

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Monika Jeziorska-Papka
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Zastosowanie progowego modelu Sharpe'a w analizie szeregów rynku kapitałowego

1. Charakterystyka modelu Sharpe'a

Powstanie klasycznej teorii portfela przypada na lata pięćdziesiąte XX wieku. Twórcą tej teorii był H.M. Markowitz. Kolejnym krokiem w rozwoju teorii portfela było zaprezentowanie przez Sharpe'a modelu jednowskaźnikowego. Jest to najprostszy i najczęściej używany model opisujący powiązanie zmian wartości akcji z zachowaniem całego rynku.

Model ten opiera się na założeniu, że kształtowanie się stóp zwrotu akcji jest zdeterminowane działaniem czynnika rynku, który odzwierciedla zmiany na rynku kapitałowym. Za taki czynnik najczęściej przyjmuje się jakiś wskaźnik z rynku finansowego czy kapitałowego. Działanie innych czynników mających wpływ na stopę zwrotu akcji wyrażone jest poprzez składnik losowy (e), jednak wpływ składnika losowego jest nieistotny w porównaniu z efektem działania wskaźnika rynku i dlatego najczęściej pomija się go we wzorze. Dodatkowo w modelu zakłada się, że inwestorzy mają awersję do ryzyka i działają racjonalnie, koszty transakcji i podatki wynoszą zero, wszystkie aktywa mogą być kupowane i sprzedawane bez ograniczeń, rynek jest efektywny, transakcje pojedynczego inwestora nie mają wpływu na cenę instrumentu finansowego oraz wszyscy inwestorzy w tym samym czasie kierują się tymi samymi zasadami dotyczącymi spodziewanej stopy zwrotu, ryzyka i kowariancji.

Ogólną postać tego modelu przedstawia równanie (1) – zwane *linią charakterystyczną i-tej akcji*.

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{M_t} + e_{it}, \quad (1)$$

r_{it} – stopa zwrotu i -tej akcji

α_i – stała,

β_i – współczynnik beta – wskazuje o ile w przybliżeniu wzrośnie stopa, akcji jeżeli wartość czynnika rynku wzrośnie o jednostkę

r_M – stopa zwrotu czynnika rynku.

Duże znaczenie w budowie tego modelu ma właściwy dobór czynnika rynku. W praktyce za taki czynnik przyjmuje się indeks giełdowy, ponieważ to właśnie on najlepiej służy do opisanego kierunku zmian na rynku

Wartość parametru β informuje z jakim rodzajem akcji mamy do czynienia: $|\beta| > 1$ – akcja agresywna, reaguje mocniej niż rynek i $|\beta| < 1$ – akcje defensywne; $\beta < 0$ – akcja reaguje w przeciwnym kierunku niż rynek

Na całkowite ryzyko danej akcji (C) składa się ryzyko rynkowe (A) i specyficzne (B).

$$S_i^2 = \beta_i^2 S_M^2 + S_{ei}^2 \quad C = A + B \quad (2)$$

Ryzyko rynkowe uzależnione jest od ogólnej sytuacji na rynku (wskaźnika rynku), natomiast ryzyko specyficzne jest związane tylko z daną akcją.

Budowa optymalnego portfela polega na minimalizacji ryzyka S_p przy ustalonym poziomie stopy zwrotu R_p

$$\begin{aligned} S_p^2 &= x^T D x \rightarrow \min \\ R_p &= \alpha_p + \beta_p R_M + e_p \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{cases} D = \{d_{ij}\} = \{\beta_i \beta_j S_M^2\} \\ \alpha_p = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \\ \beta_p = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \end{cases} \quad (4)$$

x_i – udział i -tej akcji w portfelu, S_M – ryzyko czynnika rynku.

Progowy model Sharpe'a

W pracy zaprezentowano modyfikację klasycznego modelu Sharpe'a – „progowy model Sharpe'a”. Modyfikacja ta polega na zastosowaniu wersji dwurównaniowej – wzór (2). Model ten należy do klasy modeli progowych - TAR (Threshold Autoregressive Model).

$$r_t = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 r_{M,t} + e_{1t} & r_{M,t-1} < s \\ \alpha_2 + \beta_2 r_{M,t} + e_{2t} & r_{M,t-1} \geq s \end{cases} \quad (5)$$

s – parametr progowy.

Jest to model z dwoma stanami (reżimami) i przechodzenie z jednego stanu do drugiego uzależnione jest od wartości parametru progowego (r_M) w okresie poprzednim.

Zastosowanie progowej wersji modelu stóp zwrotu umożliwia opisanie asymetrycznych zachowań na ryku. Asymetria polega na różnym zachowaniu się inwestorów w zależności od posiadanych informacji. Wartość zmiennej progowej opóźnionej o 1 okres pozwala na rozbicie szeregu na dwa stany.

