

## DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Ewa Dziawgo*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

### Analiza wrażliwości modelu wyceny opcji złożonych

#### 1. Wstęp

Opcje złożone są opcjami egzotycznymi, a więc zapewniającymi strukturę dochodu odmienną od tej, którą można otrzymać z opcji zwykłych.<sup>1</sup>

W artykule przedstawiono zagadnienia związane z opcjami złożonymi: typy opcji złożonych, zasady ich funkcjonowania oraz modele wyceny. Na podstawie symulacji wyceny opcji złożonych zbadano wpływ wybranych czynników na cenę rozpatrywanych opcji.

#### 2. Charakterystyka opcji złożonych

Opcja złożona (ang. compound option) jest opcją, której instrumentem bazowym jest inna opcja. Opcja nadrzędna, która jest wystawiona na inną opcję nazywana jest opcją-matką (ang. mother option). Z kolei opcja, która jest instrumentem bazowym opcji nadrzędnej nazywana jest opcją-córką (ang. daughter option). Instrumentem bazowym opcji-córki może być: akcja, waluta, indeks rynkowy, stopa procentowa.

W zależności od rodzaju opcji-matki i opcji-córki istnieją cztery podstawowe typy opcji złożonych:

- opcja kupna na opcję kupna – nabywca tej opcji posiada prawo zakupu w chwili  $t_1$  opcji kupna po cenie  $K_1$ . Funkcja wypłaty opcji złożonej w tym przypadku jest postaci:

$$\max[c_{t_1} - K_1; 0], \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Por. Jajuga, Gudaszewski, Mróz (2004), Weron, Weron (1998).

gdzie:

$c_{t_1}$  – cena opcji-córki w chwili  $t_1$ ,  $K_1$  – cena wykonania opcji-matki;

- opcja kupna na opcję sprzedaży – nabywca tej opcji w przyszłej chwili  $t_1$  ma prawo zakupu opcji sprzedaży po cenie  $K_1$ . Wówczas funkcja wypłaty opcji złożonej jest postaci:

$$\max[p_{t_1} - K_1; 0], \quad (2)$$

gdzie:

$p_{t_1}$  – cena opcji-córki w chwili  $t_1$ ,  $K_1$  – cena wykonania opcji-matki;

- opcja sprzedaży na opcję kupna – nabywca takiej opcji w przyszłej chwili  $t_1$  ma prawo sprzedaży opcji kupna po cenie  $K_1$ . Funkcja wypłaty opcji złożonej w tym przypadku jest postaci:

$$\max[K_1 - c_{t_1}; 0], \quad (3)$$

gdzie:

$c_{t_1}$  – cena opcji-córki w chwili  $t_1$ ,  $K_1$  – cena wykonania opcji-matki;

- opcja sprzedaży na opcję sprzedaży – nabywca tej opcji w przyszłej chwili  $t_1$  ma prawo sprzedaży opcji sprzedaży po cenie  $K_1$ . Funkcja wypłaty opcji złożonej w tym przypadku jest równa:

$$\max[K_1 - p_{t_1}; 0], \quad (4)$$

gdzie:

$p_{t_1}$  – cena opcji-córki w chwili  $t_1$ ,  $K_1$  – cena wykonania opcji-matki.

### 3. Model wyceny opcji złożonych

Model wyceny opcji złożonej opracował Geske w 1979 roku.<sup>2</sup> Wartość opcji kupna na opcję kupna wynosi:

$$V_{cc} = S e^{-qt_2} M\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) - K_2 e^{-rt_2} M\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) - e^{-rt_1} K_1 N(a_2) \quad (5)$$

gdzie:

$V_{cc}$  – wartość opcji kupna na opcję kupna,

$$a_1 = \frac{\ln \frac{S}{S^*} + (r - q + 0,5\sigma^2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}, \quad b_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_2} + (r - q + 0,5\sigma^2)t_2}{\sigma\sqrt{t_2}},$$

<sup>2</sup> Por. Hull (1989).

