

**Modelowanie
zależności warunkowych
pomiędzy zwrotami finansowymi
za pomocą modeli kopuli
z przełączaniem typu Markowa**

Ryszard Doman

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

Motywacje

- ❑ Zależność między zwrotami z różnych akcji jest o wiele większa podczas bessy niż w czasie hossy. Zjawisko to, zwane **zależnością asymetryczną**, jest dobrze udokumentowane w licznych badaniach.
- ❑ Wielowymiarowe modele zmienności z eliptycznymi rozkładami standaryzowanych innowacji nie są w stanie uwzględnić zależności asymetrycznej.
- ❑ Właściwe rozpoznanie zależności asymetrycznej może przelożyć się na osiągnięcie istotnych korzyści w inwestowaniu na rynkach finansowych (Ang i Bekaert 2002, Patton 2004).

Cel referatu

- Propozycja modelu zależności warunkowych uwzględniającego asymetrię zależności asymptotycznej (ogonowej) w rozkładach warunkowych, wykorzystującego kopule z przełączaniem reżimów typu Markowa**
- Zastosowanie zaproponowanego modelu do estymacji zależności warunkowych pomiędzy zwrotami indeksów WIG20 i MIDWIG**

Ogólny wielowymiarowy model heteroskedastyczności warunkowej

$$r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{k,t})'$$

$$r_t = \mu_t + y_t \quad \mu_t = E(r_t | \Omega_{t-1})$$

$$y_t = H_t^{1/2} \varepsilon_t$$

$$E(y_t y_t' | \Omega_{t-1}) = H_t \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_t' | \Omega_{t-1}) = I$$

Model dynamicznych korelacji warunkowych (DCC) Engle (2002) (1)

$$\mathbf{y}_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t = \left(\rho_{ij,t} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right)$$

$$\mathbf{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{kk,t}} \right)$$

$$h_{ii,t} = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \mathbf{y}_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} h_{ii,t-j}$$

Model DCC

(2)

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2}$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n \right) \bar{Q} + \sum_{m=1}^M \alpha_m u_{t-m} u'_{t-m} + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n}$$

$$u_t = D_t^{-1} y_t \quad \bar{Q}_t = \text{cov}(u_t)$$

Słabość standardowego modelu DCC:

Rozkład warunkowy zwrotów jest wielowymiarowym rozkładem normalnym, podczas gdy rozkłady zwrotów większości instrumentów finansowych charakteryzują się podwyższoną kurtozą.

Remedium:

W standardowym modelu DCC zastąpić rozkład normalny **rozkładem eliptycznym** o grubszych ogonach (Pelagatti i Rondena 2004) .

Krótko o rozkładach eliptycznych

Mówimy, że k -wymiarowy wektor losowy X ma **rozkład eliptyczny** ($X \sim EC_k(\mu, \Sigma, \phi)$), jeśli jego funkcja charakterystyczna może być przedstawiona w postaci

$$E(\exp(it'X)) = \exp(it'\mu)\phi(t'\Sigma t)$$

gdzie μ jest wektorem k -wymiarowym, Σ jest dodatnio określoną $(k \times k)$ – macierzą symetryczną, a ϕ jest funkcją skalarną, zwaną generatorem charakterystycznym.

Rozkłady eliptyczne (cd.)

Jeśli X ma momenty rzędu k , $k > 2$, to

$$E(X) = \mu, \quad \text{Cov}(X) = \gamma \Sigma$$

Przykłady: (Rozkład wielowymiarowy)

- normalny
- t Studenta
- Laplace'a

Najważniejsza własność: Rozkład brzegowy jest rozkładem eliptycznym o tym samym generatorze.

Słabość: symetryczność

Alternatywne modelowanie zależności: kopula zmiennych losowych

$$X \sim F \quad Y \sim G$$

F, G - ciągłe dystrybuanty

Jeśli funkcja $C : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

jest (obcięta do $[0,1] \times [0,1]$) dystrybuantą
rozkładu łącznego zmiennych

$U = F(X), V = G(Y)$, to nazywamy ją
kopulą zmiennych (X, Y) .

Podstawowa własność kopuli (Sklar 1959):

**Jeśli H jest dystrybuantą wektora (X, Y) ,
to przy poprzednich założeniach istnieje
dokładnie jedna kopula C taka, że**

$$**$H(x, y) = C(F(x), G(y)) .$**$$

Miary zależności

Pułapki współczynnika korelacji liniowej:

Wartość współczynnika korelacji liniowej ρ może być bardzo mylącym wskaźnikiem (siły) zależności zmiennych losowych, w przypadku gdy ich rozkład łączny nie jest eliptyczny.

