

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Piotr Fiszeder

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Jak zwiększyć trafność prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modeli GARCH?*

1. Wprowadzenie

Literatura dotycząca prognozowania zmienności instrumentów finansowych jest niezwykle bogata (patrz Poon i Granger, 2003), jednakże jak dotąd nie ma jednoznacznych wskazówek dotyczących wyboru najlepszej metody prognozowania zmienności. Wyniki badań empirycznych są niejednoznaczne, a często nawet sprzeczne. W ostatnich dwudziestu latach powstało wiele uogólnień i rozszerzeń modelu GARCH, niemniej jednak jak dotąd nie ma konsensusu co do jakości konstruowanych na ich podstawie prognoz zmienności. Wyniki dotychczasowych badań nie wskazują jednoznacznie określonej klasy modeli, na podstawie których uzyskiwałoby się najlepsze prognozy zmienności dla procesów finansowych. Analizy dotyczące polskiego rynku finansowego z zastosowaniem modelu GARCH zostały przeprowadzone między innymi przez Piontka (2003), Doman i Doman (2004), Fiszедера (2004a, b, 2005) oraz Pipienia (2006). Tylko w pracach Doman i Doman oraz Fiszедера do oceny jakości prognoz wykorzystano dane o wysokiej częstotliwości. Niniejsze badanie obejmuje jednakże znacznie szerszą klasę modeli GARCH, szczególnie modeli rozszerzonych o dodatkowe informacje oraz dotyczy znacznie szerszego okresu badania, co może mieć znaczący wpływ na uzyskane wyniki. Głównym celem artykułu jest ocena trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie różnych postaci modeli GARCH. Wykorzystanie dodatkowych informacji przy konstrukcji modelu GARCH lub estymacji jego parametrów nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności.

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2007, projekt badawczy nr 1-H02B-033-29.

Układ artykułu jest następujący. Część druga zawiera krótki opis stosowanych w badaniu metod prognozowania zmienności oraz metod oceny trafności prognoz. W części trzeciej zbadano trafność prognoz zmienności dla indeksu WIG20. Artykuł kończy podsumowanie.

2. Metody prognozowania zmienności oraz metody oceny trafności prognoz

Analizowane metody prognozowania zmienności można podzielić na trzy grupy. Pierwsza grupa obejmuje modele GARCH, których parametry były estymowane na podstawie dziennych stóp zwrotu z wykorzystaniem wyłącznie cen zamknięcia: GARCH, IGARCH, GARCH-M, model GARCH z progowym efektem GARCH-M (GARCH-MT), GJR, TGARCH i FIGARCH, model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta (oznaczony jako GARCH-t). Zastosowano również model EGARCH, jednakże z uwagi na problemy z estymacją parametrów dla niektórych okresów (płaska funkcja wiarygodności) pominięto prezentację wyników tego modelu¹. Druga grupa obejmuje inne metody, które zastosowano również dla danych dziennych²: model błędzenia przypadkowego dla wariancji (RW), model zmienności historycznej (HA), model wariancji ruchomej (MA), model wyrównywania wykładniczego dla wariancji (ES) oraz model stochastycznej zmienności (SV). Trzecia grupa obejmuje metody, w których wykorzystuje się dodatkowe informacje: model GARCH szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany (GARCH dla TR), model GARCH rozszerzony o dodatkowe zmienne objaśniające z okresu $t-1$ – prawdziwy zakres zmiany (GARCH z TR), różnicę między logarytmami z maksymalnej i minimalnej ceny w ciągu dnia (GARCH z HL), sumę kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości 5 minut (GARCH z 5MR) oraz kwadrat stopy zwrotu indeksu S&P 500 (GARCH z S&P). Badano również modele GARCH opisujące wahania sezonowe (GARCH z sez.), efekt tygodnia (GARCH z tyg.) oraz efekt związany z okresami świątecznymi (GARCH ze św.) - modele rozszerzone o odpowiednie zmienne zerojedynkowe, model GARCH z indeksem S&P 500 w średniej (S&P w średniej) oraz model błędzenia przypadkowego dla zmienności zrealizowanej obliczanej jako suma kwadratów 5-minutowych stóp zwrotu (RW intra).

