

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Piotr Fiszeder*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

*Juliusz Preś*

*Politechnika Szczecińska*

### **Wycena opcji pogodowych dla miasta Berlin kwotowanych na giełdzie Chicago Mercantile Exchange\***

#### **1. Wprowadzenie**

Światowy rynek instrumentów pochodnych konstruowanych na podstawie indeksów pogody rozwija się obecnie bardzo dynamicznie. Tylko w roku rozliczeniowym 2006/2007 wartość wszystkich zawartych kontraktów na tym rynku osiągnęła poziom ponad 19 mld dolarów. W związku z ogromną dynamiką coraz częściej porusza się problem wyceny opcji pogodowych. Z uwagi na unikalne cechy indeksów pogodowych do dziś nie udało się opracować kompletnej i uniwersalnej metody wyceny tych instrumentów. Wielu obserwatorów i uczestników tego rynku zauważyło też, że nie jest możliwa adaptacja popularnej formuły Blacka-Scholesa, gdyż nie są spełnione podstawowe założenia tego podejścia. Wyceny uzyskane tą metodą są obciążone dużym błędem. Z tego względu zaproponowano inne metody wyceny, wśród których najważniejsze to analiza historyczna, statystyczne modelowanie rozkładu indeksu oraz modelowanie szeregów czasowych waloru bazowego. Największy potencjał w stworzeniu jednej precyzyjnej formuły wyceny tych derywatów posiada metoda modelowania szeregów czasowych i to zarówno pod względem dokładności szacunków jak i uwzględnienia specyfiki indeksów pogodowych<sup>1</sup>. Z tego względu poniższy artykuł jest poświęcony ostatniej metodzie wykorzystującej w wycenie instrumentów pochodnych modele procesów stochastycznych. W pracy mo-

---

\* W przypadku Piotra Fiszедера praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2007, projekt badawczy 1-H02B-033-29.

<sup>1</sup> Patrz Brix, Jewson i Ziehmann (2005).

delowany jest nie tylko dzienny szereg czasowy waloru bazowego, ale również miesięczne szeregi czasowe indeksów pogodowych. Głównym celem pracy jest prezentacja metody wyceny instrumentów pogodowych z zastosowaniem modelu ARFIMA–FIGARCH<sup>2</sup>. Pokazano, iż badany model nie uwzględnia sezonowo zmiennej autokorelacji, co skutkuje istotnymi odchyleniami w szacunkach wartości kontraktów.

Układ artykułu jest następujący. Część druga zawiera omówienie stosowanych w pracy modeli procesów stochastycznych. W pracy zaproponowano nowe postacie modeli, będące rozszerzeniem modeli ARFIMA i FIGARCH tak, aby mogły dodatkowo opisać wahania sezonowe średniej i wariancji procesu. W kolejnej części omówiono własności badanych szeregów oraz zaprezentowano wyniki weryfikacji statystycznej wybranych modeli. W ostatniej części artykułu zostały zaprezentowane wyniki aplikacji opisanych modeli szeregów czasowych do wyceny przykładowych kontraktów opcyjnych notowanych na giełdzie w Chicago (CME).

## 2. Modele procesów stochastycznych

W procesie temperatury powietrza możemy zazwyczaj wyróżnić stosunkowo regularne wahania sezonowe o okresie rocznym, trend związany z efektem cieplarnianym i urbanizacją, długą pamięć (typową dla procesów klimatyczno-przyrodniczych, patrz Hurst, 1951, Kwiatkowski i Osiewalski, 2002) oraz wahania przypadkowe. Charakterystyczne dla tego procesu są również wahania sezonowe zmienności. Zmienność temperatury jest większa w miesiącach zimowych, mniejsza w miesiącach letnich. Modelowanie temperatury powinno uwzględniać powyższe cechy.

W pracy zaproponowano modele, które można zastosować do opisu i prognozowania temperatury. Są one rozszerzeniem modeli ARFIMA i FIGARCH, tak aby mogły dodatkowo opisać wahania sezonowe średniej i wariancji procesu. Model ARFIMA stanowiący uogólnienie modelu ARIMA w skuteczny sposób łączy możliwość opisu zjawisk zarówno z długą i krótką pamięcią. Model FIGARCH będący uogólnieniem modelu GARCH modeluje zarówno długookresowe jak i krótkookresowe zależności w procesie zmienności. Rozszerzony model ARFIMA  $(P, d_1, Q)$  - FIGARCH  $(p, d_2, q)$  można przedstawić w następującej formie:

$$\varphi(L)(1-L)^{d_1}(y_t - \mu_t) = \vartheta(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim D(0, h_t) \quad (1)$$

$$\mu_t = \sum_{j=0}^r \gamma_j t^j + \sum_{i=1}^{m/2} (\theta_i \cos \omega_i t + \lambda_i \sin \omega_i t), \quad (2)$$