Miary zależne jedynie od kopuli:

□ współczynnik korelacji rang Spearmana

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F(X), G(X))$$

□ współczynnik tau Kendalla

$$\tau(X, Y) = P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\},$$

gdzie (\tilde{X}, \tilde{Y}) jest niezależną kopią wektora (X, Y)

Współczynnik tau Kendalla oraz współczynnik korelacji rang Spearmana mierzą stopień zależności monotonicznej zmiennych X i Y , podczas gdy zwykły współczynnik korelacji (Pearsona) mierzy jedynie stopień zależności liniowej.

Jeśli (X, Y) jest wektorem ciągłych zmiennych losowych z kopulą C , to

$$\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Zależność asymptotyczna w ogonach

Współczynniki zależności ogonowej

X, Y losowe z dystrybuantami F i G

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(Y > G^{\leftarrow}(q) \mid X > F^{\leftarrow}(q))$$

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(Y \leq G^{\leftarrow}(q) \mid X \leq F^{\leftarrow}(q))$$

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in R : F(x) \geq y\}$$

Jeśli dystrybuanty F i G są ciągłe oraz C jest kopulą łącznego rozkładu zmiennych X i Y , to

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(q, q)}{q}, \text{ gdzie}$$

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Gęstość kopuli i kanoniczna reprezentacja gęstości rozkładu łącznego

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Dla ciągłego wektora losowego z dystrybuantą rozkładu łącznego F i gęstościami brzegowymi f_1 i f_2 , gęstość c kopuli jest związana z gęstością f rozkładu łącznego:

$$f(x, y) = c(F_1(x), F_2(y)) f_1(x) f_2(y)$$

Przykłady kopuli

Kopula gaussowska

$$C^{Gauss}(u, v; \rho) = \Phi_{\rho}\left(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)\right)$$

Φ_{ρ} - dystrybuanta standardowego dwuwymiarowego rozkładu normalnego ze współczynnikiem korelacji ρ

Φ - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

Gęstość kopuli gaussowskiej

$$c^{Gauss}(u, v; \rho) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2} + \frac{2\rho\zeta_1\zeta_2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

where

$$\zeta_1 = \Phi^{-1}(u)$$

$$\zeta_2 = \Phi^{-1}(v)$$

Kopula t Studenta

$$\begin{aligned} C_{\rho, \eta}^{\text{Student}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= t_{\rho, \eta}\left(t_{\eta}^{-1}(\mathbf{u}), t_{\eta}^{-1}(\mathbf{v})\right) \\ &= \int_{-\infty}^{t_{\eta}^{-1}(\mathbf{u})} \int_{-\infty}^{t_{\eta}^{-1}(\mathbf{v})} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\eta(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\eta+2}{2}} \end{aligned}$$

$t_{\rho, \eta}$ dystrybuanta rozkładu t Studenta z η stopniami swobody

t_{η} dystrybuanta dwuwymiarowego rozkładu t Studenta z η stopniami swobody i współczynnikiem korelacji ρ

Gęstość kopuli t Studenta

$$c_{\eta, \rho}^S(u, v) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \left(1 + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{\eta(1-\rho^2)}\right)^{-(\eta+2)/2}}{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)^2 \prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{\zeta_j^2}{\eta}\right)^{-(\eta+2)/2}}$$

$$\zeta_1 = t_{\eta}^{-1}(u)$$

$$\zeta_2 = t_{\eta}^{-1}(v)$$

Kopula Joe i Claytona

$$C_{\kappa, \gamma}^{\text{Joe-Clayton}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$$

$$1 - \left(1 - \left([1 - (1 - \mathbf{u})^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - \mathbf{v})^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right)^{-1/\gamma} \right)^{1/\kappa}$$

