

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Tadeusz Kufel, Paweł Kufel*  
*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

### **Postulat zgodności a początki dynamicznego modelowania ekonometrycznego**

#### **1. Wprowadzenie**

Zastosowanie aparatu matematycznego do opisu relacji i związków między różnymi zjawiskami ekonomicznymi prowadzi do budowy modeli ekonometrycznych. Modele budowane dla procesów stochastycznych, czyli dla danych chronologicznych lub inaczej dla danych zawartych w postaci szeregów czasowych nazywamy modelami dynamicznymi. Ogólną definicję modelu dynamicznego podaje Balasko (1984, s. 125), „dynamiczny model ekonometryczny opisuje zmiany w czasie wartości kolejnych obserwacji zmiennej ekonomicznej”. Natomiast definicja przedstawiona w pracy Talaga, Zieliński (1986, s. 179) jest następująca: „przez dynamiczny model ekonometryczny rozumie się model opisujący zależności między endogenicznymi procesami stochastycznymi oraz zależności tych procesów od stochastycznych i deterministycznych procesów egzogenicznych”.

Punktem wyjścia koncepcji budowy wstępnej specyfikacji dynamicznych modeli ekonometrycznych były różne założenia. Jedne dotyczyły związków przyczynowych – struktur współzależnościowych, a inne struktur wewnętrznych procesów z pominięciem przyczynowości, a jeszcze inne zakładały uwzględnienie jednego i drugiego założenia.

Autorem koncepcji dynamicznego modelowania zgodnego<sup>1</sup>, które uwzględnia jedno i drugie założenie jest Profesor Zygmunt Zieliński. Przez zgodność modelu w sensie Zielińskiego rozumie się zgodność harmonicznej struktury procesu objaśnianego z łączną harmoniczną strukturą procesów objaśniających

---

<sup>1</sup> Por. Zieliński (1984), (1991), Talaga, Zieliński (1986).

oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających. Model, w którym wszystkie wykorzystywane procesy mają własności biało-szumowe jest zawsze modelem zgodnym, tj. modelem o postaci:

$$\varepsilon_{yt} = \sum_{i=1}^k \rho_i \varepsilon_{x_{it}} + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Model (1) jest zgodny, ponieważ struktury harmoniczne procesów po lewej i prawej stronie równania są identyczne – podobne do siebie lub inaczej spektra tych procesów są równoległe w przebiegu do osi częstotliwości.

Niech  $Y_t$  i  $X_{it}$  ( $i=1, \dots, k$ ) oznaczają odpowiednio proces endogeniczny i wektor procesów objaśniających, dla których modele podstawowe, opisujące ich wewnętrzną strukturę, są następujące:

– modele opisujące składniki niestacjonarne:

$$\begin{aligned} Y_t &= P_{yt} + S_{yt} + \eta_{yt}, \\ X_{it} &= P_{x_{it}} + S_{x_{it}} + \eta_{x_{it}}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:  $P_{yt}, P_{x_{it}}$  – wielomianowe funkcje zmiennej czasowej  $t$  dla odpowiednich procesów,  $S_{yt}, S_{x_{it}}$  – składniki sezonowe o stałej lub zmiennej amplitudzie wahań dla odpowiednich procesów,  $\eta_{yt}, \eta_{x_{it}}$  – stacjonarne autoregresyjne procesy odnoszące się do odpowiednich procesów;

– modele autoregresyjne:

$$\begin{aligned} B(u)\eta_{yt} &= \varepsilon_{yt}, \\ A_i(u)\eta_{x_{it}} &= \varepsilon_{x_{it}}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:  $B(u), A_i(u)$  – stacjonarne autoregresyjne operatory, dla których wszystkie pierwiastki równania  $|B(u)| = 0$  i  $|A_i(u)| = 0$  leżą poza okręgiem jednostkowym,  $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{x_{it}}$  – białe szумы dla odpowiednich procesów.

