

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Dominik Krężolek
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

Zastosowanie asymetrycznego rozkładu Laplace'a do budowy portfeli inwestycyjnych na polskim rynku kapitałowym*

1. Wstęp

Głównym celem referatu jest próba aplikacji asymetrycznego rozkładu Laplace'a (*AL*) do teorii budowy portfeli inwestycyjnych. Wybór stosowanego rozkładu nie jest przypadkowy. Większość ekonometrycznych modeli rynków finansowych zakłada, iż badane szeregi charakteryzowane są za pomocą rozkładu normalnego, o zadanych parametrach definiujących położenie oraz skalę krzywej gęstości. Podejście to wynika z Centralnego Twierdzenia Granicznego (CTG), które już w najprostszej formie zakłada, że suma niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach posiada, jako graniczny, rozkład normalny (Kotz, Kozubowski, Podgórski, 2002).

W rzeczywistości finansowej podejście to nie do końca jest spełnione. Stopy zwrotu z aktywów finansowych cechują się asymetrią, leptokurtozą oraz grubymi ogonami empirycznych rozkładów, co zarazem odrzuca przydatność modeli gaussowskich w projektowaniu ich zmienności. Rozwiązaniem w tym przypadku okazują się rozkłady, które uwzględniają wyszczególnione powyżej cechy. Wymienić tu należy całą klasę modeli stabilnych czy geometrycznie stabilnych, analizowanych ze względu na przyjęty schemat probabilistyczny. Kozubowski i Podgórski (2000) sugerują, że ze względu na brak ściśle określonych postaci funkcji definiujących modele stabilne (poza trzema przypadkami: rozkładu Cauchy'ego, Lévy'ego oraz Gauss'a) ich stosowalność w analizie finansowych szeregów czasowych jest nadal ograniczona. Dogodną alternatywą

* Praca napisana w ramach grantu naukowego o numerze KBN: N111 003 32/0262.

w tym przypadku może okazać się rodzina asymetrycznych rozkładów Laplace'a. Zastosowanie tej klasy modeli do analizy stóp zwrotu na polskim rynku kapitałowym jest przedmiotem dalszej części pracy.

2. Asymetryczny rozkład Laplace'a

Asymetryczny rozkład Laplace'a (AL), podobnie jak rozkład gaussowski, cechuje się jednomodalnością, a dodatkowo jego krzywa gęstości ma ostro szpiczasty kształt w centralnej części rozkładu. Ponadto uwzględnia on asymetrię, leptokurtozę oraz występowanie obserwacji oddalonych (Kozubowski, Podgórski, 2000, 2003). Dodatkową zaletą tej klasy modeli jest skończoność momentów wszystkich rzędów, określoność funkcyjna krzywych gęstości oraz nieskomplikowane procedury estymacyjne nieznanymi parametrami takich rozkładów. Stosowalność rozkładów AL nie ogranicza się tylko do rynków finansowych. Są one szeroko wykorzystywane w takich obszarach nauki jak medycyna, archeologia, biologia, ochrona środowiska czy fizyka, co potwierdza ich wysoką użyteczność (Kozubowski, Podgórski, 1999).

Założenia dotyczące normalności stóp zwrotu z aktywów finansowych mają ścisły związek z teorią portfela. Już w klasycznym podejściu Markowitza (1952) zakłada się, że wielowymiarowy rozkład stóp zwrotu jest rozkładem normalnym (z odpowiednim wektorem średnich i macierzą wariancji-kowariancji). Założenie to nie jest jednak spełnione. Wynika to przede wszystkim z dużej zmienności stóp zwrotu, wysokiej częstotliwości danych, czy grupowania się wariancji. Asymetryczny rozkład Laplace'a uwzględnia wspomniane cechy.

W ujęciu jednowymiarowym zmienna losowa X posiada asymetryczny rozkład Laplace'a, jeśli istnieją parametry $\mu \in R$ oraz $\sigma \geq 0$ takie, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma postać (Kozubowski, Podgórski, 1999):

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + \sigma^2 t^2 - i\mu t}, \quad (1)$$

gdzie:

μ – parametr położenia,

σ – parametr skali.