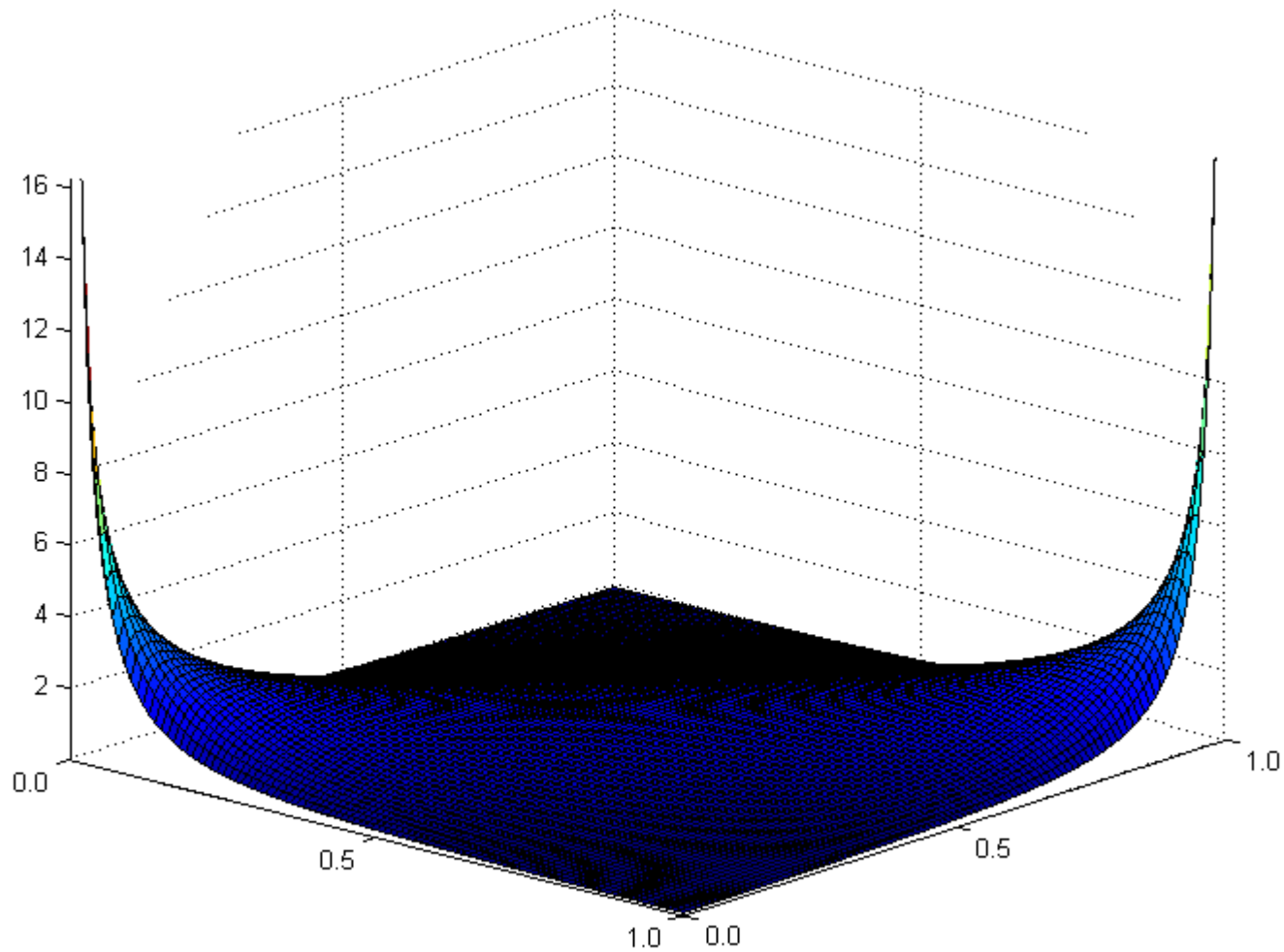
$$\kappa \geq 1 \quad \gamma \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

Współczynnik tau Kendala i współczynniki zależności ogonowej dla kopuli gaussowskiej, t Studenta oraz Joego i Clayтона