Znajomość wewnętrznej struktury wszystkich badanych procesów umożliwia budowę dynamicznego modelu zgodnego na podstawie zależności dla biało-szumowych składników opisanej modelem (1).

Model zgodny dla rzeczywistych procesów  $Y_t$  i  $X_{it}$  uzyskuje się przez następujące podstawienia: do równania (1) podstawia się białe szумы z równań (3), następnie z równań (2) wyznacza się autoregresyjne procesy  $\eta_{yt}, \eta_{x_{it}}$  i wstawia się je do poprzednio otrzymanego równania. Po dalszych przekształceniach otrzymuje się następujący model:

$$B(u)Y_t = \sum_{i=1}^k A_i^*(u)X_{it} + P_t + S_t + \varepsilon_t. \quad (4)$$

W modelu (4) proces resztowy  $\varepsilon_t$  jest taki sam jak w modelu (1). Oznacza to, że warunek zgodności struktur harmonicznych obu stron równania został spełnio-

ny. Model zgodny (4) zawiera wszystkie wewnętrzne składniki poszczególnych procesów.

W skrócie naszkicowana koncepcja dynamicznego modelowania zgodnego zwraca uwagę na konieczność uwzględnienia już na etapie specyfikacji modelu informacji o wewnętrznej strukturze zastosowanych procesów do których zaliczamy:

- składnik trendowy i sezonowy,
- składnik autoregresyjny.

Celem artykułu jest zaprezentowanie początków specyfikacji elementów wewnętrznej struktury dynamicznych modeli ekonometrycznych.

## 2. Składnik trendowy i sezonowy

Przykłady najstarszego podejścia realizującego postulat zgodności, aby w modelu uwzględnić składnik periodyczny lub wyeliminować wpływ tego składnika można znaleźć już w pracy W.S. Jevons z 1862 r., który napisał następujące zdanie<sup>2</sup>:

*Every kind of periodic fluctuation, whether daily, weekly, monthly, quarterly, or yearly, must be detected and exhibitive, not only as a subject of study in itself, but because we must ascertain and eliminate such periodic variations before we can correctly exhibit those which are irregular or non-periodic, and probably of more interest and importance<sup>3</sup>*

Potrzeba takich badań dostrzeżona została przez Jevonsa na podstawie analiz dziennych raportów handlowych<sup>4</sup>. Poprawna analiza związków wymaga, aby uwzględniać lub eliminować obserwowane cykliczne składniki z procesów.

Budowę dynamicznych modeli ekonometrycznych z uwzględnieniem jednego i drugiego założenia, dotyczącego uwzględniania teorii ekonomii jako podpowiedzi co do struktury przyczynowej i włączania elementów struktury procesu do specyfikowanego modelu, można już było spotkać na początku XX wieku. W pracach Jevonsa, Moore'a, Hookera, Pearsona, Langego można znaleźć wiele elementów badania struktury procesów i wykorzystania tych informacji w modelowaniu<sup>5</sup>. Eliminacja z procesów składnika trendowego lub sezonowego poprzez odjęcie lub włączenie do modelu tych składników jest tu naj-

<sup>2</sup> W.S. Jevons (1862, s. 4), w pracy: Hendry, Morgan (1995), s. 113–121.

<sup>3</sup> Tłumaczenie: Każdy rodzaj periodycznych wahań, czy to dziennych, tygodniowych, miesięcznych, kwartalnych lub rocznych, musi zostać zbadany i zaprezentowany, nie tylko jako temat studiów sam w sobie, ale musi być, to wahanie wyodrębnione i wyznaczone zanim przejdzie się do prezentowania (badania) tych zmienności, które są nieregularne i nieperiodyczne, i prawdopodobnie te zmienności są bardziej interesujące i o większym znaczeniu.

<sup>4</sup> W.S. Jevons (1862, s. 3), w pracy: Hendry, Morgan (1995), s. 113–121.