Z uwagi na ograniczony rozmiar publikacji pominięto prezentację podstawowych specyfikacji modeli. Można je znaleźć na przykład w pracach Fiszedera (2004a, b). Poniżej omówiono tylko rzadziej stosowane parametryzacje modeli. Model GARCH z progowym efektem GARCH-M (zapropozowany w pracy Fiszedera, 2005) można przedstawić w formie:

¹ Dla skróconego okresu prognozy konstruowane na podstawie tego modelu były znacząco mniej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH (były częściej przeszacowane).

² W nawiasach podano przyjęte oznaczenia w tabelach.

$$y_t = c + \delta^+ I_t h_t + \delta^- (1 - I_t) h_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim D(0, h_t), \quad (1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (2)$$

gdzie $I_t = 1$, gdy $x_{t-1} \geq 0$ i $I_t = 0$, gdy $x_{t-1} < 0$.

Jako x_t przyjęto stopy zwrotu indeksu S&P 500.

Wyboru stałej wygładzania w modelu wariancji ruchomej oraz parametru wygasania w modelu wyrównywania wykładniczego dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano te wartości, dla których pierwiastek błędu średniokwadratowego był najmniejszy w próbce wstępnej. Dodatkowo przyjęto stałą wygładzania równą 25 oraz parametr wygasania równy 0,94 (wartość stosowana w procedurze RiskMetrics).

Fiszeder (2005) zaproponował, aby estymację modelu GARCH przeprowadzić na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany. Prawdziwy zakres zmiany dla okresu t jest obliczany jako:

$$TR_t = \max\{(H_t - L_t), |C_{t-1} - H_t|, |C_{t-1} - L_t|\}, \quad (3)$$

gdzie H_t i L_t oznaczają odpowiednio cenę maksymalną i minimalną w okresie t , C_{t-1} to cena zamknięcia w okresie $t-1$.

Prawdziwy zakres zmiany daje zawyżone szacunki zmienności. Skalowanie można przeprowadzić na dwa sposoby, korzystając z kwadratów stóp zwrotu lub wartości bezwzględnych stóp zwrotu. Przeskalowania TR dokonuje się na podstawie formuły:

$$STR_t = \frac{a}{b} TR_t, \quad (4)$$

gdzie $a = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i^2}$, $b = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t TR_i^2}$ lub $a = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |r_i|$, $b = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |TR_i|$ w zależności od przyjętej metody skalowania³.

Skalowanie dla wartości bezwzględnych stóp zwrotu prowadzi na ogół do zaniżonych szacunków prognoz, dlatego sugerujemy stosowanie skalowania dla kwadratów stóp zwrotu.

Ocenę trafności prognoz dokonano na podstawie następujących miar: względnego błędu średniego (RME), średniego absolutnego błędu (MAE), pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE), logarymicznej funkcji straty (LL), średniego absolutnego błędu prognozy skorygowanego o heteroskedastyczność (HMAE), pierwiastka błędu średniokwadratowego skorygowanego o heteroskedastyczność (HRMSE), współczynnika determinacji R^2 dla funkcji

³ We wszystkich formułach zakłada się, że średnia stopa zwrotu nie różni się istotnie od zera.

regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, funkcji straty LINEX. Podano również procent prognoz przeszacowanych, oceny parametrów w równaniu regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, ocenę współczynnika korelacji liniowej Pearsona prognoz wariancji warunkowych skonstruowanych na podstawie modelu GARCH i prognoz skonstruowanych na podstawie innych modeli. Ponadto testowano istotność różnic dla błędu średniokwadratowego (patrz West i Cho, 1995).

3. Prognozowanie zmienności indeksu WIG20

Ocena trafności wybranych metod prognozowania zmienności została przeprowadzona dla indeksu WIG20. Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 2 stycznia 2001 r. do 29 grudnia 2006 r. (1504 obserwacje). Prognozy wariancji konstruowano na jedną sesję do przodu dla okresu od 2 stycznia 2004 r. do 29 grudnia 2006r. (757 sesji). Parametry wszystkich analizowanych modeli estymowano 757 razy dodając za każdym razem kolejną obserwację. Zatem ocena trafności prognoz zmienności została dokonana dla stosunkowo długiego okresu (757 obserwacji dziennych, około 57 tys. obserwacji 5-minutowych). Badano procentowe logarytmiczne stopy zwrotu. Dla całego badanego okresu występowała słaba autokorelacja pierwszego rzędu o niestabilnej strukturze w czasie, nieistotna statystycznie przy oddzielnym badaniu dla okresu estymacji i prognozowania. Jako realizacje wariancji do oceny trafności prognoz przyjęto sumy kwadratów 5-minutowych stóp zwrotu.