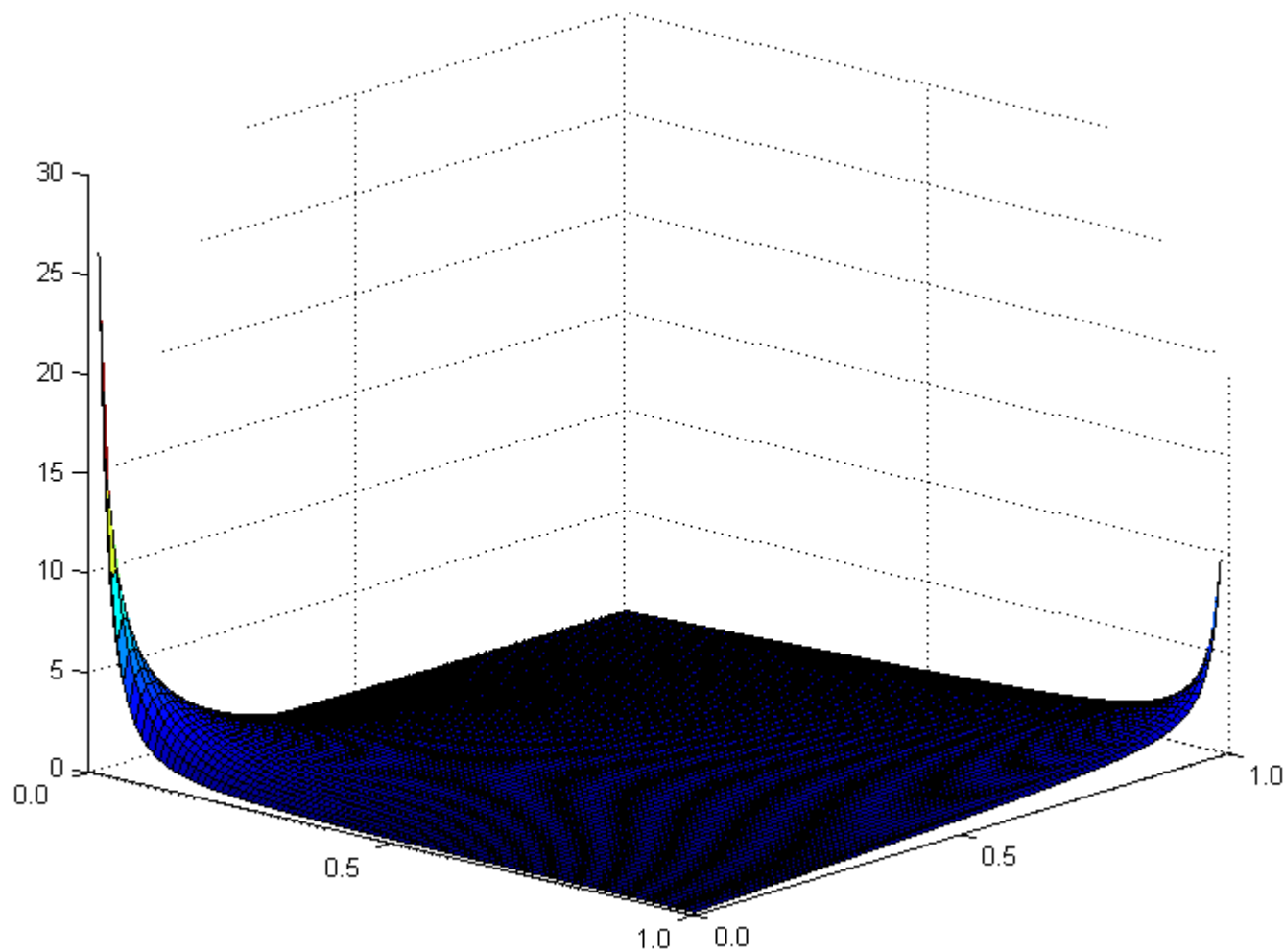
Kopula	τ	λ_U	λ_L
C_{ρ}^{Gauss}	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\delta)$	0	0
$C_{\rho, \eta}^{\text{Student}}$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\delta)$	$2t_{\eta+1} \left(-\sqrt{\frac{(\eta+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	
$C_{\kappa, \gamma}^{\text{J-C}}$	$\tau(\kappa, \gamma)$	$2 - 2^{1/\kappa}$	$2^{-1/\gamma}, \gamma > 0$

$$\tau(\kappa, \gamma) = 1 + \frac{2}{\kappa\gamma} - \frac{4}{\kappa\gamma} \int_0^1 x^{1-\kappa} (1 - (1 - x^{\kappa})^{\gamma+1}) dx$$

Gęstość kopuli *t* Studenta: $\rho = 0,6989$ $\eta = 8,6854$



Gęstość kopuli Joego i Claytona: $\kappa = 1.1997$ $\gamma = 1,0197$



Model MSC kopuli z przełączaniem typu Markowa (**M**arkov **S**witching **C**opula) (Tsafack 2006)

$$r_t = (r_{1,t}, r_{2,t})'$$

$$r_{1,t} | \Omega_{t-1} \sim F_t(\cdot) \quad r_{2,t} | \Omega_{t-1} \sim G_t(\cdot)$$

$$r_t | \Omega_{t-1} \sim C_{s_t}(F_t(\cdot), G_t(\cdot) | \Omega_{t-1})$$

S_t - jednorodny łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2\}$

Parametry modelu MSC

- Parametry modeli jednowymiarowych dla warunkowych rozkładów brzegowych (GARCH(1,1) ze skośnym rozkładem t Studenta)
- Parametry kopuli C_1 i C_2
- Prawdopodobieństwa przejścia:

$$p_{11} = P(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1)$$

$$p_{22} = P(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 2)$$

**Najważniejszym „produktem ubocznym”
estymacji modelu MSC są prawdopodobieństwa
warunkowe**

$$P(s_t = j | \Omega_{t-1})$$

obliczane za pomocą tzw. filtru Hamiltona:

$$P(s_t = j | \Omega_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 p_{ij} P(s_{t-1} = i | \Omega_{t-1})$$

$$P(s_t = j | \Omega_t) = \frac{c_j(u_t | s_t = j, \Omega_{t-1}) P(s_t = j | \Omega_{t-1})}{\sum_{i=1}^2 c_i(u_t | s_t = i, \Omega_{t-1}) P(s_t = i | \Omega_{t-1})}$$

Estymacja modelu MSC

Logarytm funkcji wiarygodności:

$$L = \sum_{t=1}^T \ln \left(\sum_{j=1}^2 c_j(u_t | s_t = j, \Omega_{t-1}; \theta) P(s_t = j | \Omega_{t-1}; \theta) \right) +$$
$$+ \sum_{t=1}^T \ln(f(r_{1,t} | \Omega_{t-1}; \theta_1)) + \sum_{t=1}^T \ln(g(r_{2,t} | \Omega_{t-1}; \theta_2)) ,$$

gdzie $p_{12} = 1 - p_{11}$ $p_{21} = 1 - p_{22}$

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{u}_{1,t}, \mathbf{u}_{2,t})'$$

$$\mathbf{u}_{1,t} = F_t(r_{1,t}) \quad \mathbf{u}_{2,t} = G_t(r_{2,t})$$

$c_j(\cdot | s_t = j, \Omega_{t-1})$ - gęstość kopuli warunkowej

wiążącej warunkowe rozkłady brzegowe w reżimie j .