<sup>2</sup> Model ten jest stosowany przez praktyków rynku finansowego, występuje na przykład w powszechnej na rynku aplikacji SWS 6.0 firmy *Speedwell Weather Derivatives Ltd.*

$$\phi(L)(1-L)^{d_2} \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m/2} (\kappa_i \cos \omega_i t + \tau_i \sin \omega_i t) + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (3)$$

gdzie  $L$  oznacza operator przesunięcia ( $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}$ ),  $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j$ ,

$\vartheta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j L^j$ ,  $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \phi_j L^j$ ,  $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$ ,  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ , wszystkie pierwiastki wielomianów  $\phi(L) = 0$  i  $\phi(L) = 0$  leżą poza kołem jednostkowym,  $-1 < d_1 < 0.5$ ,  $0 < d_2 < 1$ ,  $\omega_i = \frac{2\pi i}{m}$ ,  $m = 365$ .

Aby zapewnić dodatniość wariancji  $h_t$ , bez nakładania restrykcji na parametry w równaniu dla wariancji, można przyjąć logarytmiczną postać wariancji, czyli  $v_t = \varepsilon_t^2 - \ln h_t$ . Składnik sezonowy w równaniu (2) można zapisać w postaci, która nie uwzględnia struktury harmoniczej:

$$\mu_t = \sum_{j=0}^r \gamma_j t^j + \sum_{k=1}^{12} c_k m_{kt}, \quad (4)$$

gdzie  $m_{kt}$  to zmienne zerojedynkowe oznaczające kolejne miesiące (np.  $m_{1t} = 1$  dla stycznia oraz  $m_{1t} = 0$  dla pozostałych miesięcy). Podobnie zamiast równania (3) można przyjąć model, który nie uwzględnia struktury harmoniczej zmienności:

$$\phi(L)(1-L)^{d_2} \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{12} \delta_k m_{kt} + [1 - \beta(L)]v_t. \quad (5)$$

### 3. Modelowanie szeregów temperatury powietrza i indeksów na niej opartych

Dane empiryczne wykorzystane w badaniu uzyskano od agencji meteorologicznej Niemiec. Dane dotyczą średniej temperatury powietrza w mieście Berlin w okresie od 1 stycznia 1948 do 31 grudnia 2004 (20808 obserwacji). Rozkłady dziennych wartości temperatury w poszczególnych miesiącach (porach) roku różnią się od siebie. Przeprowadzone badanie wykazało, że asymetria jest różna w poszczególnych porach roku (w okresie zimowym lewostronna a w okresie letnim prawostronna). Hipoteza o normalności rozkładów została odrzucona zarówno dla poszczególnych miesięcy, jak i całego roku. Wyniki przeprowadzonych testów statystycznych<sup>3</sup> wskazują na występowanie następujących własności przeciętnej dziennej temperatury powietrza: liniowy trend wzrostowy, sezo-

<sup>3</sup> Wyniki testów oraz szacunki modeli zostały pominięte z uwagi na ograniczony rozmiar publikacji.

nowość zarówno w średniej jak i w wariancji, autokorelacja (silniejsza w miesiącach zimowych), długa pamięć w średniej oraz efekt ARCH.

Poza temperaturą badano również miesięczne indeksy pogodowe HDD i CAT obliczane według poniższych formuł:

$$\text{HDD} = \sum_{t=1}^m \max(0, 18^{\circ}\text{C} - y_t), \quad (6)$$

$$\text{CAT} = \sum_{t=1}^m y_t, \quad (7)$$

gdzie  $y_t$  - przeciętna temperatura dnia,  $m$  - liczba dni w danym okresie.

Hipoteza o normalności rozkładu została odrzucona tylko dla indeksu HDD dla miesięcy marzec oraz grudzień. W dotychczasowych badaniach dotyczących pogodowych instrumentów pochodnych modeluje się jedynie rozkład indeksów pogodowych. W niniejszym artykule traktujemy szeregi czasowe indeksów jako realizacje procesów stochastycznych i badamy również ich własności. Przeprowadzone testy wskazują na występowanie następujących właściwości miesięcznych indeksów HDD oraz CAT: trend liniowy, sezonowość w średniej i w wariancji, długa pamięć (słabsza niż w przypadku temperatury powietrza).