Estymacji parametrów modeli GARCH dokonano metodą quasi największej wiarygodności. Wyjątkiem jest model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, w przypadku którego zastosowano metodę największej wiarygodności. Na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarz (SC) jako wystarczający do opisu zmienności warunkowej wariancji przyjęto model GARCH(1,1). Parametry modelu stochastycznej zmienności estymowano za pomocą metody quasi największej wiarygodności, w której do budowy funkcji wiarygodności wykorzystuje się filtr Kalmana.

W tabeli 1 podano procent prognoz przeszacowanych oraz szacunki dla: RME, MAE, RMSE oraz logarytmicznej funkcji straty. Wyniki dla HMAE i HRMSE pominięto, ponieważ rankingi były zbliżone do wyników odpowiednio dla MAE i RMSE. Dla większości metod prognozy zmienności są częściej przeszacowane, jednakże sumarycznie niedoszacowane. W tabeli 2 przedstawiono oceny parametrów funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, szacunki współczynnika determinacji dla tej funkcji oraz szacunki funkcji straty LINEX.

Miejsce w rankingu badanych modeli zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium. Nie ma modelu, na podstawie którego można by konstruować najdokładniejsze prognozy według wszystkich rozważanych miar trafności. Pomijając funkcję straty LINEX dla $a = -1$, która przywiązuje większą wagę do błędów przeszacowania zmienności niż błędów niedoszacowania najlepiej w

rankingach wypada model GARCH szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany.

Tabela 1. Ocena dokładności prognoz: procent prognoz przeszacowanych, RME, MAE, RMSE i logarytmiczna funkcja straty

Model	% przeszac.	RME w %	MAE		RMSE		LL	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	62.75	3.90	0.835	11	1.850	12	0.310	9
GARCH-t	62.75	3.31	0.837	13	1.844	10	0.310	9
IGARCH	62.22	2.59	0.849	16	1.844	10	0.314	15
GARCH-M	61.96	4.14	0.835	11	1.855	15	0.310	9
GARCH-MT	62.09	5.54	0.828	7	1.869	19	0.308	7
GJR	62.75	3.53	0.837	13	1.851	13	0.312	13
TGARCH	65.26	2.69	0.855	19	1.882	20	0.323	17
FIGARCH	57.07	8.93	0.828	7	1.867	18	0.306	5
RW	30.78	9.04	1.794	25	3.148	25	7.673	25
HA	78.34	-23.34	1.282	24	2.184	23	0.674	24
MA	52.84	8.58	0.806	1	1.745	2	0.302	3
MA k = 25	51.39	9.49	0.848	15	1.810	4	0.325	18
ES	58.26	6.00	0.831	10	1.816	7	0.312	13
RiskMetrics	53.37	8.93	0.811	2	1.811	5	0.295	2
SV	48.61	19.69	0.825	6	1.933	22	0.331	21
GARCH dla TR	66.05	-2.35	0.813	3	1.721	1	0.284	1
GARCH z TR	66.05	-1.73	0.859	20	1.802	3	0.311	12
GARCH z HL	65.65	-1.28	0.854	18	1.812	6	0.309	8
GARCH z 5MR	65.26	-2.29	0.879	22	1.827	8	0.330	20
GARCH z S&P	60.11	6.79	0.821	4	1.851	13	0.303	4
GARCH z sez.	61.43	5.15	0.863	21	1.883	21	0.328	19
GARCH z tyg.	59.45	6.02	0.853	17	1.865	16	0.337	22
GARCH ze św.	61.56	4.66	0.830	9	1.838	9	0.317	16
S&P w średniej	61.03	7.15	0.821	4	1.865	16	0.307	6
RW intra	49.27	0.07	1.054	23	2.320	24	0.433	23

Przyjęte oznaczenia wyjaśniono w części 2 artykułu.

Źródło: obliczenia własne.

Drugą najlepszą metodą wydaje się być wykorzystanie wariacji ruchomej, gdzie stała wygładzania jest wybierana dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Metoda ta jednak nie wypada dobrze w przypadku analizy pojedynczych spółek. Najmniej dokładne prognozy według większości miar oceny trafności są konstruowane na podstawie modeli błędzenia przypadkowego i zmienności historycznej. Model zmienności historycznej znacząco przeszacowuje zmienność. Zatem prognozy konstruowane na podstawie najprostszych metod są najmniej trafne.