Inne istotne charakterystyki modelu MSC

Prawdopodobieństwa bezwarunkowe poszczególnych stanów:

$$P(s_t = 1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad P(s_t = 2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}$$

$$mtr(i) = \frac{1}{P(s_t = i)} \quad - \text{średni czas powrotu do reżimu } i$$

$$d(i) = \frac{1}{1 - p_{ii}} \quad - \text{czas oczekiwanego trwania w reżimie } i$$

Statystyki opisowe badanych szeregów zwrotów

9. 01.2001 – 16.03.2007

$$r_t = 100(\log(P_t) - \log(P_{t-1}))$$

Indeks	WIG20	MIDWIG
Średnia	0,0412	0,0966
Odchylenie standardowe	1,4583	0,8731
Minimum	-5,7306	-5,6449
Maksimum	5,4830	4,1011
Skośność	0,0412	-0,5642
Kurtoza	4,0421	6,3457

Wyniki estymacji modeli jednowymiarowych

WIG20

	Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Student's t d.f.	8.29292	1.712	-----	-----
[2]GARCH Intercept	0.01464	0.0083	-----	-----
GARCH Alpha1	0.03613	0.00866	4.173	0
GARCH Beta1	0.95753	0.00964	99.329	0

MIDWIG

Student's t d.f.	7.57932	1.3435	-----	-----
Log(Skewness) (ln(ksi))	-0.11607	0.03785	-3.067	0.002
[2]GARCH Intercept	0.02255	0.0088	-----	-----
GARCH Alpha1	0.09354	0.01848	5.062	0
GARCH Beta1	0.87976	0.02456	35.821	0

Oszacowania parametrów modelu MSC

Reżim 1: kopula gaussowka C_{ρ}^{Gauss}

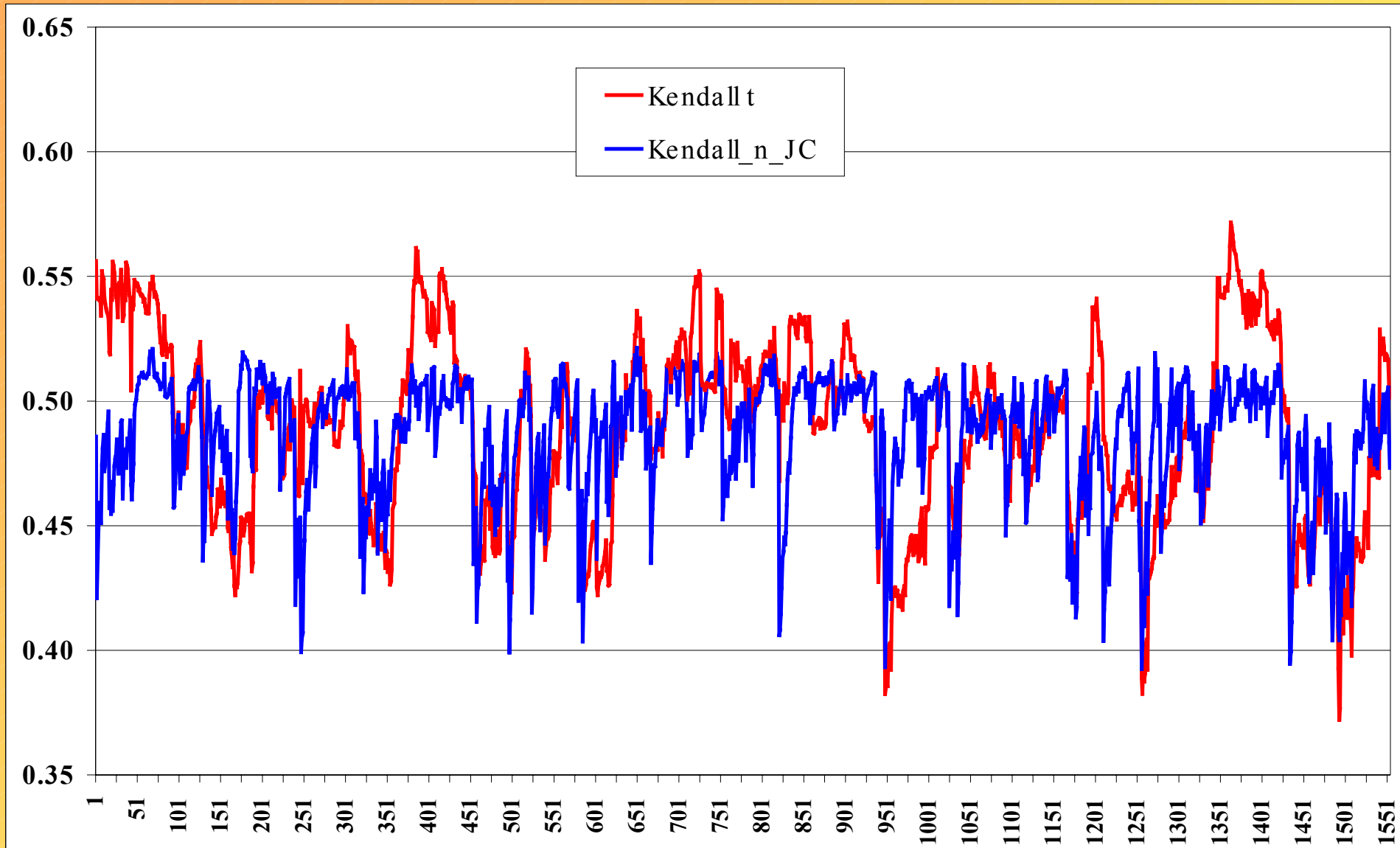
Reżim 2: kopula Joego i Claytona $C_{\kappa, \gamma}^{\text{J-C}}$