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{t_1}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t_2},$$

$S$  – bieżąca cena instrumentu bazowego,

$K_1$  – cena wykonania opcji-matki,

$K_2$  – cena wykonania opcji-córki,

$t_1$  – termin wykonania opcji-matki,

$t_2$  – termin wykonania opcji-córki,

$S^*$  – krytyczna cena instrumentu bazowego opcji-córki w chwili  $t_1$ , dla której

cena opcji-córki w  $t_1$  wynosi  $K_1$ ,  $S^* = S_{t_1} = Se^{vt_1 + y\sigma\sqrt{t_1}}$ ,  $v = r - q - 0,5\sigma^2$ ,

$r$  – stopa procentowa wolna od ryzyka,

$q$  – stopa dywidendy,

$\sigma$  – zmienność instrumentu bazowego,

$N(x)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego,

$M(x, y; c)$  – wartość dystrybuanty rozkładu normalnego dwóch zmiennych standaryzowanych.

Wartość opcji kupna na opcję sprzedaży wynosi:

$$V_{cp} = -Se^{-qt_2} M\left(-a_1, -b_1; \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) + K_2 e^{-rt_2} M\left(-a_2, -b_2; \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) - e^{-rt_1} K_1 N(-a_2) \quad (6)$$

gdzie:

$V_{cp}$  – wartość opcji kupna na opcję sprzedaży, pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (5).

Wartość opcji sprzedaży na opcję kupna wynosi:

$$V_{pc} = -Se^{-qt_2} M\left(-a_1, b_1; -\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) + K_2 e^{-rt_2} M\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) + e^{-rt_1} K_1 N(-a_2) \quad (7)$$

gdzie:

$V_{pc}$  – wartość opcji sprzedaży na opcję kupna, pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (5).

Wartość opcji sprzedaży na opcję sprzedaży wynosi:

$$V_{pp} = Se^{-qt_2} M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) - K_2 e^{-rt_2} M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) + e^{-rt_1} K_1 N(a_2) \quad (8)$$

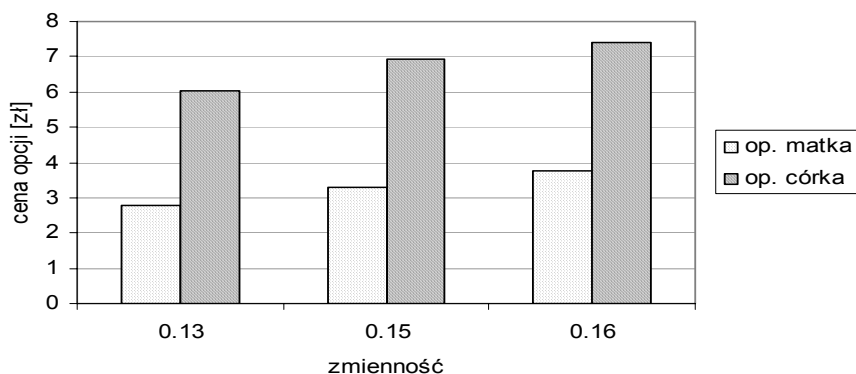
gdzie:

$V_{pp}$  – wartość opcji sprzedaży na opcję sprzedaży, pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (5).

#### 4. Analiza czynników wpływających na cenę opcji złożonej

Analiza empiryczna dotyczy wpływu wybranych czynników: czasu wygaśnięcia opcji-matki, zmienności oraz bieżącej ceny instrumentu bazowego opcji-córki na kształtowanie się cen opcji złożonych. Analizie poddane zostały dwa typy opcji złożonych: opcja kupna na opcję kupna oraz opcja sprzedaży na opcję kupna. Symulacja wyceny przeprowadzona została dla opcji złożonych, których termin wygaśnięcia opcji-córki wynosi 9 miesięcy. Cena wykonania opcji-matki wynosi 5.5 zł. Cena wykonania opcji-córki wynosi 120 zł.

Przykład 1. Wpływ wybranych czynników na cenę opcji złożonych typu: opcja kupna na opcję kupna.