Istotnym zagadnieniem jest wybór odpowiedniej wartości parametru progowego. Parametr ten można oszacować¹ lub przyjąć a priori.

2. Zastosowanie modeli Sharpe'a

Do badania wykorzystano szeregi tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu 6 spółek: Dębica, Prokom, TPSA, Żywiec, Swarzędz i Warta notowanych na giełdzie w okresie 25.11.1998 – 30.03.2005 (332 obserwacje). Każda ze spółek należy do innej branży.

Jako czynnik rynku najlepiej sprawdzają się indeksy giełdowe, dlatego w badaniu posłużono się indeksem WIG. Uznano, że WIG dość dobrze opisuje zmiany na rynku finansowym.

Tabela.1. Podstawowe statystyki rozkładu stóp zwrotu badanych szeregów

	Dębica	Prokom	TPSA	Żywiec	Swarzędz	Warta	WIG
Średnia	0.00101	0.000119	0.000698	0.000223	0.003376	0.000534	0.002227
Mediana	0	-0.00114	0.00295	0	0	-0.0015	0.002515
Maximum	0.132939	0.256296	0.242946	0.156275	0.300986	0.300105	0.119183
Minimum	-0.15868	-0.30301	-0.14681	-0.19771	-0.22677	-0.40144	-0.09272
Odch. St	0.039721	0.068634	0.054892	0.03737	0.051583	0.079956	0.031451
Skośność	0.007054	0.069458	0.592441	-0.34442	1.279639	0.12697	0.073789
Kurtoza	3.891934	5.257771	5.232301	7.604185	10.86856	6.037134	4.026327
Jarque-Bera	11.00782	70.78277	88.35511	299.8103	947.087	128.4933	14.87258

Źródło: obliczenia własne.

Wszystkie spółki charakteryzowały się dodatnią średnią stopą zwrotu, podwyższoną kurtozą i wysoką statystyką JB. Oprócz spółki Żywiec wszystkie były prawostronnie asymetryczne, przy czym skośność Swarzędza była największa.

Dla spółek tych oszacowano klasyczne modele Sharpe'a oraz modele progowe. W modelach progowych wartość parametru progowego przyjęto a priori jako 0. Wybór $s=0$ ma na celu opisanie zachowanie na rynku w zależności od tego, czy w okresie wcześniejszym był spadek (reżim I) czy wzrost (reżim II) indeksu giełdowego

¹ Metody estymacji parametrów modeli TAR opisane zostały w pracy M. Witkowskiego (1999).

$$r_t = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 r_{M,t} + e_{1t} & r_{M,t-1} < 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 r_{M,t} + e_{2t} & r_{M,t-1} \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Przy takiej wartości s pierwszy reżim liczył 156 obserwacji, a drugi 175.

Tabela 2. Podstawowe statystyki rozkładu stóp zwrotu badanych szeregów w poszczególnych reżimach

	Dębica		Prokom		TPSA	
	I reżim	II reżim	I reżim	II reżim	I reżim	II reżim
Średnia	0.003014	-0.00051	0.002264	-0.00213	0.000132	0.001171
Mediana	0.001019	0	0	-0.00401	0	0.003656
Maximum	0.132939	0.119633	0.208308	0.256296	0.225011	0.242946
Minimum	-0.15868	-0.09303	-0.30301	-0.24656	-0.1226	-0.14681
Od. Stan.	0.041609	0.037958	0.072404	0.065285	0.053981	0.055996
Skośność	-0.08604	0.077302	-0.05996	0.217647	0.544713	0.628266
Kurtoza	4.292095	3.378266	5.131953	5.360971	4.701886	5.597244
Jarque-Bera	11.04429	1.217619	29.63742	42.02673	26.54122	60.69981
	Żywiec		Swarzędz		Warta	
	I reżim	II reżim	I reżim	II reżim	I reżim	II reżim
Średnia	-0.00141	0.001615	0.000734	0.005666	-0.0006446	0.006589
Mediana	0	0	0	0	-0.002849	-0.003008
Maximum	0.156275	0.100841	0.138432	0.300986	0.235829	0.300105
Minimum	-0.19771	-0.1618	-0.13815	-0.226773	-0.401	-0.223144
Od. Stan.	0.040089	0.034927	0.041781	0.059113	0.08099	0.07895
Skośność	-0.17935	-0.51732	-0.015724	1.5679	-0.44346	0.6961
Kurtoza	7.982577	6.687278	4.1068	10.849	6.6882	5.07
Jarque-Bera	162.2058	106.9433	7.969	520.977	93.55	45.55

Źródło: obliczenia własne.

Z powyższej tabeli wynika, że w pierwszym reżimie 3 spółki mają dodatnią średnią, a 3 ujemną. Natomiast w drugim reżimie 2 spółki mają ujemną stopę zwrotu.

