DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Joanna Kisielińska
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Modelowanie szeregów czasowych z wahaniami w czasie o nieliniowo zmiennej amplitudzie na przykładzie inflacji rejestrowanej

1. Wstęp

W teorii prognozowania do modelowania szeregów czasowych z wahaniami w czasie, wykorzystuje się dwa podstawowe typy modeli - addytywne i multiplikatywne. Wprawdzie modele multiplikatywne umożliwiają uwzględnienie zmienności amplitudy wahań w czasie, jednak ich istotnym ograniczeniem jest możliwość modelowania zmian jedynie wprost proporcjonalnych do trendu. Uniknięcie tego ograniczenia umożliwia zastosowanie modelu addytywnego, w którym amplituda oscylacji może zmieniać się według dowolnej nieliniowej zależności. W artykule opisane zostaną zasady konstrukcji takiego modelu oraz sposób wyznaczenia funkcji, zgodnie z którą zmienia się amplituda oscylacji.

Model ten przedstawiony zostanie na przykładzie inflacji rejestrowanej (indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych). Do jego budowy użyte zostaną wartości indeksu w okresie od marca 1990 r. do lutego 2006. Inflacja rejestrowana z przedziału od marca 2006 do marca 2007 wykorzystana będzie natomiast do weryfikacji modeli.

Model addytywny ze zmienną amplitudą wahań zostanie porównany z modelem multiplikatywnym. Okresowość inflacji do obydwu modeli wprowadzona będzie dwiema podstawowymi metodami – analizą Fouriera oraz metodą wskaźników.

2. Metody wyodrębniania tendencji rozwojowej oraz amplitudy oscylacji

Weźmy pod uwagę pewną zmienną y(t) zależną od czasu. Zakładamy, że zmienność jej wynika z dwóch czynników. Pierwszy z nich to zmiany według pewnej funkcji zwanej trendem (nazywanej także tendencją rozwojową), którą oznaczymy jako $y^*(t)$. Drugi natomiast jest konsekwencją pewnych powtarzających się cykli o(t). W prognozowaniu wyróżnia się dwa typy modeli - addytywny i multiplikatywny (patrz praca zbiorowa pod redakcją Cieślak 2005, Witkowska 2005, Zeliaś i inni 2004). W modelu addytywnym, jak wskazuje nazwa, wahania okresowe dodawane są do funkcji trendu, w multiplikatywnym zaś przez nią mnożone. Modele addytywne stosowane są, gdy wahania cechuje stałość w czasie, natomiast multiplikatywne w przypadku przeciwnym – wahania ulegają w czasie zmianom wprost proporcjonalnym do trendu.

Model addytywny można zapisać następująco:

$$y(t) = y^*(t) + o(t) + \xi_t \qquad (1)$$

natomiast multiplikatywny jako:

$$y(t) = y^*(t) \cdot o(t) \cdot \xi_t \qquad (2)$$

gdzie: ξ_t jest elementem losowym, zakłóceniem.

Do wyznaczenia funkcji trendu zastosować można metodę najmniejszych kwadratów. Pamiętać jednak należy, że w przypadku przyjęcia modelu multiplikatywnego, konieczne jest obustronne zlogarytmowanie równania (2), sprowadzające go w istocie do modelu addytywnego. Wyznaczony wówczas trend należy przekształcić przy pomocy funkcji wykładniczej, której podstawa powinna być taka sama, jak podstawa użytego logarytmu.

Po wyznaczeniu trendu należy go wyeliminować, aby wyodrębnić część wynikającą jedynie z okresowości zjawiska. Sposób eliminacji zależy od typu modelu. W modelu addytywnym trend jest odejmowany od rzeczywistych wartości zmiennej, w multiplikatywnym natomiast wartości rzeczywiste są przez trend dzielone. Uzyskana funkcja okresowa oznaczona zostanie jako o(t). W modelu addytywnym oblicza się ją jako:

$$o(t) = y(t) - y^*(t) \qquad (3)$$

a w modelu multiplikatywnym natomiast:

$$o(t) = \frac{y(t)}{y^*(t)} \qquad (4)$$

Przekształcenie (3) lub (4) powinno doprowadzić do uzyskania funkcji okresowej, w której nie występują zmiany wahań w kolejnych okresach, lub inaczej mówiąc amplituda oscylacji nie ulega zmianom w czasie. Jest to możliwe, jeśli w funkcji źródłowej y(t) amplituda wahań była stała i zastosowano model addytywny lub, gdy amplituda była wprost proporcjonalna do trendu i przyjęto model multiplikatywny.