<sup>5</sup> Szersze omówienie zagadnień wykorzystania informacji o wewnętrznej strukturze procesów w różnych koncepcjach modelowania ekonometrycznego można znaleźć w pracy Kufel (2002), rozdział 1.

lepszym przykładem. Najczęściej włączenie tych składników do zestawu zmiennych wynikało tylko z intuicji badacza.

Twierdzenie Frischa–Waugha (1933, s. 387–401) wskazuje, że wprowadzona zmienna czasowa  $t$  do równania eliminuje trend liniowy z wszystkich wykorzystywanych procesów w równaniu. Tintner (1952, s. 301) rozszerzył twierdzenie Frischa–Waugha na przypadek trendów wielomianowych, a Lovell (1963, s. 993–1009) na składnik sezonowy. Z twierdzeń Frischa–Waugha, Tintnera i Lovella wynika, że włączenie elementów wewnętrznej struktury procesów (trendu, sezonowości) do modelu eliminuje z wszystkich wykorzystywanych procesów te elementy. Należy pamiętać, aby interpretację parametrów takiego modelu odnosić do zależności pomiędzy procesami ekonomicznymi, z których zostały wyeliminowane składniki trendowo-sezonowe, czyli do części stacjonarnej procesu.

Pierwsze prace Moore'a z początków XX wieku dotyczące analiz dynamicznych w Stanach Zjednoczonych były związane z badaniami dynamiki procesów rolniczych. Amerykański statystyk Henry L. Moore wykorzystał korelację wieloraką i regresję do analizy szeregów czasowych plonów ziemiopłodów w zależności od ich cen w czasie żniw i od poziomu opadów deszczu. Wykorzystując transformacje Fouriera i periodogram wyznaczył cykle wielkości opadów deszczu o długości 8 i 33 lata, które określał jako cykle całkowicie niezależne od zjawisk ekonomicznych, czyli jako czysto egzogeniczne procesy.

Jevons i Moore podchodzili do analizy cykli koniunkturalnych w sposób statystyczny, a nie merytoryczny, tj. od strony przyczyn ekonomicznych. Byli jednak pierwszymi badaczami, którzy poszukiwali „periodycznej przyczyny” dla „periodycznego skutku”, tzn. periodycznie powtarzającego się zjawiska gospodarczego, którym był cykl koniunkturalny (Morgan (1990), s. 39). Zatem kierunek ich poszukiwań, w sensie uwzględniania w modelowaniu postulatu zgodności struktur procesów ekonomicznych, był poprawnym postępowaniem.

„Czas  $t$ , który występuje w równaniu popytu, odgrywa rolę zastępczą, albowiem czas jako taki nie stanowi przyczyny powodującej zmianę popytu. Oczywiście byłoby pożądane, aby we wzorze określającym popyt wystąpiły *explicite* te czynniki, które zmieniają się z biegiem czasu. [...] Trend jest rezultatem innych nie uwzględnionych tutaj składników oddziaływujących na popyt” (Lange (1961), s. 126, 130). Wprowadzenie zmiennej czasowej do równania było pożądanym zabiegiem i z punktu widzenia eliminacji niestacjonarności, i z punktu widzenia identyfikowalności otrzymanych parametrów równania. Włączenie do równania zmiennej czasowej  $t$  w późniejszych zastosowaniach stało się częstym zabiegiem, przy czym zmiennej tej przypisywano tylko rolę czynnika zastępczego, a nie elementu oczyszczającego procesy z niestacjonarności średniej.

Wszystkie te zabiegi z jednej strony przyczyniały się do lepszego opisu zależności zjawisk ekonomicznych, a z drugiej wskazywały na pewne elementy struktury zjawisk, które koniecznie należy uwzględnić przy budowie modelu.

Metody wyodrębniania składników procesu opisał Oskar Lange w swojej pracy z 1931 roku, pod tytułem: *Statystyczne badanie konjunktury gospodarczej*. W pracy tej przedstawił metodologię rozłożenia szeregu chronologicznego na składniki. Wyodrębnił cztery następujące składniki: trend, wahania sezonowe, wahania cykliczne – koniunkturalne i wahania nieregularne.