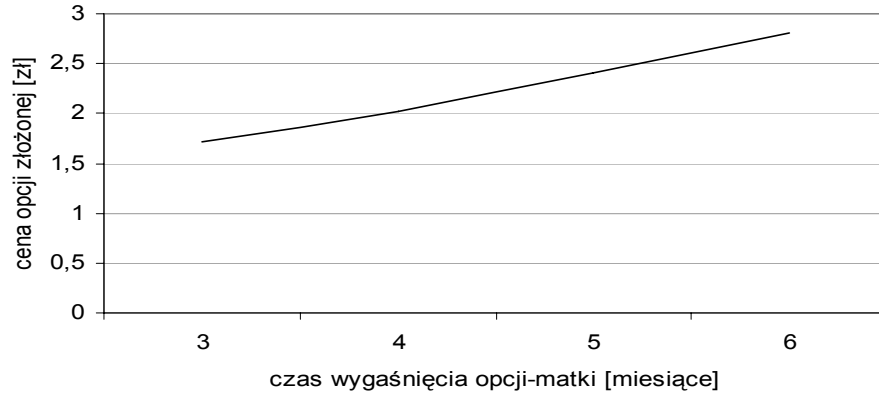


Wykres 1. Wpływ zmienności na kształtowanie się ceny opcji-matki i ceny opcji-córki  
Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 1 wynika, że dla każdej zmienności, ceny opcji złożonych są znacznie mniejsze od cen opcji zwykłych. Wzrost zmienności wpływa na wzrost cen opcji zwykłych i rozpatrywanych opcji złożonych.

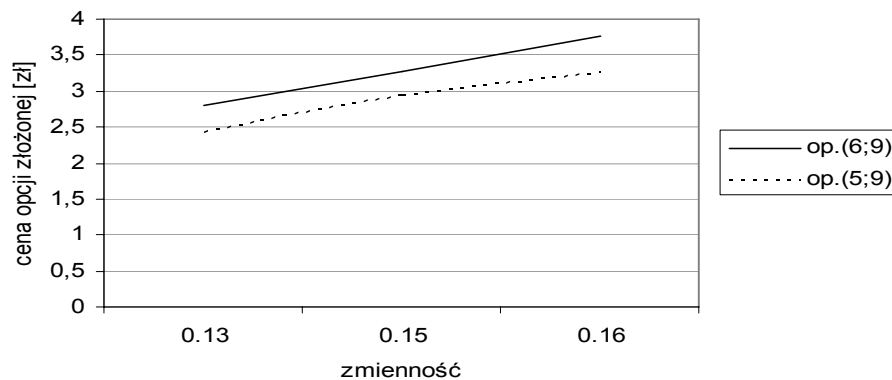
Na wykresie 2 przedstawiono wpływ czasu wygaśnięcia opcji-matki na kształtowanie się cen opcji złożonych.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 2 wynika, że wzrost terminu wygaśnięcia opcji-matki wpływa na wzrost ceny rozpatrywanych opcji złożonych.



Wykres 2. Wpływ czasu wygaśnięcia opcji-matki na cenę opcji złożonej  
*Źródło:* opracowanie własne.

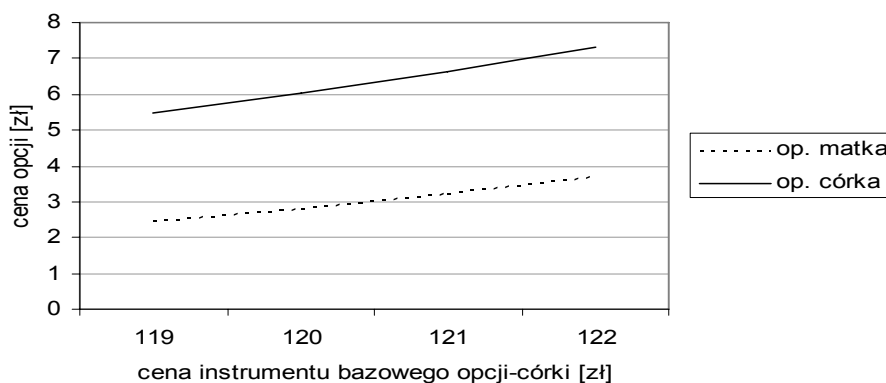
Wykres 3 jest ilustracją wpływu zmienności na kształtowanie się cen opcji złożonych, które różnią się terminem wygaśnięcia opcji-matki. Analizie poddane zostały opcje złożone, których termin wygaśnięcia opcji-córki wynosi 9 miesięcy. Termin wygaśnięcia opcji-matki jednej z rozpatrywanych opcji wynosi 6 miesięcy (op. (6;9)). Termin wygaśnięcia opcji-matki drugiej rozpatrywanej opcji złożonej wynosi 5 miesięcy (op. (5;9)).