Wykorzystanie dodatkowych informacji w modelu GARCH daje mieszane rezultaty. Badanie pokazało, że wyniki zależą nie tylko od rodzaju informacji, ale również od sposobu wykorzystania tych informacji (por. w tabelach np. GARCH dla TR i GARCH z TR czy GARCH z S&P i S&P w średniej).

Tabela 2. Ocena dokładności prognoz: współczynnik determinacji R^2 , funkcja straty LINEX

Model	γ_0	γ_1	R^2		LINEX a = -1		LINEX a = 1 ($\times 10^9$)	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	-0.371	1.253	0.248	12	0.598	6	2.453	14
GARCH-t	-0.330	1.223	0.250	10	0.615	9	2.243	12
IGARCH	-0.125	1.097	0.244	14	0.695	17	1.846	10
GARCH-M	-0.328	1.232	0.242	15	0.599	7	2.727	17
GARCH-MT	-0.368	1.274	0.233	17	0.566	4	3.509	22
GJR	-0.397	1.264	0.246	13	0.599	7	2.497	15
TGARCH	-0.387	1.247	0.218	20	0.620	11	3.118	19
FIGARCH	-0.036	1.120	0.230	19	0.638	15	3.148	20
RW	1.462*	0.212*	0.094	24	7.3e+6	24	15.379	24
HA	4.567*	-1.234*	0.011	25	1.257	23	17.516	25
MA	-0.107	1.159	0.332	2	0.615	9	0.459	1
MA k = 25	0.094	1.048	0.275	4	0.751	18	0.707	4
ES	-0.063	1.101	0.269	6	0.663	16	1.337	8
RiskMetrics	-0.042	1.124	0.277	3	0.625	12	1.525	9
SV	-0.163	1.357	0.208	22	0.506	1	4.576	23
GARCH dla TR	-0.319	1.149	0.345	1	1.180	22	0.659	2
GARCH z TR	-0.087	1.030	0.275	4	1.082	21	0.867	5
GARCH z HL	-0.083	1.032	0.268	7	0.931	20	1.078	6
GARCH z 5MR	-0.109	1.036	0.256	9	0.915	19	1.203	7
GARCH z S&P	-0.331	1.269	0.249	11	0.565	3	2.631	16
GARCH z sez.	-0.218	1.181	0.215	21	0.626	13	3.027	18
GARCH z tyg.	-0.185	1.173	0.232	18	0.628	14	2.044	11
GARCH ze św.	-0.369	1.263	0.259	8	0.575	5	2.407	13
S&P w średniej	-0.336	1.277	0.238	16	0.558	2	3.160	21
RW intra	1.088*	0.399*	0.160	23	1.5e+9	25	0.668	3

Parametry γ_0 i γ_1 oraz R^2 dotyczą równania regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji. Gwiazdką oznaczono oceny parametrów γ_0 i γ_1 istotnie różniące się od odpowiednio zera i jedności na poziomie 0.05. Średnie błędy szacunku szacowane były na podstawie formuły Newey i West. Przyjęte oznaczenia wyjaśniono w części 2 artykułu.

Źródło: obliczenia własne.

Prognozy zmienności skonstruowane na podstawie większości metod są bardzo silnie skorelowane z prognozami konstruowanymi na podstawie modelu GARCH (patrz tabela 3). Podobnie różnice w szacunkach wielu miar oceny trafności prognoz między różnymi metodami są często niewielkie. Na przykład tylko w przypadku trzech metod: błędzenia przypadkowego, wariancji historycznej i modelu GARCH opisującego efekt tygodnia błędy średniokwadratowe różniły się istotnie od błędu dla modelu GARCH (patrz tabela 3). Z drugiej strony niektóre różnice są znaczące z ekonomicznego punktu widzenia. Gdyby dodatkowy błąd w szacunku zmienności potraktować jako dodatkowe ryzyko, to na przykład różnica między szacunkami RMSE między modelem GARCH szacowanym w tradycyjny sposób, a modelem szacowanym na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany (0.129) dodaje około 5.8% dodatkowego ryzyka (mierzonego odchyleniem standardowym) w skali roku w przypadku tradycyjnej metody estymacji.

