1), t_k^{-1}(u_2), \ldots, t_n^{-1}(u_n)\right)$$

$t_{k,\Sigma}{}^{n}(u_1, \ldots u_n)$ – standaryzowany n-wymiarowy rozkład *t*-Studenta,

k – stopnie swobody,

$t_k(X)$ – standaryzowany rozkład *t*-Studenta;

Σ - macierz kowariancji.

Wielowymiarowe Archimedesowskie funkcje powiązań

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \psi^{-1}(\psi(u_1) + \psi(u_2) + \dots + \psi(u_n))$$

gdzie: $\psi(u) : [0;1] \rightarrow [0,\infty]$ jest ciągła i ściśle malejąca taka, że $\psi(1) = 0$, ψ jest funkcją wypukłą, ψ^{-1} jest funkcją pseudoodwrotną do ψ taką, że:

$\psi^{-1} : [0,\infty) \rightarrow [0;1]$ postaci $\psi^{-1}(w) = \begin{cases} \psi^{-1}(w) & 0 \leq w \leq \psi(0) \\ 0 & \psi(0) < w \leq \infty \end{cases}$.

Związek między generatorem ψ a współczynnikiem τ

Przykład:
dla funkcji powiązań Gumbela:

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta} \qquad \theta = \frac{1}{1-\tau}.$$

(Genest, MacKay 1986; Nelsen 1999)

Wielowymiarowe Archimedesowskie funkcje powiązań

Family	$\phi_\theta(t)$	Range	$C_\theta(u_1, \ldots, u_d)$
Gumbel-Hougaard	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \geq 1$	$\exp\left(-\left[\sum_{i=1}^{d}(-\ln u_i)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$
Cook-Johnson	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$	$\theta > 0$	$\left[\left(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta}\right)-n+1\right]^{-\frac{1}{\theta}}$
Frank	$-\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\prod_{i=1}^{d}\left(e^{-\theta u_i}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1\right)^{d-1}}\right)$
Ali-Mikhail-Haq	$\ln\frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$\theta \in [-1, 1)$	$\frac{\prod_{i=1}^{d} u_i}{1-\theta\prod_{i=1}^{d}(1-u_i)}$

Metoda największej wiarygodności

Niech $\aleph = \{x_1,\ldots,x_n\}_{t=1}^{T}$ oznacza macierz danych. Wówczas funkcja logarytmiczna wiarygodności:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \ln c\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)\big) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{n} \ln f_k(x_k) \quad ,$$

gdzie θ jest zbiorem parametrów rozkładów brzegowych i funkcji powiązań.

Wówczas otrzymamy estymator największej wiarygodności:

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \max_{\theta \in \Theta} l(\boldsymbol{\theta})$$

Przykład

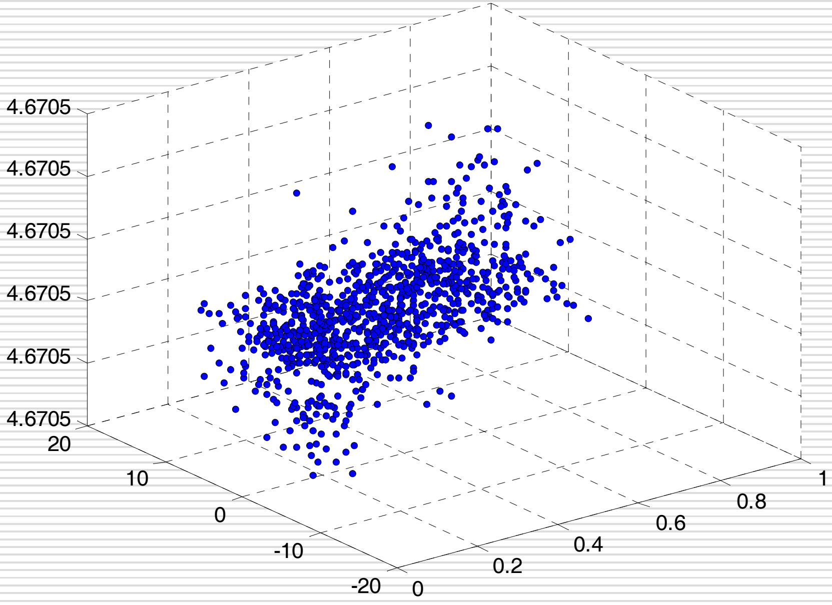
Klasa rozkładu	Parametry
Beta	$\alpha = 2, \beta = 3$
Normalny	$\mu = 3, \sigma = 6$
α-stabilny	$\alpha=1, \beta=0,5, \gamma=3, \delta=4$