Zakłada się ponadto następujące relacje pomiędzy parametrami:

$$\frac{1}{\kappa} - \kappa = \frac{\mu}{\sigma}, \quad \frac{1}{\kappa} + \kappa = \sqrt{4 + \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \frac{1}{\kappa^2} + \kappa^2 = 2 + \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2.$$

Parametr κ określany jest jako niezmienny parametr skali:

$$\kappa = \frac{2\sigma}{\sqrt{\mu + (4\sigma^2 + \mu^2)}}. \quad (2)$$

W zależności od wartości parametrów określających asymetryczny rozkład Laplace'a, można wyszczególnić kilka specjalnych przypadków. Jeśli $\mu = \sigma = 0$ rozkład jest zdegenerowany w punkcie 0. Dla $\sigma = 0$ oraz $\mu > 0$ zmienna losowa ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej μ , natomiast jeśli $\mu = 0$ oraz $\sigma \neq 0$, mamy do czynienia z rozkładem Laplace'a o wartości oczekiwanej równej zero oraz parametrze skalującym σ . Dodatkową zaletą tej klasy modeli jest możliwość wygenerowania zmiennej losowej o wspomnianym rozkładzie za pomocą innych znanych rozkładów (np. mieszanka rozkładów normalnych, wykładniczych etc.).

Wykorzystując parametr κ funkcja gęstości oraz funkcja dystrybuanty zmiennej losowej o rozkładzie *AL* mają postać (Kozubowski, Podgórski, 2000):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\kappa}{\sigma}x\right), & \text{dla } x > 0 \\ \exp\left(\frac{1}{\sigma\kappa}x\right), & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

oraz

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1 + \kappa^2} \exp\left(-\frac{\kappa}{\sigma}x\right), & \text{dla } x > 0 \\ \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} \exp\left(\frac{1}{\sigma\kappa}x\right), & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Szacowanie nieznanymi wartościami parametrów charakteryzujących rozkład przeprowadza się najczęściej w oparciu metodę momentów (MME) oraz metodę największej wiarygodności (MLE). W obu przypadkach otrzymane estymatory są stabilne (stałe) oraz posiadają rozkład asymptotycznie normalny.

Teoria portfela papierów wartościowych sięga początków lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Wybór optymalnej strategii inwestycyjnej oparty jest w głównej mierze o dwie podstawowe charakterystyki instrumentów finansowych: dochód oraz ryzyko. Strategii inwestycyjnych może być zatem tyle, ilu jest inwestorów, gdyż każdy z nich w sposób indywidualny rozważa sposoby generowania zysku. Do określania poziomu dochodu oraz ryzyka wykorzystywane są metody statystyczne, które polegają na analizie empirycznych rozkładów stóp zwrotu. Wyznaczanie charakterystyk portfela inwestycyjnego (najczęściej wieloskładnikowego) sprowadza się do szacowania parametrów położenia oraz macierzy wariancji-kowariancji wielowymiarowego rozkładu stopy zwrotu (Jajuga, 2003). Dlatego też przy określaniu poziomu parametrów opisujących portfel inwestycyjny bardzo ważny jest dobór odpowiedniej postaci rozkładu badanej zmiennej, opisującej poziom dochodu.

3. Przykład empiryczny

Aplikacji asymetrycznego rozkładu Laplace'a do teorii budowy portfela inwestycyjnego dokonano na przykładzie sześciu spółek, notowanych na GPW w Warszawie w okresie od 2 stycznia 2000 roku do 30 kwietnia 2007 roku. Łącznie otrzymano szeregi czasowe liczące 1840 obserwacji, na podstawie których wyznaczono dzienne logarytmiczne stopy zwrotu (1839 obserwacji). Cały badany okres podzielono na dwa podokresy (każdy liczący po 920 obserwacji):

1. podokres budowy portfeli,
2. podokres testowania rozkładu.