Lange w pracy z 1931 przedstawił sposoby wyodrębniania wszystkich składników procesu. Dla przykładu: wahania cykliczne (koniunkturalne) wyodrębnił także za pomocą analizy harmonicznej, w której oszacowany periodogram był podstawą wyboru harmonik do oceny długości i siły cyklu (Lange (1931), s. 125–131). Praca Langego z 1931 roku jest pierwszym dziełem w języku polskim, prezentującym szeroki wachlarz metod opisu składników szeregu czasowego.

Postulat zgodności struktur procesów wykorzystywanych w budowie dynamicznych modeli ekonometrycznych przejawiał się już w pracy Oskara Langego z 1931 roku w stwierdzeniu, że „**każdy składnik procesu ma swoją grupę przyczyn**”. „Zakłada się, że przyczyny, kształtujące przebieg tych szeregów, dają się podzielić na cztery grupy, z których każda wywołuje pewne skutki statystycznie wymierne. Grupy te są następujące:

- 1) przyczyny, działające stale poprzez dłuższy przeciąg czasu (kilkanaście lat, kilkadziesiąt lat),
- 2) przyczyny, których działanie powtarza się periodycznie w pewnych określonych porach każdego roku albo miesiąca (np. każdej jesieni, albo pod koniec każdego miesiąca),
- 3) przyczyny, powodujące cykle koniunkturalne i wreszcie,
- 4) przyczyny, których skutki są do tego stopnia nieregularne, że nie dają się ująć w jakiś ogólny schemat.

Każda z wymienionych grup przyczyn wywołuje pewne skutki ilościowe i wpływa w pewien sposób na przebieg szeregu statystycznego, wywołując pewien specjalny rodzaj zmian, zachodzących w szeregu statystycznym. Wobec tego można zmiany, zachodzące w szeregach statystycznych, poklasyfikować na cztery grupy, stosownie do przyczyn, które je wywołują. [...] Chodzi zatem o rozłożenie szeregu statystycznego na cztery składniki, tj. na trend, na wahania sezonowe, na zmiany cykliczne oraz wahania nieregularne, w ten sposób, żeby każdy składnik przedstawiał skutki, będące wynikiem działania jednego z wymienionych kompleksów przyczyn. Znaczy to, że uważa się szereg empiryczny, przedstawiający faktyczny przebieg procesu gospodarczego, za wypadkową czterech szeregów pierwotnych, z których każdy powstaje pod wpływem tylko jednego z wymienionych czterech kompleksów przyczyn” (Lange (1931), s. 69–72).

W wielu modelach ekonometrycznych pojawiały się zmienne zero-jedynkowe dla wybranych okresów, w celu opisanie nietypowej zmiany wartości średniej procesu. W pracy Welfego (1977, s. 95–115) przedstawiono kilkanaście sposobów wykorzystania zmiennych zero-jedynkowych do poprawy specyfikacji dynamicznych modeli ekonometrycznych po to, aby uwzględnić

zmiany wartości średniej procesów, zmiany parametrów strukturalnych (w tym także wyrazu wolnego), zmienność wariancji i tym podobne. Wykorzystanie zmiennych zero-jedynkowych należy traktować jako element poprawy uzgodnień harmonicznych pomiędzy procesami objaśniającymi z procesem objaśnianym, które w lepszy sposób opisują zmienność „parametru wolnego” w modelu ekonometrycznym<sup>6</sup>.

Takie pojmowanie oddziaływania przyczyn na skutki oznacza, że modelując wyodrębnione składniki–skutki należy wykorzystać określony zestaw przyczyn działający na dany składnik, czyli zachować zgodność struktur procesów–przyczyn i procesów–skutków, np. przyczyny działające periodycznie wyjaśniają periodyczne skutki itp. Powyższe określenia sformułowane przez Langego i przejawiające się intuicyjnie w pracach dotyczących badań koniunktury należy traktować jako dążenie do spełnienia później sformułowanego postulatu Granger (1981) „zgodności struktur danych”, czy też postulatu Zielińskiego (1985) o „harmonicznej zgodności modelowanych struktur”.