p_{11}	0.9555	(0.0361)
p_{22}	0.9152	(0.0797)
ρ	0.7522	(0.0222)
κ	1.1997	(0.1001)
γ	1.0197	(0.1872)

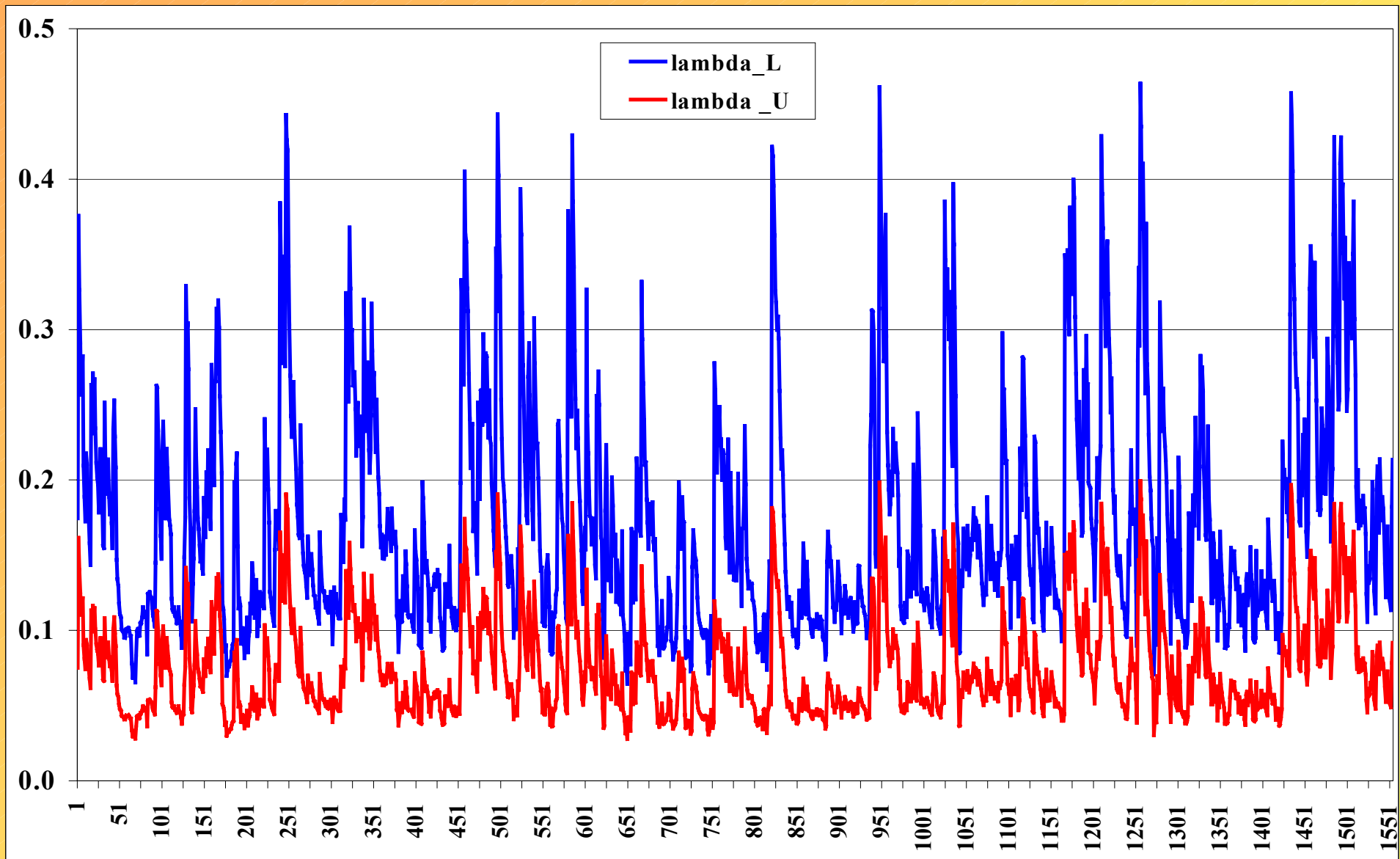
Inne istotne charakterystyki estymowanego modelu MSC

