

## DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Daniel Kosiorowski*  
*Akademia Ekonomiczna w Krakowie*

### O kwantylowym funkcjonale asymetrii rozkładu wektora losowego w badaniach szeregów finansowych

#### 1. Wprowadzenie

Odstępstwo wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa od ustalonego pojęcia symetrii określa się mianem skośności rozkładu. Przez symetrię na ogół rozumie się własność obiektu polegającą na tym, że istnieje pewne różne od tożsamościowego przekształcenie, które odwzorowuje dany obiekt na niego samego. Zaznaczmy, że w przypadku wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa wykorzystuje się wiele<sup>1</sup> różniących się wzajemnie pojęć wielowymiarowej symetrii, które sprowadzają się do zwykłego pojęcia symetrii w przypadku jednowymiarowym tzn. symetrii zwierciadlanej.

Skośność wielowymiarowego rozkładu stanowi o częstotliwości wychylania się wartości wielowymiarowej zmiennej losowej reprezentującej układ ekonomiczny o określony wektor od jej centrum. Zdaniem autora w wielu przypadkach jej miarę można interpretować w kategoriach zewnętrznej siły działającej na układ poprzez analogię z kształtem nadmorskiej wydmy oraz siłą wiejącego wiatru.

Skośność populacji wpływa m. in. na jakość analizy czynnikowej, analizy dyskryminacyjnej, użyteczność miar zależności rozkładów brzegowych, szybkość zbieżności estymatorów położenia i rozrzutu oraz ich interpretacje.

Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie możliwości pomiaru odstępstwa wielowymiarowego rozkładu od symetrii centralnej<sup>2</sup> za pomocą nieparametrycznego funkcjonału asymetrii indukowanego przez stosownie wybrane

---

<sup>1</sup> Warto zapoznać się z pracą Serfling (2006).

<sup>2</sup> Mówimy, że wektor losowy  $\mathbf{X}^r$  ma rozkład centralnie symetryczny wokół  $\mathbf{m}$  jeżeli  $\mathbf{X}^r - \theta = \theta - \mathbf{X}^r$ , gdzie symbol " $=$ " oznacza równość rozkładów.

pojęcie wielowymiarowego kwantyla. Proponujemy zmodyfikowany funkcjonal asymetrii wykorzystujący funkcję głębi projekcyjnej. W pracy pokazujemy wybrane statystyczne własności funkcjonału na przykładzie symulacji oraz na przykładzie empirycznym. Przywołujemy wyniki własnych badań wskazujące, że w pewnych sytuacjach jego statystyczne własności są lepsze od oryginalnej propozycji Chaudhuri'ego i Koltchinski'ego, którzy wykorzystywali pojęcie kwantyla przestrzennego.

W pracy  $B^{d-1}(\mathbf{0})$  oznacza kulę jednostkową,  $S_r^{d-1}(\mathbf{0})$  oznacza sferę o promieniu  $r$  o środku w punkcie  $\mathbf{0}$ ,  $\Delta(S)$  jest miarą Lebesgue'a zbioru mierzalnego  $S \subset \square^d$ ,  $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$  oznacza  $n$ -elementową próbę z  $\mathbf{X}$ ,  $BP(T, \mathbf{X}^n)$  to punkt załamania Hubera estymatora  $T$  z  $n$ -elementowej próby,  $\lfloor x \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ .

## 2. Wybrane koncepcje wielowymiarowego kwantyla

Kwantyle przestrzenne (geometryczne) wprowadzili niezależnie Koltchinski (1997) oraz Chaudhuri (1996) uogólniając znaną definicję jednowymiarowego kwantyla wykorzystującą  $L_1$  normę. Otóż, dla jednowymiarowej zmiennej losowej  $X$ , dla której  $E|X| < \infty$  i dla  $0 < p < 1$ , jednowymiarowy  $p$ -ty kwantyl można określić jako każdą wartość  $\theta$  minimalizującą:

$$E[|X - \theta| + (2p - 1)(X - \theta)]. \quad (1)$$

Chaudhuri uogólnia powyższą definicję tę na przypadek  $\square^d$ . Rozszerza zbiór indeksów kwantyla do otwartej kuli jednostkowej  $B^{d-1}(\mathbf{0})$ , aby następnie zdefiniować  $d$ -wymiarowe kwantyle jako minima formy:

$$E[\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{X} - \theta) - \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{X})], \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{X}$  i  $\theta$  przyjmują wartości w  $\square^d$  oraz  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = \|\mathbf{t}\| + \langle \mathbf{u}, \mathbf{t} \rangle$  z  $\|\cdot\|$  zwykłą normą euklidesową i  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zwykłym iloczynem skalarnym.