Jeśli jednak wahania zmieniają się w czasie i nie są proporcjonalne do trendu, modele (1) i (2) nie pozwolą prawidłowo opisać zjawiska. Modele te zawodzą również w przypadkach, gdy wahania zmieniają się w czasie (nawet proporcjonalnie do trendu), jednak zmienna y(t) przyjmuje również wartości ujemne. Model addytywny uniemożliwia modelowanie zmienności wahań, zaś multiplikatywnego nie można zastosować, ponieważ nie można zlogarytmować funkcji y(t).

Warto tu jeszcze wspomnieć o jeszcze jednej wadzie modelu multiplikatywnego. Zakłada się w nim bowiem, że zakłócenia są mnożone przez funkcję obrazującą zależność badanego zjawiska od czasu. Wartość ich jest więc zwielokrotniana w wyniku tej operacji. W większości modeli ekonometrycznych zakłócenia są do poszukiwanych zależności dodawane. Mnożenie zakłóceń we wzorze (2) wynika z konieczności linearyzacji zadania poprzez logarytmowanie.

W przypadkach, gdy wahania okresowe ulegają zmianom w czasie, zaś ich amplituda nie jest stała, jedynym rozwiązaniem jest założenie modelu addytywnego i oscylacji o amplitudzie zmiennej. W funkcji o(t) należy wówczas wyodrębnić amplitudę zależną od czasu a(t) i wahania w(t), o odchyleniach nie zmieniających się w czasie (nie zależnym od rozpatrywanego cyklu). Funkcja o(t) jest wówczas określona jako:

$$o(t) = a(t) \cdot w(t) \tag{5}$$

Wyodrębnienie składnika w(t), wymaga wyznaczenia funkcji a(t). Wzór (5) przypomina wprawdzie model multiplikatywny, nie jest nim jednak. Funkcja o(t) została uzyskana poprzez odjecie od y(t) funkcji trendu. Przyjmuje więc wartości zarówno dodatnie jak i ujemne, a oscylacje następują wokół zera. Nie ma więc mowy o funkcji trendu – ponieważ została już wyeliminowana. Co do funkcji a(t) należy przyjąć, że przyjmuje wartości zawsze dodatnie (amplituda wahań nie może być ujemna).

Wyeliminowanie wartości ujemnych z o(t) wymaga obliczenia wartości bezwzględnej |o(t)|:

$$|o(t)| = |a(t) \cdot w(t)| = a(t) \cdot |w(t)| \tag{6}$$

W funkcji |o(t)| natomiast można już wyraźnie wyróżnić tendencję rozwojową, wynikającą ze wzrostu (lub zmniejszania) się wahań w czasie. Jeśli równanie (6) zostanie potraktowane jak model multiplikatywny a(t) może być wyznaczone jako funkcja trendu dla |o(t)|. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów możliwe będzie po obustronnym zlogarytmowaniu wzoru (6).

Ostatecznie więc, eliminacja zmienności amplitudy wahań wymaga podzielenia o(t) przez oszacowaną zależność a(t):

$$w(t) = \frac{o(t)}{a(t)} \tag{7}$$

Otrzymana w ten sposób funkcja reprezentuje wahania, których amplituda w czasie nie ulega zmianie.