Analizowane spółki należą do sektora nowoczesnych technologii, reprezentowanego przez indeks giełdowy TECHWIG (portfel rynkowy). Za kryterium doboru spółek do portfela przyjęto poziom odchylenia standardowego, oszacowanego w pierwszym podokresie badania. Portfel 1 zawiera dwie spółki o najwyższym i najniższym poziomie ryzyka spośród wszystkich sześciu, Portfel 2 kolejną parę o powyższych własnościach, natomiast Portfel 3 – pozostałe dwie spółki (o najbardziej zbliżonym poziomie ryzyka). Przyjęto równe udziały spółek w portfelu. W tabeli 1 przedstawiono skład poszczególnych portfeli.

Tabela 1. Skład portfeli

Portfel	Spółka	Ryzyko	Dochód
Portfel 1	MNI	0.04937	-0.00167
	TPSA	0.02698	-0.00057
Portfel 2	ASSECOPOL	0.03851	-0.00108
	SYGNITY	0.02998	0.00047
Portfel 3	PROKOM	0.03345	0.00030
	COMARCH	0.03205	-0.00031

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie danych z podokresu drugiego oszacowano oczekiwany dochód oraz ryzyko dla trzech zbudowanych portfeli oraz dla portfela rynkowego. Oszacowano także parametry rozkładu stabilnego dla badanych szeregów w całym podokresie drugim. Wyniki tej ostatniej estymacji przedstawia tabela 2.

Dane w tabeli 2 potwierdzają rozbieżność z rozkładem normalnym. W przypadku każdego z analizowanych portfeli wartość indeksu stabilności $\alpha < 2$, co świadczy o gruboogonowy charakterze empirycznych rozkładów. Również test Kołmogorowa-Smirnowa odrzuca hipotezę, iż empiryczny rozkład jest zbliżony z gaussowskim (choć w przypadku Portfela 2 dopiero na poziomie istotności 0.057).

Tabela 2. Parametry modelu stabilnego dla badanych portfeli

Portfel	Parametr			
	α	β	γ	δ
TECHWIG	1.77088	-0.350994	0.0075954	0.00078211
Portfel 1	1.72356	0.250867	0.0093612	0.00139063
Portfel 2	1.87118	0.318874	0.0093573	0.00061163
Portfel 3	1.81246	-0.019899	0.0089948	0.00060060

Źródło: obliczenia własne.

W kolejnym etapie badania dokonano estymacji nieznanymi wartościami parametrów rozkładu AL . Zastosowano metodę momentów, która dla dużej próby umożliwia wyprowadzenie estymatorów cechujących się stabilnością oraz zbieżnością z rozkładem normalnym. Wartość dowolnego momentu (rzędu r) zmiennej losowej X o asymetrycznym rozkładzie Laplace'a wyznacza się za pomocą wzoru (Kozubowski, Podgórski, 1999):

$$EX^r = r! \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right)^r \frac{1 + (-1)^r \kappa^{2(r+1)}}{1 + \kappa^2}, \quad (5)$$

gdzie parametr κ dany jest wzorem (2).

Estymatory otrzymane za pomocą metody momentów dane są wzorem:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \sqrt{\frac{\hat{m}_2}{2} - \hat{m}_1^2} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie \hat{m}_1 oraz \hat{m}_2 są oszacowanymi na podstawie próby estymatorami pierwszego i drugiego momentu zmiennej losowej o asymetrycznym rozkładzie Laplace'a.

W tabeli 3 przedstawiono parametry¹ charakteryzujące rozkłady stóp zwrotu badanych portfeli przy założeniu, że posiadają one funkcje gęstości określone wzorem (3).

Z obliczeń zaprezentowanych w tabeli 3 wynika, że w przypadku każdego z analizowanych portfeli rozkład stopy zwrotu jest asymetryczny ($\hat{\kappa} \neq 1$, $\hat{\gamma}_1 \neq 0$). Ponadto wartość współczynnika ekscesu $\hat{\gamma}_2 > 0$, co świadczy o tym, że empiryczne rozkłady są leptokurtyczne. Najmniejszym stopniem asymetrii oraz spłaszczenia charakteryzuje się stopa zwrotu Portfela 1. W przypadku tego portfela wykazano największą zbieżność z rozkładem normalnym.