W przypadku wektora losowego  $\mathbf{X}$  w  $\square^d$  o rozkładzie  $F$  oraz wektora jednostkowego  $\mathbf{u} \in B^{d-1}(\mathbf{0})$ ,  $\mathbf{u}$ -ty kwantyl  $Q_F(\mathbf{u})$  ma zarówno kierunek jak i wielkość.

Łatwo pokazać że, dla każdego  $\mathbf{u} \in B^{d-1}(\mathbf{0})$ , kwantyl  $Q_F(\mathbf{u})$  można przedstawić jako rozwiązanie względem  $\mathbf{x}$  równania:

$$-E[(\mathbf{X} - \mathbf{x}) / \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\|] = \mathbf{u}. \quad (3)$$

Wektor  $\mathbf{u}$  można interpretować jako znormalizowany przeciętny kierunek, który trzeba pokonać, aby przesunąć się od obserwacji  $\mathbf{X}$  generowanej przez

rozkład  $F$  do punktu  $\mathbf{x}_u$  będącego minimum (3), gdy przeciętną bierzemy po wszystkich obserwacjach  $\mathbf{X}$ . Punkt  $\mathbf{x} = Q_F(\mathbf{u}_x)$  określamy jako centralny bądź odstający w zależności od tego czy  $\|\mathbf{u}_x\|$  jest bliska odpowiednio 0 bądź 1.

Definiowana w obrębie podejścia tzw. **mediana przestrzenna** określona jest warunkiem  $M_F = Q_F(\mathbf{0})$ .

Warto zauważyć, że w przypadku, gdy rozkład  $F$  wektora  $\mathbf{X}$  jest centralnie symetryczny wokół  $M_F$ , tzn.  $\mathbf{X} - M_F$  oraz  $M_F - \mathbf{X}$  mają taki sam rozkład, wtedy dla funkcji  $Q_F$  zachodzi:

$$Q_F(-\mathbf{u}) - M_F = -(Q_F(\mathbf{u}) - M_F), \quad \mathbf{u} \in B^{d-1}(\mathbf{0}). \quad (3)$$

Kwantyle przestrzenne są ekwiwariantne względem przesunięć, ortogonalnych i homogenicznych przekształceń skali tzn. mamy na uwadze przekształcenia postaci  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą ortogonalną,  $\mathbf{b}$  jest dowolnym wektorem. Miara odstawania punktu  $\mathbf{x}$  jest niezmiennicza względem przekształceń liniowych tzn.  $\|Q_{\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{x})\| = \|Q_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x})\|$ .

Wielowymiarowe kwantyle wprowadza się także w obrębie konkurencyjnego i ogólniejszego do powyższego podejścia określanego mianem **koncepcji głębi danych** (patrz np. Dyckerhoff, 2004) bądź Liu i in, 1999).

W ramach koncepcji rozważa się specjalną funkcje nazywane **statystycznymi funkcjami głębi** (głębiami) służące porządkowaniu obserwacji generowanych przez wielowymiarowe rozkłady na zasadzie odstawania od centrów tychże rozkładów. Punkt, dla którego funkcja głębi przyjmuje wartość maksymalną określa się **medianą indukowaną przez** stosownie wybraną **funkcję głębi**.

W niniejszej pracy wykorzystujemy tzw. **funkcję głębi projekcyjnej**<sup>3</sup>, której własności badali m. in. Zuo (2003) oraz Zuo i in. (2004).

Otóż głębina projekcyjna punktu  $\mathbf{x} \in \square^d$  definiowana jest jako:

$$PD(\mathbf{x}, \mathbf{X}^n) = \left[ 1 + \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \left| \mathbf{u}^T \mathbf{x} - m(\mathbf{u}^T \mathbf{X}^n) \right| / \sigma(\mathbf{u}^T \mathbf{X}^n) \right]^{-1}, \quad (4)$$

gdzie  $m$  i  $\sigma$  to miary położenia i rozrzutu w  $\square$ ,  $\mathbf{u}^T \mathbf{X}^n = \{\mathbf{u}^T \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{u}^T \mathbf{X}_n\}$ .