$P(s_t = 1)$	0.6558	$P(s_t = 2)$	0.3442
$mtr(1)$	1.5248	$mtr(2)$	2.9055
$d(1)$	22.4624	$d(2)$	11.7882

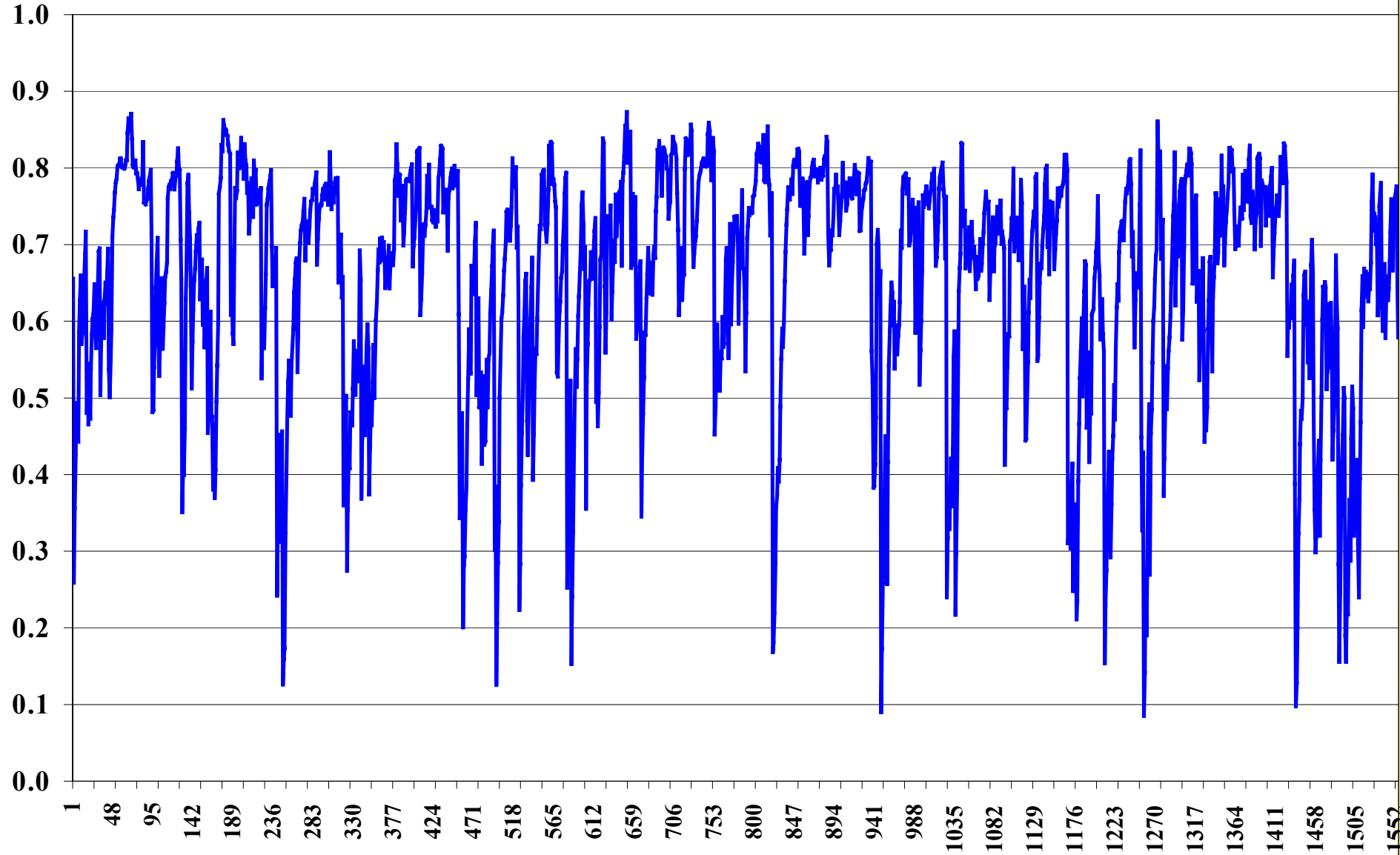
Dynamika warunkowego współczynnika tau Kendalla oszacowana na podstawie modeli MSC oraz t -DCC