Dla średniej dziennej temperatury wybrano model opisany równaniami (1-3). Długa pamięć temperatury została opisana za pomocą modelu ARFIMA ( $d_1=0.1269$  (0.0283)). Krótkookresowe zależności między bliskimi obserwacjami temperatury zostały najlepiej opisane przez część autoregresyjną i średnią ruchomą o opóźnieniach równych dwa ( $P=2$  i  $Q=2$ ). W równaniu dla wariancji warunkowej nieistotny okazał się parametr  $d_2$ , zatem proces zmienności temperatury nie posiada długiej pamięci. Model GARCH(1,1) z wahaniami periodycznymi o okresie 1 roku oraz warunkowym rozkładem normalnym okazał się wystarczający do opisu zmienności temperatury.

Dla miesięcznych wartości indeksów HDD oraz CAT rozważano dwa modele różniące się tylko opisem wahań sezonowych. Jeżeli uwzględniono strukturę harmoniczną sezonowości i trend liniowy, to część stacjonarną indeksu HDD najlepiej opisywał model AR(1). Jeżeli zastosowano model ze zmiennymi zerojedynkowymi i trendem liniowym (równanie (4)), to część stacjonarną najlepiej opisywał model ARFIMA(0,1,0). Dla indeksu CAT niezależnie od rodzaju modelu sezonowości występował trend liniowy oraz długa pamięć. W obu przypadkach najlepszy okazał się proces ARFIMA(0,1,0). We wszystkich modelach dotyczących indeksów występowała zmienna wariancja bezwarunkowa składnika losowego i brak było efektu ARCH.

Wyboru różnych specyfikacji modelu (wartości  $P$ ,  $Q$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , liczby składników wielomianów trygonometrycznych) dokonywano zawsze na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarzera, uwzględniając wyniki badania istotności odpowiednich parametrów oraz wyniki odpowiednich testów diagnostycznych. Weryfikacji wybranych modeli dokonano na podstawie symulacji Monte Carlo

ze względu na wartość średnią oraz wariancję generowanego procesu<sup>4</sup>. Wyniki przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Wyniki weryfikacji dla wartości średniej i wariancji na podstawie symulacji

Parametry	Rodzaj modelu					
	Model 1 (dzienny)		Model 2 (miesięczny)		Model 3 (miesięczny)	
	Styczeń HDD	Czerwiec CAT	Styczeń HDD	Czerwiec CAT	Styczeń HDD	Czerwiec CAT
Średnia	546.01	515.33	529.87	548.16	546.29	526.73
Wariancja	6746.95	4640.91	7243.87	1655.75	7483.06	1688.18
$\Delta$ dla średniej	2.14	11.00	14.00	21.82*	2.42	0.39
$\Delta$ dla wariancji	818.45	3045.30*	321.53	60.14	82.34	92.57

Model 2 uwzględnia strukturę harmoniczną sezonowości, model 3 jest ze zmiennymi zerojedynkowymi. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa o równości wartości oczekiwanej (wariancji) indeksu przy założeniu prawdziwości badanego modelu z wartością oczekiwaną (wariancją) dla populacji została odrzucona na poziomie istotności 0.05. Statystyki  $\Delta$  dla średniej (wariancji) były obliczane jako wartości bezwzględne z różnic między średnimi arytmetycznymi (wariancjami) oszacowanymi na podstawie symulacji i próby.

Źródło: obliczenia własne.

Średnie i wariancje dla indeksu HDD dla stycznia wynosiły odpowiednio 555.39 i 7727.93 natomiast dla indeksu CAT dla czerwca 515.29 oraz 1536.38. Porównania modeli dokonano również na podstawie innych kryteriów, mianowicie wartości teoretycznych średniej i wariancji indeksu, skorygowanego współczynnika determinacji oraz błędu RMSE (tabela 2).