Głębina projekcyjna oraz indukowane przez nią estymatory położenia centrum oraz rozrzutu wektora losowego odznaczają się bardzo dobrymi własnościami w kategoriach odporności oraz efektywności dla szerokiej klasy populacji. Głębina ta jest afinicznie niezmiennicza.

<sup>3</sup> Zuo (2003) wykazał, że gdy punkty  $\mathbf{X}^n$  są w ogólnej pozycji, tzn. nie więcej niż  $d - 1$  punktów z  $\mathbf{X}^n$  nie leży w  $d - 1$  wymiarowej hiperpłaszczyźnie, to wtedy

$$BP(PM_F, \mathbf{X}^n) = \lfloor (n - d + 1) / 2 \rfloor / n, \quad \text{gdzie } PM_F \text{ oznacza medianę projekcyjną.}$$

Najczęściej wykorzystuje się odporne  $m$  i  $\sigma$  takie jak mediana (Med.) bądź zmodyfikowana mediana odchylenia absolutnego od mediany  $MAD_d$ :

$$MAD_d(\mathbf{x}^n) = Med_d \left\{ \left| \mathbf{x}_i - Med(\mathbf{x}^n) \right| \right\}, \quad (5)$$

gdzie  $Med_d = (x_{\lfloor (n+d)/2 \rfloor} + x_{\lfloor (n+d+1)/2 \rfloor})/2$

oraz  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  oznacza uporządkowany zbiór obserwacji.

Wykorzystując kwantylową funkcję  $Q_F$  bądź głębnię projekcyjną  $PD(\mathbf{x}, F)$  definiuje się tzw. **obszary centralne** rzędu  $r$  (w obrębie koncepcji głębi danych ich brzegi określa się mianem d-wymiarowych kwantyli):

$$C_F(r) = \{Q_F(\mathbf{u}) : \|\mathbf{u}\| \leq r\}, \quad (6)$$

$$PC_F(r) = \{\mathbf{x} : PD(\mathbf{x}, F) \geq r\}. \quad (7)$$

W przypadku gdy  $F$  jest centralnie symetryczny, obszary centralne odznaczają się taką samą własnością.

Wykorzystując obszary centralne możemy zdefiniować tzw. **krzywą skali** będącą rzeczywistym funkcjonałem objętości obszarów centralnych a służącą do nieparametrycznego opisu rozrzutu wektora losowego wokół wielowymiarowej mediany. Krzywa skali definiowana jest jako:

$$v_F(r) = \Delta(C_F(r)), \quad 0 \leq r < 1, \quad (8)$$

$$\tilde{v}_F(r) = \Delta(PC_F(r)), \quad 0 \leq r < 1. \quad (9)$$

### 3. Kwantylowy funkcjonał asymetrii

Zdaniem autora propozycją nieparametrycznej miary wielowymiarowej skośności, na którą warto zwrócić uwagę w kontekście badań oddziaływań układów ekonomicznych oraz specyfikacji modeli ekonometrycznych jest tzw. **kwantylowy funkcjonał asymetrii**. Funkcjonał został po raz pierwszy wprowadzony w obrębie studiów nad pojęciem kwantyla przestrzennego a jak zobaczymy w dalszej części można go także zdefiniować w ramach koncepcji głębi danych. Przez skośność będziemy rozumieć odstępstwo od symetrii centralnej.

Wykorzystując wprowadzoną wcześniej funkcję kwantylową  $Q_F(\mathbf{u})$  możemy zdefiniować  $L$  – funkcjonał o wartościach wektorowych będący ważoną średnią  $Q_F(\mathbf{u})$ :

$$\int_{B^{d-1}(\mathbf{0})} Q_F(\mathbf{u}) m(d\mathbf{u}), \quad (10)$$

gdzie całkujemy względem rozkładu  $m(d\mathbf{u})$  na zbiorze indeksów  $B^{d-1}(\mathbf{0})$ .