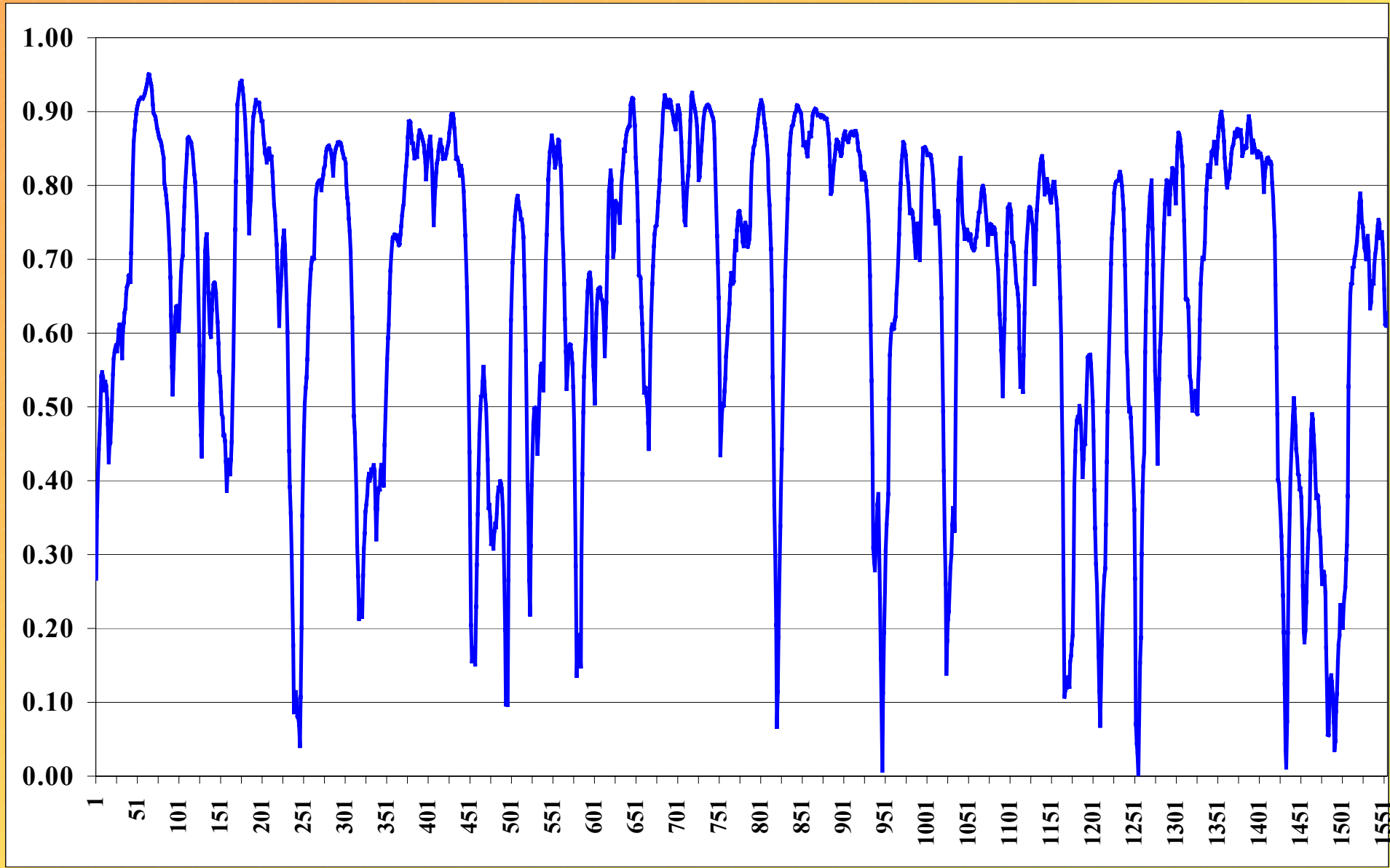
Dynamika warunkowych zależności ogonowych oszacowana za pomocą modelu MSC



Warunkowe prawdopodobieństwa występowania w dniu t reżimu 1



Wyglądzone warunkowe prawdopodobieństwa występowania w dniu t reżimu 1



Podsumowanie

□ Zwroty indeksów WIG20 i MIDWIG wykazują istotnie większą warunkową zależność asymptotyczną podczas bessy niż w czasie hossy.

□ Zjawisko to można stwierdzić za pomocą modeli kopuli z przełączaniem typu Markowa.

Wielowymiarowe modele zmienności z eliptycznymi rozkładami innowacji nie są w stanie wychwycić tego rodzaju asymetrii.

□ Zależność warunkowa zwrotów indeksów WIG20 i MIDWIG, mierzona współczynnikiem tau Kendalla, oszacowana za pomocą modelu MSC, jest niższa, niż gdy szacuje się ją za pomocą modelu t -DCC.