Przykład

Zależność:

$$\tau = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}$$

Funkcja powiązań t-Studenta
z 3 stopniami swobody

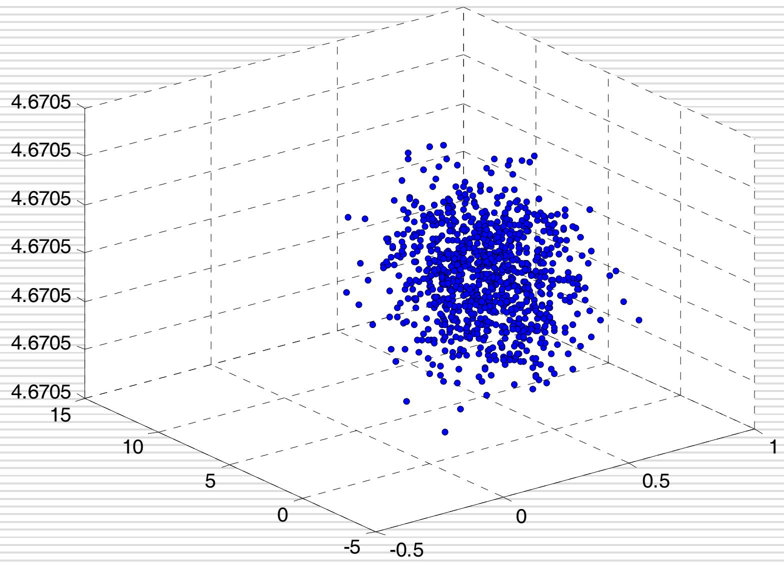


Funkcja powiązań

Przykład

	Parametry	
Liczba stopni swobody	13,4854	
Macierz τ	$\tau = \begin{vmatrix} 1 & 0,30 & 0,06 \\ 0,30 & 1 & 0,04 \\ 0,06 & 0,04 & 1 \end{vmatrix}$	
Rozkłady brzegowe		Przedziały ufności na poziomie 95%
Normalny	μ = 0,403; σ = 0,171	μ [0,392; 0,413] σ *[0,164; 0,179]*
Normalny	μ = 3,123; σ = 3,960	μ [2,877; 3,368] σ [3,793; 4,141]
Normalny	μ=4,670; $\sigma \approx 0$	μ [4,657; 4,681]

Przykład



Funkcja powiązań z brzegowymi rozkładami normalnymi

Przykład

Udziały każdego z wyróżnionych rodzajów ryzyka:

- kursu walutowego – 0,2,
- cen akcji – 0,5
- stopa procentowa – 0,3.

W tym przykładzie na poziomie 0,98 otrzymaliśmy wynik 1,495.

Podsumowanie

- Konieczność posiadania odpowiednio licznej bazy danych (potrzebne są długie szeregi czasowe).
- Konieczność ustalenia tego samego horyzontu dla poszczególnych rodzajów ryzyka (ten problem będzie miał również miejsce w przypadku współczynnika korelacji).
- Przyjęcie odpowiedniej funkcji powiązań – należy dobrać najlepiej dopasowaną.
- Ocena istotności współczynnika theta.

Podsumowanie

- Trudność w modelowaniu struktury zależności polegająca na braku możliwości swobodnego doboru parametrów dwuwymiarowych brzegowych funkcji powiązań w rozkładzie wielowymiarowym, modelowanym za pomocą wielowymiarowej funkcji Archimedesowskiej.
- Wykorzystanie przypadku dynamicznego, w którym modelowany byłby warunkowy rozkład w danej chwili, a nie rozkład bezwarunkowy szeregu czasowego.
- Konieczność testowania wstecznego. Wykorzystuje się w tym celu Mieszany test Kupca oraz mieszany test Christoffersena.

Dziekuję za uwagę