W kontekście dalszych rozważań szczególnie interesującą jest klasa miar położenia uzyskiwana w oparciu o powyższy funkcjonał a zdefiniowana przez:

$$l_F(r) = \int_{S_r^{d-1}(\mathbf{0})} Q_F(\mathbf{u})m(d\mathbf{u}), \quad 0 \leq r < 1, \quad (11)$$

gdzie  $S_r^{d-1}(\mathbf{0})$  jest sferą o promieniu  $r$  z środkiem w punkcie  $\mathbf{0}$  oraz  $m(d\mathbf{u})$  jest rozkładem jednostajnym na tej sferze. (Zauważmy, że  $l_F(\mathbf{0}) = M_F$ ).

Warto zaznaczyć, że w przypadku centralnie symetrycznych  $F$  ma miejsce interesująca własność funkcjonału:  $l_F(r) \equiv M_F$ , którą wykorzystuje się w konstruowaniu miary skośności.

Łatwo pokazać, że  $l_F(r)$  jest ekwiwariantne względem przesunięć ortogonalnych i homogenicznych przekształceń skali.

**Wektorowy funkcjonal wielowymiarowej skośności** definiowany jest jako:

$$s_F(r) = 2 \frac{l_F(r) - M_F}{v_F(r)^{1/d}}, \quad 0 < r < 1, \quad (12)$$

gdzie  $M_F$  oznacza wielowymiarową medianę,  $v_F(r)$  oznacza krzywą skali,  $d$  oznacza wymiar wektora losowego,  $l_F(r)$  oznacza wprowadzony wcześniej  $L$ -funkcjonał.

W przypadku centralnie symetrycznych  $F$  dla każdego  $r$  wartością funkcjonału jest wektor zerowy.

Ideę pomiaru skośności za pomocą (13) możemy wyrazić w następujący sposób: dla każdego  $r \in (0,1)$  badamy różnicę pomiędzy medianą a przeciętną punktów należących do  $r$ -tego obszaru centralnego, różnice takie „standaryzujemy” objętościami  $r$ -tych obszarów centralnych.

W oparciu o wprowadzony funkcjonal można uzyskać skalarną miarę skośności rozkładu  $F$  w jakimkolwiek kierunku  $h$  brany od mediany  $M_F$ , rozważając iloczyny skalarne:

$$\langle s_F(r), \mathbf{h} \rangle \quad \text{dla } 0 < r < 1. \quad (13)$$

Wykorzystując funkcjonal (13) można także zaproponować rzeczywisty funkcjonal asymetrii:

$$\|s_F(r)\| = 2 \frac{\left\| \int_{S_r^{d-1}(\mathbf{0})} Q_F(\mathbf{u})m(d\mathbf{u}) - M_F \right\|}{v_F(r)^{1/d}}, \quad 0 < r < 1, \quad (14)$$

oraz rzeczywisty indeks asymetrii:

$$A_F = \sup_{0 < r < 1} \|s_F(r)\|. \quad (15)$$

**Propozycja:** Zauważmy, że zarówno rzeczywisty funkcjonal asymetrii (15) oraz indeks asymetrii (16) oraz można zdefiniować z wykorzystaniem stosownie wybranej funkcji głębi np. głębi projekcyjnej. Za  $M_F$  przyjmujemy w takim

przypadku medianę indukowaną przez głębnię projekcyjną  $PM_F$ , dla każdego  $r \in (0,1)$  badamy różnicę pomiędzy przeciętną punktów wewnątrz obszaru centralnego rzędu  $r$  a medianą  $PM_F$ .

Rozważmy mianowicie:

$$\|\tilde{s}_F(p)\| = 2 \frac{\left\| \int_{PC_F(p)} W(\mathbf{x}) m_p(d\mathbf{x}) - PM_F \right\|}{\tilde{v}_F(p)^{1/d}}, \quad 0 < p < 1, \quad (16)$$

gdzie,  $PC_F(p)$  to projekcyjny obszar centralny rzędu  $r$ ,  $m_p(d\mathbf{x})$  oznacza miarę np. jednostajną na  $PC_F(p)$ ,  $PM_F$  oznacza indukowaną przez głębnię projekcyjną medianę,  $W(\cdot)$  właściwą dla zagadnienia funkcję wagową np.  $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