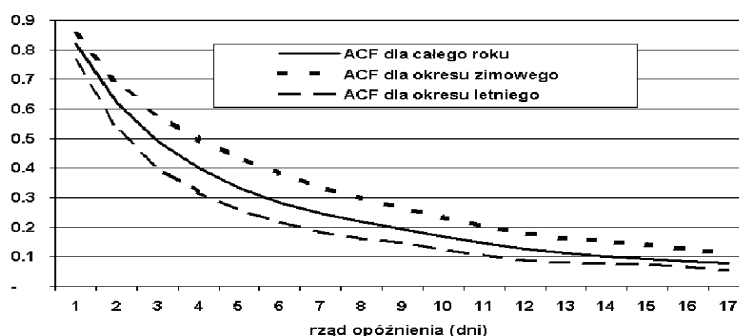
Tabela 2. Ocena jakości modeli

Model	Styczeń - HDD		Czerwiec - CAT	
	RMSE	Skoryg. R <sup>2</sup>	RMSE	Skoryg. R <sup>2</sup>
Model 1(dzienny)	11.07	0.997	11.48	0.997
Model 2 (miesięczny harmoniczny)	55.04	0.922	57.85	0.929
Model 3 (miesięczny zerojedynkowy)	52.46	0.928	63.42	0.914

Źródło: obliczenia własne.

Uzyskane wyniki wskazują, że pomimo przeszacowania wariancji w miesiącach letnich model konstruowany na podstawie dziennych obserwacji temperatury najlepiej odzwierciedla kształtowanie się indeksu HDD oraz CAT. Efekt przeszacowania wariancji wynika z nieuwzględnienia w modelu sezonowo zmiennej autokorelacji badanego procesu (wykres 1).

<sup>4</sup> Na podstawie badanego procesu generowano 100 000 szeregów czasowych temperatury o długości 30 lub 31 obserwacji a następnie obliczano indeksy. W przypadku modeli indeksów generowane są bezpośrednio realizacje indeksów. Procedura weryfikacji została opisana szczegółowo w Caballero, Jewson i Brix, (2002).



Wykres 1. Funkcja autokorelacji dla przeciętnej dziennej temperatury powietrza dla różnych okresów roku.

Źródło: opracowanie własne.

#### 4. Wycena opcji pogodowych

Zaprezentowane powyżej modele zastosowano w procesie wyceny dwóch odrębnych miesięcznych kontraktów opcyjnych *call* z limitem wypłaty<sup>5</sup>, rozliczanych na podstawie indeksów HDD dla stycznia 2004 oraz CAT dla czerwca 2004. Parametry tych kontraktów przedstawia poniższa tabela.

Tabela 3. Specyfikacja wycenianych kontraktów opcyjnych

Nazwa parametru	Kontrakt nr 1	Kontrakt nr 2
Typ opcji	call	call
Indeks	HDD Berlin	CAT Berlin
Okres wykonania kontraktu	styczeń 2004	czerwiec 2004
Cena wykonania	600 HDD	550 HDD
Wartość 1 punktu	10 000 GBP	10 000 GBP
Limit wypłaty z opcji (cap)	500 000 GBP	500 000 GBP

Źródło: obliczenia własne.

W celach porównawczych kontrakty, zostały wycenione przy zastosowaniu trzech metod: analizy historycznej (HBA), statystycznego modelowania rozkładu indeksu (IM) oraz modelowania szeregu czasowego temperatury (DM) i miesięcznych indeksów (MM). W ostatniej metodzie wykorzystano omówione wcześniej modele. Wartości wyceny przedstawiono w tabeli 4.

W przypadku kontraktów styczniowych wyraźnie niższą wartość otrzymano stosując model z sezonowością w postaci funkcji harmonicznych (MM – model 2), dla którego średnia z symulacji okazała się niższa od pozostałych o 14 pkt HDD. Na podstawie pozostałych metod otrzymano zbliżone szacunki kontraktu styczniowego.

<sup>5</sup> Kontrakty opcyjne z limitem uzyskuje się poprzez kupno opcji call oraz sprzedaż opcji call na ten sam okres wykonania, ale z różnymi cenami wykonania.

Tabela 4. Wyceny kontraktów opcyjnych przy zastosowaniu różnych metod

Metoda wyceny	Wartość kontraktu nr 1	Wartość kontraktu nr 2	Wartość wzgl. kontraktu nr 1 [% limitu]	Wartość wzgl. kontraktu nr 2 [% limitu]
HBA	86 550	45 150	17.31	9.03
IM	99 550	39 450	19.91	7.89
DM – model 1	84 900	96 650	16.98	19.33
MM – model 2	67 250	133 600	13.45	26.72
MM – model 3	92 900	67 150	18.58	13.43

Źródło: obliczenia własne.