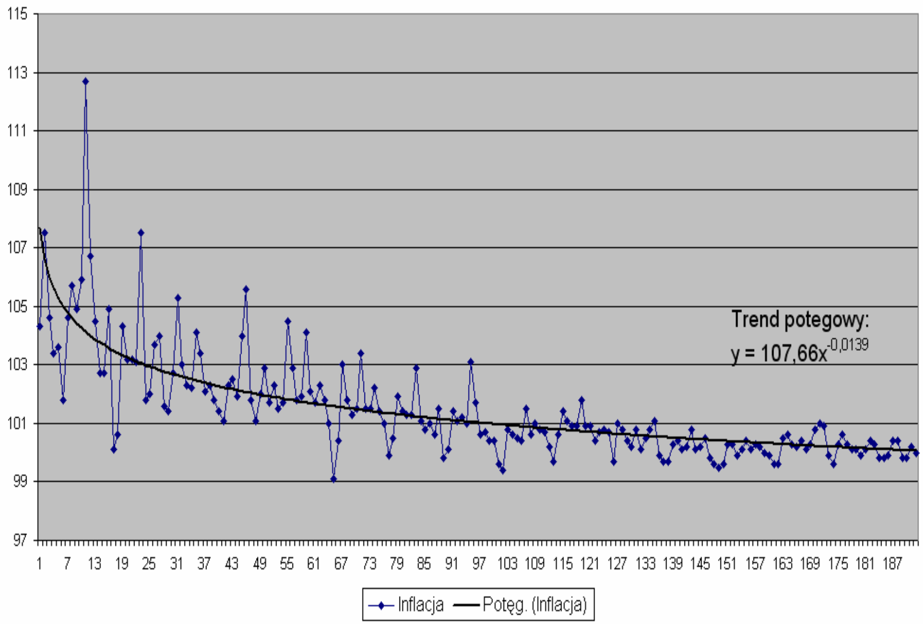
Do modelowania szeregów okresowych o stałej amplitudzie i bez tendencji rozwojowej zastosować można analizę Fouriera i metodę wskaźników. Omówienie metody wskaźników znaleźć można w większości podręczników do prognozowania (praca zbiorowa pod redakcją Cieślak 2005, Witkowska 2005, Zeliaś i inni 2004). Pobieżne opisy analizy Fouriera zawiera również większość z nich. Jako przykład dokładnej prezentacji tej metody podać można pracę (Osiowski 1981).

Po zbudowaniu modeli konieczne jest dokonanie oceny ich poprawności. Można wykorzystać do tego wiele formuł określających błędy ex post tzw. prognoz wygasłych (ich bogaty przegląd zawiera praca Witkowskiej 2005). Najczęściej wykorzystywany jest błąd średniokwadratowy, określony wzorem:

$$\mathrm{RME} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)^2} \qquad (8)$$

Zwykle wymaga się aby okres, dla którego obliczany jest błąd, nie był użyty do jego konstrukcji.

Rys 1. Wartości indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych w latach 1990 – 2003



Źródło: Opracowanie własne.

3. Modele inflacji w Polsce

Na rys. 1 przedstawiono wykres obrazujący zmiany indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych w Polsce od marca 1990 r. do lutego 2006. Wykres ten wyraźnie pokazuje, że wahania inflacji nie są stałe w czasie, wobec czego niecelowe jest do modelowania zjawiska, użycie zwykłego modelu addytywnego. Dlatego też zbudowany zostanie model addytywny ze zmienną w czasie amplitudą wahań, oraz dla porównania model multiplikatywny. W obydwu przypadkach zastosowana zostanie analiza Fouriera i metoda wskaźników.

Ostatecznie powstaną cztery następujące modele inflacji rejestrowanej:

1. Model multiplikatywny, okresowość modelowana analizą Fouriera.
2. Model multiplikatywny, okresowość modelowana metodą wskaźników.
3. Model addytywny ze zmienną amplitudą, okresowość modelowana analizą Fouriera.
4. Model addytywny ze zmienną amplitudą, okresowość modelowana metodą wskaźników.

Pierwszy etap polegał na wyznaczeniu dla obydwu modeli trendu, przy czym w przypadku modelu multiplikatywnego konieczne było uprzednie zlogarytmownie danych, a następnie przekształcenie uzyskanej zależności za pomocą funkcji wykładniczej o podstawie takiej, jaką użyto do logarytmowania. Ponieważ użyto logarytmu naturalnego, konieczne było przekształcenie przez funkcję exponens.

Dla modelu multiplikatywnego najlepiej dopasowany był trend potęgowy, który po przekształceniu przez funkcję exponens określony jest formułą:

$$y = \exp(4{,}6792 \cdot t^{-0{,}003}) \qquad (9)$$

Dla modelu addytywnego również najlepiej dopasowany był trend potęgowy o postaci:

$$y = 107{,}66 \cdot t^{-0{,}0139} \qquad (10)$$

Po wyeliminowaniu trendu w przypadku modelu addytywnego, należy jeszcze wyznaczyć amplitudę wahań. Wymaga to wyznaczenia wartości bezwzględnej, oraz zlogarytmowania uzyskanego przebiegu. Najlepsze dopasowanie cechowało trend liniowy. Ostatecznie po przekształceniu przez funkcje exponens otrzymuje się następującą funkcję modelującą amplitudę:

$$y = \exp(-0{,}0073 \cdot t - 0{,}4384) \qquad (11)$$

Dla szeregów oczyszczonych z trendu i amplitudy (w modelu addytywnym) przeprowadzona analiza Fouriera wskazuje, że największy wpływ mają składowe harmoniczne o częstotliwościach odpowiadających okresom 12, 4, 16 i 3 miesięcznym w modelu multiplikatywnym, oraz 12, 4, 3 i 16 w addytywnym. Należy dodać, że najważniejsze w obydwu modelach były składowe odpowiadające 12 i 4 miesiącom. Ponieważ istotne były również składowe 3 – miesięczne, można podejrzewać, że występuje tu zjawisko tzw. rozmywania widma między sąsiadujące składowe harmoniczne. Wobec tego można powiedzieć, że podstawowe znaczenie ma zmienność w cyklu rocznym i kwartalnym.

Model multiplikatywny Fouriera ma postać:

$$\begin{aligned}\hat{i}(t) = {} & \exp(4{,}679 \cdot t^{-0{,}003}) \cdot (0{,}00190 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot t\right) - 0{,}00593 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot t\right) + \\ & - 0{,}00562 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{4}{12} \cdot t\right) - 0{,}00078 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{4}{12} \cdot t\right) - 0{,}00217 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{16}{12} \cdot t\right) + \\ & - 0{,}00201 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{16}{12} \cdot t\right) + +0{,}00043 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{3}{12} \cdot t\right) + 0{,}00254 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{3}{12} \cdot t\right))\end{aligned} \qquad (12)$$

addytywny ze zmienną amplitudą wahań, zaś jest następujący:

$$\hat{i}(t) = 107{,}66 \cdot t^{-0{,}0139} + \exp(-0{,}0073 \cdot t - 0{,}4384) \cdot (0{,}542 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot t\right) + \\ -1{,}430 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot t\right) - 1{,}473 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{4}{12} \cdot t\right) - 0{,}261 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{4}{12} \cdot t\right) + \\ + 0{,}153 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{3}{12} \cdot t\right) + 0{,}0{,}697 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{3}{12} \cdot t\right) - 0{,}457 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{16}{12} \cdot t\right) + \\ - 0{,}436 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{16}{12} \cdot t\right)) \tag{13}$$

Przeprowadzona analiza Fouriera wykazała, że najważniejsza harmonika obejmuje roczny cykl zmian. Pozwala to założyć w modelu wskaźnikowym liczbę faz równą 12. Wyznaczone poprawki wynikające z fazy cyklu (tzw. czyste wskaźniki sezonowości) zapisane zostały w tabeli 1.

Model multiplikatywny wykorzystujący do modelowania cykliczności metodę wskaźników ma postać:

$$\hat{i}(t, j) = \exp(4{,}679 \cdot t^{-0{,}003}) \cdot c(j) \tag{14}$$

gdzie c(j) dla j=1,2, …12, są czystymi wskaźnikami sezonowości z tabeli 1. Wskaźnikowy model addytywny ze zmienną amplitudą wahań, zaś określa formuła:

$$\hat{i}(t, j) = 107{,}66 \cdot t^{-0{,}0139} + \exp(-0{,}0073 \cdot t - 0{,}4384) \cdot c(j) \tag{15}$$

Tabela 1. Czyste wskaźniki sezonowości dla multiplikatywnego i addytywnego modelu inflacji

Numer fazy cyklu - j	Czyste wskaźniki sezonowości w modelu multiplikatywnym	Czyste wskaźniki sezonowości w modelu addytywnym ze zmienną amplituda wahań
1	1.015	3.672
2	1.001	-0.035
3	0.997	-0.442
4	1.002	0.697
5	0.998	-0.113
6	0.996	-0.882
7	0.989	-3.098
8	0.991	-2.581
9	1.006	1.687
10	1.002	0.837
11	1.000	-0.013
12	1.002	0.272

Źródło: Badania własne.