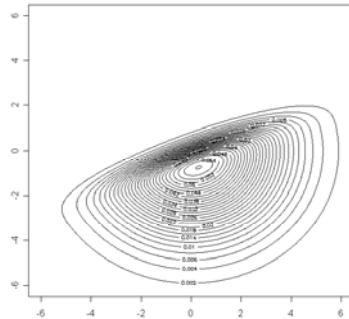
Proponowany funkcjonal asymetrii dzięki własnościom głębi projekcyjnej i własnościom indukowanych przez nią obszarów centralnych jest afinicznie niezmienniczy tzn. nie zależy od przyjętego w badaniu układu współrzędnych. Umożliwia nieparametryczny pomiar asymetrii populacji nie posiadającej momentów. Można pokazać, że funkcjonal (17) z próby jest mocno zgodnym w sensie odległości Kołmogorowa estymatorem odpowiednika w populacji.

#### 4. Własności proponowanego funkcjonału asymetrii

W celu sprawdzenia wybranych własności (17) przeprowadzono badania symulacyjne. Generowano mianowicie po 100 prób 100 elementowych z dwuwymiarowych rozkładów (na wykresach 1-4 pokazano przypadki a i b):

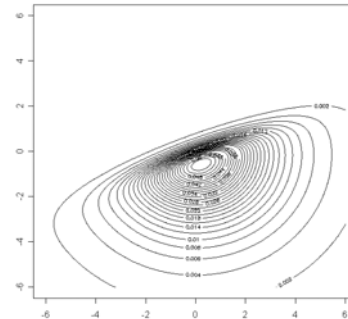
- a) skośnego normalnego i skośnego T o dwóch stopniach swobody o parametrach: położenia  $\mathbf{m} = (0,0)$ , rozrzutu  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ , kształtu  $\mathbf{a} = (2, -5)$ .
- b) skośnego normalnego i skośnego T o dwóch stopniach swobody o parametrach: położenia  $\mathbf{m} = (0,0)$ , rozrzutu  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ , kształtu  $\mathbf{a} = (-2, -15)$ .
- c) Marshalla-Olkina o parametrach  $\mathbf{l}_1 = (1,1,1)$  i  $\mathbf{l}_2 = (0.01, 0.01, 1)$ .

Wyniki symulacji tzn. oszacowane krzywe asymetrii sumarycznie zaprezentowano na wykresie 5. Z wykresu wynika m. in., że proponowany funkcjonal dobrze rozróżnia zarówno wyszczególnione typy rozkładów (skośny normalny, skośny T, Marshalla-Olkina) jak i rozkłady należące do tego samego typu a różniące się parametrem asymetrii. Dodajmy, że z prowadzonych wcześniej badań wynika, że nasza propozycja lepiej rozróżnia pomiędzy skośnymi rozkładami normalnym i T aniżeli oryginalna propozycja Chaudhuri (1996) oraz propozycje Liu i in (1999).



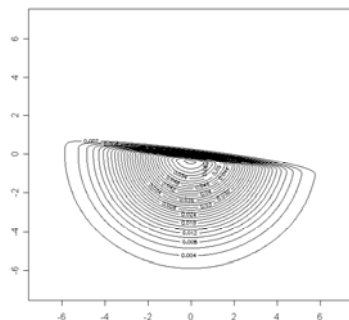
Wykres 1. Kontury stałej gęstości skośnego rozkładu normalnego z  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ ,  $\mathbf{m} = (0,0)$ ,  $\mathbf{a} = (2,-5)$

Źródło: opracowanie własne.



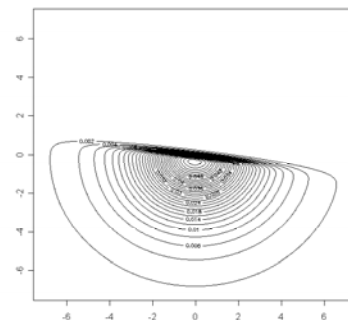
Wykres 2. Kontury stałej gęstości skośnego rozkładu T z  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ ,  $\mathbf{m} = (0,0)$ ,  $\mathbf{a} = (2,-5)$ .