Wykres 3. Wpływ zmienności na kształtowanie się cen opcji złożonych (opcji kupna na opcję kupna) różniących się terminem wygaśnięcia opcji-matki  
*Źródło:* opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 3 wynika, że wzrost zmienności wpływa na wzrost cen rozpatrywanych opcji złożonych. Dla każdej zmienności opcje złożone, których opcje-matki charakteryzują się dłuższym terminem wygaśnięcia są droższe.

Na wykresie 4 przedstawiono wpływ ceny instrumentu bazowego opcji-córki na kształtowanie się ceny opcji-matki oraz ceny opcji-córki.



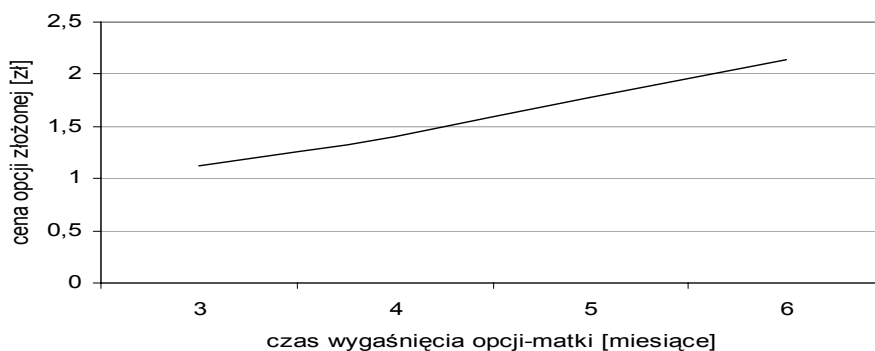
Wykres 4. Wpływ ceny instrumentu bazowego opcji-córki na kształtowanie się ceny opcji-córki oraz ceny opcji-matki (opcja kupna na opcję kupna)

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 4 wynika, że w przypadku opcji kupna wystawionej na opcję kupna, wzrost bieżącej ceny instrumentu bazowego opcji-córki wpływa na wzrost zarówno ceny opcji-córki jak i ceny opcji-matki.

Przykład 2. Wpływ wybranych czynników na cenę opcji złożonych typu: opcja sprzedaży na opcję kupna.

Na wykresie 5 przedstawiono wpływ czasu wygaśnięcia opcji-matki na kształtowanie się cen opcji złożonych.



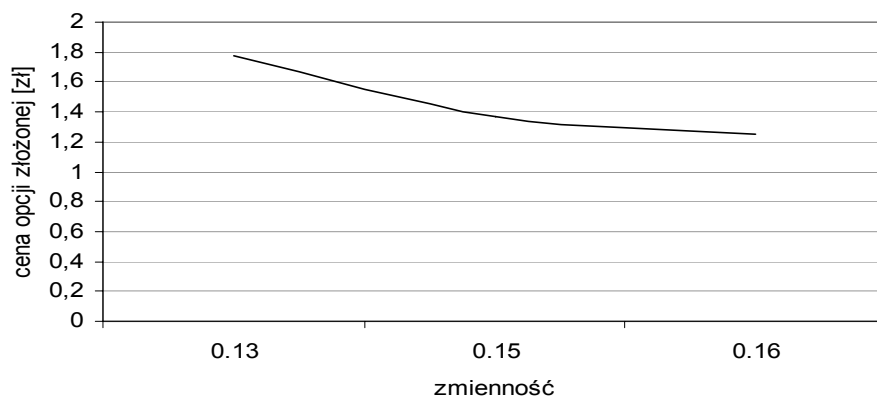
Wykres 5. Wpływ czasu wygaśnięcia opcji-matki na kształtowanie się ceny opcji złożonej (opcja sprzedaży na opcję kupna)

Źródło: opracowanie własne.