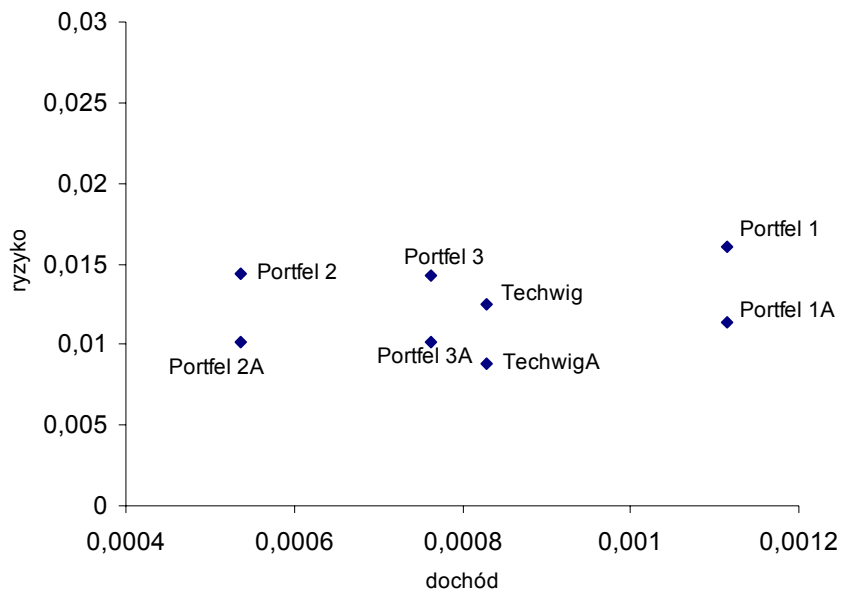
¹ parametry wyznaczone na podstawie Kozubowski, Podgórski (1999).

Tabela 3. Parametry asymetrycznego rozkładu Laplace'a dla badanych portfeli

Portfel	Parametr				
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\gamma}_1^2$	$\hat{\gamma}_2^3$
TECHWIG	0.000828	0.00877	0.95391	0.19953	3.02656
Portfel 1	0.000478	0.01755	0.98646	0.05782	3.00223
Portfel 2	0.000537	0.01012	0.97384	0.11235	3.00842
Portfel 3	0.000763	0.01011	0.96298	0.15970	3.01701

Źródło: obliczenia własne.

Poniżej przedstawiono mapę ryzyko - dochód badanych portfeli przy założeniu, że stopy zwrotu mają rozkład normalny oraz *AL*.



Wykres 1. Mapa ryzyko-dochód

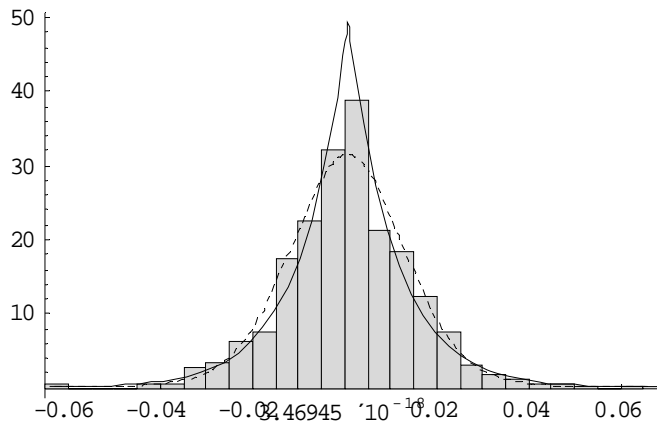
Źródło: opracowanie własne.

Mapa ryzyko – dochód pokazuje, iż portfele charakteryzowane asymetrycznym rozkładem Laplace'a (indeksowane symbolem A) cechują się niższym poziomem ryzyka niż w przypadku rozkładu normalnego (przy takim samym poziomie wartości oczekiwanej portfela), a tym samym niższym poziomem zmienności. Dopasowanie estymowanych rozkładów do danych empirycznych przed-

² Współczynnik skośności oszacowany na podstawie próby.