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 3. Kontury stałej gęstości skośnego rozkładu normalnego z  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ ,  $\mathbf{m} = (0,0)$ ,  $\mathbf{a} = (-2,-15)$

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4. Kontury stałej gęstości skośnego rozkładu T z  $W = \text{diag}(2) \cdot 5$ ,  $\mathbf{m} = (0,0)$ ,  $\mathbf{a} = (-2,-15)$

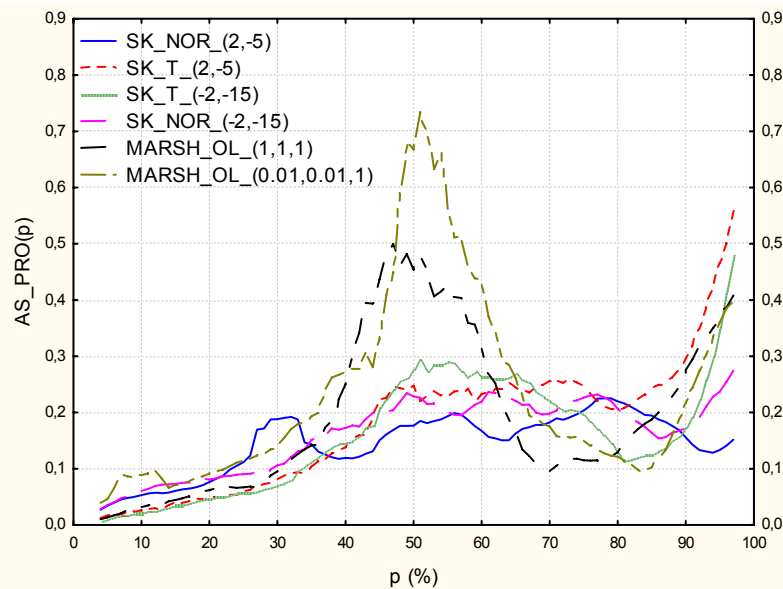
Źródło: opracowanie własne.

## 5. Podsumowanie

Nieparametryczny i odporny pomiar stopnia asymetrii rozkładu opisującego wielowymiarowy układ ekonomiczny jest ważny zarówno z teoretycznych jak i praktycznych względów. Zdaniem autora naszkicowana w pracy perspektywa badań odstępstw od symetrii centralnej może przyczynić się do lepszego zrozumienia struktury współzależności układów ekonomicznych. Przedstawione własności proponowanego funkcjonala asymetrii wykorzystującego głębię projekcyjną wydają się być wystarczającym uzasadnieniem dalszych studiów zagadnienia.

## Literatura

- Azzalini, A., Capitanio, A. (2003), Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew t Distribution, *Journal Royal Statistical Society B*, 65, 367–389.
- Chaudhuri, P. (1996), On a Geometric Notion of Quantiles for Multivariate Data, *Journal of the American Statistical Association*, 91, 862–872
- Dyckerhoff, R. (2004), Data Depths Satisfying the Projection Property, *Allgemeines Statistisches Archiv*, 88, 163–190.
- Koltchinskii, V. (1997), M-estimation, Convexity and Quantiles, *The Annals of Statistics*, 25, 435–477.
- Kosiorowski, D. (2006), About Strain Force in a Capital and Robust Analysis of Planar Shape, *10th Jubilee Conference of International Federation of Classification Societies*, University of Ljubljana, Slovenia, July 25–29.
- Liu, R. Y., Parelius, J. M., Singh, K. (1999), Multivariate Analysis by Data Depth: Descriptive Statistics, Graphics and Inference (with discussion), *The Annals of Statistics*, 27, 783–858.
- Serfling, R. J. (2004), Nonparametric Multivariate Descriptive Measures Based on Spatial Quantiles, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 123, 259–278.
- Serfling, R. J. (2006), Multivariate Symmetry and Asymmetry, In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Second Edition (S. Kotz, N. Balakrishnan, C. B. Read and B. Vidakovic, eds.), 5338–5345, Wiley.
- Zuo, Y. (2003), Projection Based Depth Functions and Associated Medians, *The Annals of Statistics*, 31(5), 1460–1490.
- Zuo, Y., Cui, H., Young, D. (2004), Influence Function and Maximum Bias of Projection Depth Based Estimators, *The Annals of Statistics*, 32 (1), 189–218.



Rys. 5: Wyniki badań symulacyjnych proponowanego funkcjonalu asymetrii  
 Źródło: opracowanie własne.