Wzrost czasu wygaśnięcia opcji-matki wpływa na wzrost ceny rozpatrywanych opcji złożonych.

Na wykresie 6 przedstawiono wpływ zmienności na kształtowanie się cen rozpatrywanych opcji złożonych.

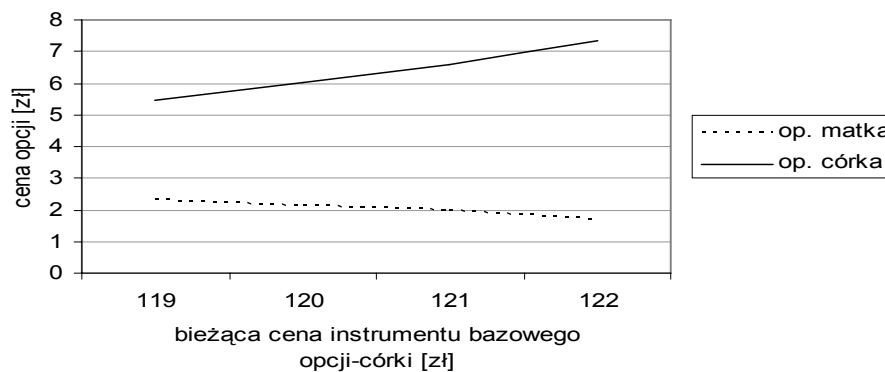
Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 6 wynika, że wzrost zmienności wpływa na spadek ceny opcji sprzedaży wystawionej na opcję kupna.



Wykres 6. Wpływ zmienności na kształtowanie się ceny opcji złożonej (opcji sprzedaży na opcję kupna)

Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie 7 przedstawiono wpływ bieżącej ceny instrumentu bazowego opcji-córki na kształtowanie się ceny opcji-córki oraz ceny opcji-matki.



Wykres 7. Wpływ bieżącej ceny instrumentu bazowego opcji-córki na kształtowanie się ceny opcji-córki oraz ceny opcji-matki (przypadek opcji sprzedaży wystawionej na opcję kupna)

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresie 7 wynika, że w przypadku opcji sprzedaży wystawionej na opcję kupna, wzrost bieżącej ceny instrumentu bazowego opcji-córki wpływa na wzrost ceny opcji-córki oraz na spadek ceny opcji-matki.

#### 4. Zakończenie

Opcje złożone są znacznie tańsze od opcji zwykłych. Z uwagi na koszty ponoszone przez inwestora w celu zabezpieczenia się przed ryzykiem zmian cen instrumentów bazowych, opcje złożone są bardziej atrakcyjne od opcji zwykłych, w szczególności w sytuacji, kiedy inwestor zabezpiecza inwestycje, na które ma wpływ wydarzenie, co do którego wystąpienia nie ma pewności.

Podstawowymi czynnikami wpływającymi na cenę opcji złożonych są: termin wygaśnięcia opcji-córki, termin wygaśnięcia opcji-matki, zmienność, cena instrumentu bazowego opcji-córki. Dłuższy termin wygaśnięcia opcji-matki oraz opcji-córki przyczynia się do wzrostu ceny opcji złożonych.

W przypadku opcji złożonej typu: opcja kupna na opcję kupna wzrost zmienności oraz wzrost ceny instrumentu bazowego opcji-córki wpływa na wzrost ceny opcji złożonej. Natomiast w sytuacji opcji złożonej typu: opcja sprzedaży na opcję kupna wzrost zmienności oraz wzrost ceny instrumentu bazowego opcji-córki wpływa na spadek ceny opcji złożonej.

Opcja złożona jest instrumentem finansowym, który jest wykorzystywany w transakcjach spekulacyjnych i zabezpieczających poziom zmienności.

#### Literatura

- Hull, J. C. (1989), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall International, Inc.
- Jajuga, K., Gudaszewski, W., Mróz, W. (2004), Opcje egzotyczne – wprowadzenie, *Rynek Terminowy*, 1, 6–11.
- Weron, A., Weron, R. (1998), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.