### 3. Składnik autoregresyjny

Występowanie składnika autoregresyjnego w modelu ekonometrycznym przejawia się w formie procesów opóźnionych, które spełniają podwójną rolę w modelu jako czynnik przyczynowy i uzgadniający strukturę harmoniczną.

Na przykład Moore budując równania cen zauważył, że dla niektórych rolniczych towarów (zboże, ziemiaki, siano) zależność jest jednoczesna, tzn. tempo przyrostów ceny zboża  $\Delta P / P_{t-1}$  zależy od tempa przyrostu zbiorów  $\Delta Q / Q_{t-1}$ , a tempo przyrostu zbiorów  $\Delta Q / Q_{t-1}$  zależy od tempa przyrostu ceny z poprzedniego okresu  $\Delta P_{t-1} / P_{t-2}$ .

Budowa modeli ekonometrycznych dla temp przyrostów, a nie dla oryginalnych szeregów, wynikała z intuicji Moore’a o konieczności dokonania transformacji zmierzających do wyeliminowania efektów szoków klimatycznych na zbiory ziemiopłodów i cen. Jednak przekształcenie tych procesów w przyrosty względne należy traktować jako zastosowanie filtracji różnicowej dla eliminacji niestacjonarności wariancji procesu. Był to pożądaný zabieg w przypadku procesów podlegających działaniu klimatycznych szoków, które wywoływały zmienność wariancji. Eliminacja zmienności wariancji procesu jest jednym z warunków poprawnego modelowania ekonometrycznego.

Wprowadzenie opóźnionej ceny zostało przez Moore’a zinterpretowane jako oczekiwana bieżąca cena (ang. *expected current price*, Epstein (1987), s. 18), która wpływała na zachowanie się producentów bawełny przez to, że decyzje o przyszłej produkcji ( $t+1$ ) formułowali oni na podstawie oczekiwanej ceny – równej cenie z bieżącego okresu  $t$ . Interpretacja przez Moore’a czynnika ceny

---

<sup>6</sup> Por. Zieliński (1984), s. 146.

jako „oczekiwanej wartości” skłania do traktowania modelu (3) jako jednego z pierwszych modeli oczekiwań gospodarczych.

Moore był głęboko przekonany, że wyjaśnienie wahań cyklicznych i znalezienie praw je opisujących jest podstawowym problemem badania dynamiki zjawisk ekonomicznych (ang. *fundamental problems of economic dynamics* – por. Moore (1914))<sup>7</sup>. Z tego powodu należy uważać Moore’a za prekursora badań wewnętrznej struktury procesów w obecnym rozumieniu. Następcami Moore’a w badaniach cykliczności w procesach gospodarczych, a szczególnie w procesach rolniczych byli w Stanach Zjednoczonych: Henry Schultz (uczeń Moore’a) i Holbrook Working (por. Epstein (1987), s. 13–33; Lange (1961), s.91–188).

Osiągnięcia Schultza, na które warto zwrócić uwagę, dotyczą także zagadnień zgodności struktur danych oraz opóźnień czasowych. I tak, Schultz wyznaczając krzywe popytu na produkty rolne otrzymał ujemny współczynnik pomiędzy ceną a wielkością popytu. Do wyznaczenia krzywej podaży na produkty rolne wprowadził do równania podaży cenę z okresu poprzedniego.

Analizując związki pomiędzy popytem, podażą i ceną Schultz jako pierwszy wykorzystał cenę jako zmienną opóźnioną w czasie, ale było to możliwe tylko dla produktów rolniczych, w których roczne opóźnienie w pojawieniu się nowej produkcji umożliwiało zastosowanie tego typu rozwiązania. Dla produktów przemysłowych nie miało to zastosowania, gdyż cykle produkcji przemysłowej trwają krócej, najczęściej 1 miesiąc, 3 miesiące, a najwyżej pół roku.