W celu porównania opracowanych modeli inflacji wyznaczono błędy średniokwadratowe ex post prognoz wygasłych, oddzielnie dla dwóch przedziałów. Pierwszy obejmował okres od marca 1990 r. do lutego 2006 i wykorzystany był do budowy modeli (tzw. okres bazowy), oraz drugi od marca 2006 do marca 2007 użyto jedynie do testowania (tzw. okres testowy). Wyznaczone dla wszystkich modeli błędy średniokwadratowe przedstawiono w tabeli 2.

Wyniki te pozwalają stwierdzić, że modele addytywne ze zmienną amplitudą wahań, cechuje znacznie wyższa jakość niż modeli multiplikatywnych. Błąd w okresie testowym jest nawet dwa razy mniejszy w modelu opartym o analizę Fouriera, oraz o 30% we wskaźnikowym. Również niższa jest wartość błędu w okresie bazowym, choć różnice nie są aż tak duże. Oznacza to, że w przypadku inflacji, amplituda oscylacji nie jest wprost proporcjonalna do tendencji rozwojowej.

Modele oparte o analizę Fouriera ustępują w obydwu przypadkach modelom wskaźnikowym. Pamiętać jednak należy, że do opracowania modeli wskaźnikowych wykorzystano informacje z analizy Fouriera (informacje o długości cyklu). Dla inflacji wprawdzie przyjęcie cyklu 12 miesięcznego zgadza się z praktyką, jednak można sobie wyobrazić takie przebiegi, w których określenie długości cyklu i jego faz może być zadaniem bardzo trudnym. Analiza Fouriera natomiast nie wymaga zakładania wartości okresu oscylacji, ponieważ sama go określa.

Porównując modele wskaźnikowe z analizą Fouriera, dodatkowo pamiętać należy, że model składowych harmonicznych może być poprawiony, poprzez uwzględnienie większej liczby częstotliwości. Wadą takiego rozwiązania jest jednak złożoność formuły obliczeniowej i trudności w interpretacji kolejnych składowych.

Tabela 2. Pierwiastek średniego błędu kwadratowego ex post dla wyznaczonych modeli inflacji.

Model	Błąd RME dla okresu od 1990.03 do 2006.02	Błąd RME dla okresu od 2006.03 do 2007.03
Addytywny Fouriera ze zmienną amplitudą zależną od czasu	1.1429	0.4385
Multiplikatywny Fouriera	1.1952	0.8196
Addytywny wskaźnikowy ze zmienną amplitudą zależną od czasu	0.8782	0.4270
Multiplikatywny wskaźnikowy	0.9612	0.6488

Źródło: Badania własne.

Podsumowanie

Modele inflacji miesięcznej, mierzonej indeksem cen i towarów usług konsumpcyjnych, przedstawione w niniejszym artykule potwierdzają sezonowy charakter jej zmian. Analiza Fouriera wykazała, że najważniejsza jest składowa o okresie równym 12 miesięcy, odpowiadająca zmianom w cyklu rocznym.

Wśród czterech przedstawionych modeli najlepszy okazał się wskaźnikowy model addytywny ze zmienną amplitudą wahań. Model multiplikatywne były zdecydowanie gorsze, co oznacza, że amplituda wahań inflacji nie jest proporcjonalna do trendu.

Modele wskaźnikowe były lepsze od modeli opartych o analizę Fouriera. Podstawową zaletą metody wskaźników jest prostota obliczeń i modelu. Wadą natomiast konieczność zakładania długości cyklu i liczby jego faz. Analiza Fouriera natomiast, pozwala na budowę modeli, których jakość może być poprawiana (poprzez uwzględnianie większej liczby składowych harmonicznych), co wiąże się jednak z istotnym zwiększaniem ich złożoności. Złożona formuła obliczeniowa modelu harmonicznego jest istotną jego wadą. Uwzględnienie dużej liczby składowych harmonicznych powoduje ponadto trudności w ich interpretacji. Na zakończenie warto dodać, że bardzo ważną zaletą analizy Fouriera jest uzyskiwana w jej wyniku informacja o długości cyklu.

Literatura

Osiowski J. Zarys rachunku operatorowego teoria i zastosowania w elektrotechnice. Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa 1981.

Prognozowanie gospodarcze metody i zastosowania. Praca zbiorowa pod redakcją Cieślak M., Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.

Witkowska D. Postawy ekonometrii i teorii prognozowania, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2005.

Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. Prognozowanie ekonomiczne teoria przykłady zadania, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.