Rozbieżne wyniki uzyskano natomiast wyceniając czerwcowy kontrakt CAT. Stosując pierwsze dwie metody otrzymano wartości poniżej 10% ustalonego limitu wypłaty. Metody bazujące na modelowaniu szeregów czasowych wyceniły ten kontrakt w przedziale 13-27%. Wycena uzyskana na podstawie dziennego modelu (DM) jest silnie zawyżona z powodu wyraźnie przeszacowanej wariacji w okresie czerwca (tabela 1). Drugi model wyraźnie przeszacował wartość średnią indeksu, co istotnie zawyżyło wartość wyceny (26.72%). Najbardziej wiarygodna wydaje się wycena uzyskana ostatnim modelem (13.43%). W tym przypadku jednakże błąd wyceny wynikający z gorszego dopasowania modelu, będzie znacznie większy. Ponadto model dla danych miesięcznych nie uwzględnia zmiennej liczby dni w miesiącu oraz nie nadaje się bezpośrednio do szacowania wartości kontraktu o dowolnym okresie trwania.

Modelowanie dziennych obserwacji instrumentu bazowego pozwala na pełniejsze wykorzystanie danych statystycznych. Przykładowo chcąc określić wartość miesięcznego kontraktu metodą historyczną lub metodą analizy rozkładu szacunki opierają się na danych z okresu wykonania kontraktu. Zatem posiadając dane historyczne za 10 lat, wartość kontraktu będzie ustalona na podstawie tylko 10 wartości historycznych. Wycena na podstawie modelu dla instrumentu bazowego potencjalnie zwiększa precyzję szacunków, ponieważ model taki jest konstruowany na podstawie większej liczby obserwacji. Potencjalnie, gdyż dokładniejsze szacunki uzyskamy tylko przy założeniu, że zastosowany do wyceny model jest poprawnie zbudowany i w pełni odzwierciedla charakter badanego procesu. Zatem w obliczeniach należy uwzględnić dodatkowo ryzyko modelu<sup>6</sup>.

## 5. Wnioski

Modele konstruowane na podstawie miesięcznych obserwacji indeksów nie wyjaśniają zmienności indeksów w sposób zadawalający (patrz tabela 2). Na podstawie rozważanych kryteriów oceny można stwierdzić, że modelem, który najlepiej odzwierciedla kształtowanie się indeksów HDD i CAT jest model skonstruowany na podstawie dziennych obserwacji temperatury. Model ten opi-

<sup>6</sup> Patrz Jajuga (2001).

suje wszystkie ważniejsze właściwości. Pomimo zastosowania tak zaawansowanego modelu, nie oddaje on w pełni charakteru rzeczywistego procesu temperatury, mianowicie nie uwzględnia sezonowo zmiennej autokorelacji, przez co szacunki wariancji wyznaczone na podstawie tego modelu są w pewnych okresach roku zawyżone.

Caballero i Jewson (2003) proponują jako alternatywę stosowanie modelu SAROMA. Jest to model uwzględniający sezonowo zmieniającą się funkcję autokorelacji. Niestety, model ten posiada dużo parametrów, co utrudnia proces estymacji. Ponadto model SAROMA wymaga dużej liczby obserwacji, aby uniknąć zarzutu pozornego wyjaśnienia danych. Dodatkowo, model ten nie uwzględnia długiej pamięci. Innym rozwiązaniem może być uwzględnienie w modelu ARFIMA-FIGARCH zmieniającego się w czasie parametru „długiej pamięci” w średniej, a może i w wariancji. Niestety specyfikacja takiego modelu będzie jeszcze bardziej złożona niż przedstawiona w niniejszej pracy.

## Literatura

- Brix, A., Jewson, S., Ziehmman, Ch. (2005), *Weather Derivative Valuation*, Cambridge University Press.
- Caballero, R., Jewson, S., Brix, A. (2002), Long Memory in Surface Air Temperature: Detection, Modelling and Application to Weather Derivative Valuation, *Climate Research*, 21, 127–140.
- Caballero, R., Jewson, S. (2003), Seasonality in the Statistics of Surface Air Temperature and the Pricing of Weather Derivatives, *Meteorological Applications*, vol. 10, 4, 367–376.
- Hurst, H.E. (1951), Long Term Storage Capacity of Reservoirs, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, 116, s. 770–799.
- Jajuga, K. (2001), Podstawy analizy wartości ekstremalnych na rynkach finansowych, *Rynek Terminowy*, 14, 51–52.
- Kwiatkowski, J., Osiewalski, J. (2002), Modele ARFIMA: podstawowe własności i analiza bayesowska, *Przegląd Statystyczny*, 50, 2, 105–122.