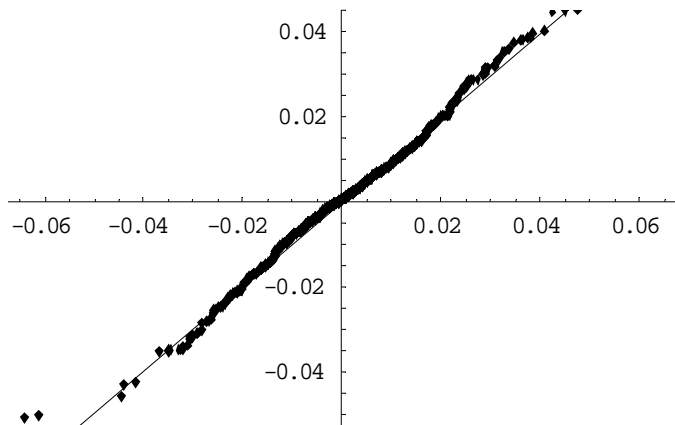
³ Współczynnik spłaszczenia oszacowany na podstawie próby.

stawiono graficznie na przykładzie histogramu oraz wykresu kwantyl - kwantyl dla Portfela 3 (wykresy 2 oraz 3).



Wykres 2. Histogram i krzywe gęstości – Portfel 3

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 3. Kwantyle asymetrycznego rozkładu Laplace'a – Portfel 3

Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie histogramu przedstawiono dodatkowo krzywe gęstości rozkładu stabilnego (linia przerywana) oraz *AL* (linia ciągła). Widać wyraźnie, że w przypadku rozkładu *AL* krzywa gęstości pokrywa wartości oscylujące wokół parametru położenia (charakterystyczny, ostro szpiczasty kształt krzywej gęstości), uwzględniając zarazem leptokurtyczny charakter danych. Natomiast wykres kwantyli potwierdza dobre dopasowanie rozkładu do danych empirycznych.

4. Podsumowanie

Celem pracy była próba zastosowania, odmiennego od klasycznego, podejścia do budowy portfela inwestycyjnego na przykładzie spółek GPW w Warszawie. Dla uproszczenia założono portfele dwuskładnikowe, o równych udziałach. Ze względu na rozbieżność z rozkładem normalnym, charakterystyki stóp zwrotu oszacowano wykorzystując asymetryczny rozkład Laplace'a. Wykazuje on dobre dopasowanie do danych empirycznych, uwzględniając zarówno leptokurtyczność, jak i gruboogonowy charakter finansowych szeregów czasowych. Jego przewaga nad modelami stabilnymi wynika przede wszystkim z istnienia jawnych postaci funkcji gęstości oraz momentów wszystkich rzędów. Dodatkowo tą klasę rozkładów można łatwo zaaplikować w środowisko wielowymiarowe, co umożliwi ich stosowalność w przypadku statystycznej analizy rynków finansowych.

Literatura

- Jajuga, K. (2003), *Metody statystyczne w finansach*, AE we Wrocławiu, Katedra Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń (www.statsoft.pl/czytelnia/finanse/wstepfinans.html).
- Kotz, S., Kozubowski, T. J., Podgórski K. (2002), Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Laplace Parameters, *Annals of the Institute Of Statistical Mathematics*, vol. 54, no. 4, 816–826.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (1999), A Class of Asymmetric Distributions, *Actuarial Research Clearing House*, vol. 1, 1999, 113–134.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2003), A log-Laplace Growth Rate Model, *Math. Scientist*, 28, 49–60.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2000), Asymmetric Laplace Distributions, *Math. Scientist*, 25, 37–46.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2001), Asymmetric Laplace Laws and Modeling Financial Data, *Mathematical and Computer Modelling*, 34, 1003–1021.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2003), Log-Laplace Distributions, *International Mathematical Journal*, vol. 3, no. 4, 467–495.
- Markowitz, H. (1952), Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, vol. 7, 77–91.
- Osińska, M. (2006), *Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Rachev, S., Han, S. (2000), Portfolio Management with Stable Distribution, *Mathematical Methods of Operation Research*, No 50, 341–352.
- Rachev, S., Mittnik, S. (2000), Stable Paretian Models in Finance, *Series in Financial Economics and Quantitative Analysis*, John Wiley & Sons Ltd., England.