W innych pracach Schultz, nie znając metod szacowania równań współzależnych, budował równania popytu i podaży, i wprowadzał do równań zmienne dodatkowe. I tak w równaniu popytu na mięso wołowe uwzględniał cenę mięsa wieprzowego i fundusz płac. Przy braku typowych czynników ekonomicznych Schultz wprowadzał do równania zmienną czasową w formie trendu liniowego bądź kwadratowego.

W latach siedemdziesiątych pojawiły się nowe nurty w ekonometrii. Związane one były z krytyką dotychczasowego modelowania, czyli modelowania dla zmiennych ekonomicznych, a nie dla procesów stochastycznych. Przykłady takiej krytyki można znaleźć w pracach Hendry’ego<sup>8</sup>, który twierdzi, że w celu modelowania danych, ekonometrycy powinni stosować najnowsze techniki i mocne testowanie; oznacza to, że odkrywane zależności statystyczne powinny być wyżej stawiane od teorii.

Powstałe najnowsze koncepcje modelowania dynamicznego dotyczą: od ogółu do szczegółu, integracji i kointegracji, modelowania VAR, VECM, ARIMA, GARCH wykorzystują elementy wewnętrznej struktury modelowanych procesów.

---

<sup>7</sup> Por. Morgan (1990), s. 26.

<sup>8</sup> Zbiór przedruków wielu artykułów dotyczących tej krytyki można znaleźć w pracy: Hendry (2000).

## Literatura

- Balasko, Y. (1984), The Size of Dynamic Econometric Models, *Econometrica*, vol. 52.
- Epstein, R. J. (1987), *A History of Econometrics*, Elsevier Science Publishers, North-Holland.
- Frisch, R., Waugh F. (1933), Partial Time Regressions as Compared with Individual Trends, *Econometrica*, vol. 1, 387–401.
- Granger, C. W. J. (1981), Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, vol. 16.
- Hendry, D. F. (2000), *Econometrics: Alchemy or Science? New Edition*. Oxford: Oxford University Press.
- Hendry, D.F., Morgan, M.S. (1995), *The Foundations of Econometric Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jevons, W.S. (1862), *On the Study of Periodic Commercial Fluctuations*, Read to the British Association in 1862 oraz “Investigations in Currency and Finance”, Macmillan, 1884, 3–10.
- Kufel, T. (2002), *Postulat zgodności w dynamicznych modelach ekonometrycznych*, Wydawnictwo UMK Toruń.
- Morgan, M. S. (1990), *The History of Econometric Ideas*, Cambridge University Press.
- Lange, O. (1931), *Statystyczne badanie konjunktury gospodarczej*, Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Lange, O. (1961), *Wstęp do ekonometrii*, wyd. 5, PWN, Warszawa.
- Lovell, M. C. (1963), Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis, *Journal of American Statistical Association*, no 58, New York.
- Moore, H. (1914), *Economic Cycles: Their Law and Cause*, New York, MacMillan, s. 68–80.
- Sims, C. A. (1980), Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, vol. 48, no. 1, 1–48.
- Talaga, L., Zieliński, Z. (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- Tintner, G. (1952), *Econometrica*, John Wiley & Sons, New York.
- Welfe, W. (red.), (1977), *Metody ekonometryczne*, t. I, PWE, Warszawa.
- Wiśniewski, J. W., Zieliński, Z. (1985), *Ekonometria*, cz. I, Wydawnictwo UMK Toruń.
- Zieliński, Z. (1984), Zmienność w czasie strukturalnych parametrów modelu ekonometrycznego, *Przegląd Statystyczny*, R. XXXI, z. 1/2, 135–148.
- Zieliński, Z. (1985), Liniowe modele opisujące zależności stacjonarnych procesów ekonomicznych, w: Wiśniewski, J. W., Zieliński, Z. (1985), *Ekonometria*, cz. I, UMK Toruń, 277–346.
- Zieliński, Z. (1991), *Liniowe modele ekonometryczne jako narzędzie opisu i analizy przyczynowych zależności zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.