Tabela 3. Współczynnik korelacji prognoz, test istotności różnic dla błędu średniokwadratowego oraz bayesowskie kryterium Schwarza

Model	ρ	χ^2	SC	SC ranking
GARCH	1	-	5306	10
GARCH-t	0.999	0.945	5291	3
IGARCH	0.998	0.121	5302	9
GARCH-M	0.999	0.984	5309	11
GARCH-MT	0.997	1.083	5299	5
GJR	0.998	1.389	5313	14
TGARCH	0.986	2.522	5319	16
FIGARCH	0.968	2.407	5300	6
RW	0.364	21.394*	-	-
HA	-0.055	6.626*	-	-
MA	0.932	1.640	-	-
MA k = 25	0.958	0.523	-	-
ES	0.981	0.719	-	-
RiskMetrics	0.984	1.520	5298	4
SV	0.933	2.458	5267	2
GARCH dla TR	0.890	2.183	-	-
GARCH z TR	0.967	0.771	5302	8
GARCH z HL	0.972	0.777	5301	7
GARCH z 5MR	0.988	0.321	5310	12
GARCH z S&P	0.999	0.150	5312	13
GARCH z sez.	0.955	3.577	5374	18
GARCH z tyg.	0.967	7.858*	5327	17
GARCH ze św.	0.987	2.907	5316	15
S&P w średniej	0.998	1.280	5260	1
RW intra	0.526	2.510	-	-

Kolumna ρ przedstawia oceny współczynników korelacji prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modeli GARCH i innych analizowanych metod prognozowania. Kolumna χ^2 zawiera wyniki dotyczące weryfikacji hipotezy o równości błędów MSE dla modelu GARCH i osobno pozostałych metod prognozowania. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0.05. Przyjęte oznaczenia wyjaśniono w części 2 artykułu.

Źródło: obliczenia własne.

W większości prac dotyczących prognozowania zmienności bardzo ogólnikowo analizuje się własności badanych szeregów czasowych, przez co nie możliwe jest sformułowanie bardziej ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod prognozowania. W badaniu przeprowadzono szereg testów dotyczących prawidłowości przyjętych specyfikacji modeli GARCH najczęściej poprzez testowanie odpowiednich restrykcji⁴. Wnioski płynące z wyników testów są najczęściej zgodne z wnioskami wynikającymi z analizy bayesowskiego kryterium Schwarza (patrz tabela 3).

Wnioski wynikające z przeprowadzonych testów oraz analizy kryterium SC często nie pokrywają się z trafnością modeli w prognozowaniu zmienności. Przy konstrukcji kryteriów informacyjnych i często przy testowaniu restrykcji bierze się pod uwagę cały model (np. równanie dla średniej, dla wariancji, roz-

⁴ Wyniki zostały pominięte z uwagi na ograniczony rozmiar publikacji.

kład warunkowy). Uwzględnienie w modelowaniu określonych charakterystyk szeregu czasowego stóp zwrotu nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie tych modeli. Okazuje się, że niektóre charakterystyki są istotne przy ocenie ogólnego dopasowania modelu w próbie, natomiast nie mają dużego wpływu na trafność prognoz.

5. Podsumowanie

W artykule dokonano oceny trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie 17 specyfikacji modelu GARCH oraz 8 innych metod. Pokazano, że wykorzystanie dodatkowych informacji przy konstrukcji modelu GARCH lub estymacji jego parametrów nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności. Można jednakże w znaczący, z ekonomicznego punktu widzenia⁵, sposób zwiększyć trafność prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modelu GARCH szacowanego na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany.

Literatura

- Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, AE w Poznaniu, Poznań.
- Fiszeder, P. (2004a), Forecasting Volatility with GARCH Models, materiały konferencji MACROMODELS'2003, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Fiszeder, P. (2004b), Prognozowanie zmienności na podstawie modeli GARCH, *Rynek Terminowy*, 25, 121–128.
- Fiszeder, P. (2005), Forecasting the Volatility of the Polish Stock Index – WIG20, w: *Forecasting Financial Markets. Theory and Applications*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Piontek, K. (2003), Weryfikacja wybranych technik prognozowania zmienności – Analiza szeregów czasowych, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia - tendencje światowe a polski rynek*, Prace naukowe AE we Wrocławiu, nr 991.
- Pipień, M. (2006), *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Poon, S-H., Granger, C. (2003), Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review, *Journal of Economic Literature*, 41, 478–539.
- West, K. D., Cho, D. (1995), The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility, *Journal of Econometrics*, 69, 367–391.

⁵ Choć nieistotny ze statystycznego punktu widzenia biorąc pod uwagę RMSE.