Klasyczny i progowy model Sharpe'a dają zbliżone wyniki. Trudno jednoznacznie ocenić który model jest lepszy (por. tabela 3). Kryterium informacyjnym Akaike'a wskazuje, że w przypadku 4 spółek lepszy jest jednak model progowy Sharpe'a.

Sprawdzono również czy reszty z obu tych modeli mają takie same własności w sensie efektu ARCH (por. tabela 4).

Tabela 3. Wyniki estymacji klasycznego i progowego modelu Sharpe'a dla poszczególnych spółek

Dębica			
Oceny parametrów	Model I	Model progowy	
		I reżim	II reżim
α^*	-0.00029 (-0.1489)	0.000528 (0.18486)	-0.00104 (-.390117)
β^*	0.583243 (9.4581)	0.658158 (7.704)	0.48993 (5.4455)
R^2	0.21088	0.209	
S_e	0.035285	0.0353	
q	0.2128	0.2769	0.1457
Kryterium Akaike'a	-3.6184	-3.61905	
Prokom			
α^*	-0.00332 (-1239)	-0.00356 (-0.8649)	-0.00381 (-1.1)
β^*	1.54254 (18.153)	1.542769 (12.53)	1.57311 (13.42)
R^2	0.498	0.511	
S_e	0.04862	0.0501	
q	0.4989	0.5032	0.5087
Kryterium Akaike'a	-3.3402	-3.345	
TPSA			
α^*	-0.00233 (1.22)	-0.00459 (-1.65)	-0.00044 (-0.171)
β^*	1.35785 (22.49)	1.249 (15.05)	1.5056 (17.26)
R^2	0.604	0.621	
S_e	0.034542	0.0341	
q	0.6045	0.5938	0.6314
Kryterium Akaike'a	-3.6389	-3.646	
Żywiec			
α^*	-0.0008 (-0.419)	-0.00343 (-1.18)	0.00121 (0.481)
β^*	0.4577 (7.58)	0.5364 (6.184)	0.3828 (4.51)
R^2	0.1458	0.163	
S_e	0.034537	0.0349	
q	0.148	0.198	0.105
Kryterium Akaike'a	-3.6369	-3.639	
Swarzędz			
α^*	0.00272 (0.937)	0 (0.01)	0.00522 (1.19)
β^*	0.2914 (3.312)	0.203176 (2.04)	0.4116 (2.27)
R^2	0.029	0.031	
S_e	0.0508	0.049	
q	0.03	0.0167	0.065
Kryterium Akaike'a	-3.3034	-3.22	
Warta			
α^*	-0.00127 (-0.304)	-0.00971 (-1.58)	0.00574 (1.00)
β^*	0.80936 (6.1)	0.8646 (4.72)	0.78517 (4.056)
R^2	0.12	0.1	
S_e	0.0759	0.088	0.0756
q	0.101	0.083	0.074
Kryterium Akaike'a	-2.952	-2.77	

* w nawiasie podano statystyki t-Studenta

 q – udział ryzyka rynkowego w ryzyku całkowitym

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Efekty ARCH dla reszt modeli (na podstawie kryterium Akaike'a)

Model	Parametry	α_0	α_1	α_2	γ_1
Dębica *	Brak efektu ARCH				
Dębica**	Brak efektu ARCH				
Prokom*	GARCH(2,1)	0.000005	0.16	0.1447	0.974
Prokom**	GARCH(2,1)	0.000005	0.1419	0.1173	0.9691
TPSA*	GARCH(1,1)	0.000015	0.04		0.938
TPSA**	GARCH(1,1)	0.00001	0.033		0.95
Żywiec*	GARCH(1,1)	0.00001	0.052		0.939
Żywiec**	GARCH(1,1)	0.00001	0.00512		0.9433
Swarzędz*	GARCH(1,1)	0.000099	0.03513		0.92165
Swarzędz**	ARCH(1)	0.002077	0.21634		
Warta*	GARCH(1,1)	0.001969	0.43812		0.2784
Warta**	GARCH(1,1)	0.002038	0.409031		0.2785

*oznaczono reszty z klasycznego modelu Sharpe'a; **oznaczono reszty z progowego modelu Sharpe'a

Źródło: obliczenia własne.

Praktycznie w obu wersjach modeli rozmiar efektu ARCH w resztach był jednakowy. Nie można wskazać tu przewagi żadnego z modeli.

3. Budowa optymalnego portfela

Portfel papierów wartościowych budowany jest na dany moment t (wzór(3))

Budowanie optymalnego portfela papierów wartościowych na dany moment czasowy będzie uzależnione od tego, w którym reżimie będziemy.

Przy budowie tych portfeli minimalizowano ryzyko przy założeniu, że stopa zwrotu portfela wynosi 0,0005. We wszystkich portfelach założono taką samą stopę zwrotu, aby wyniki były porównywalne.

Tabela 5. Optymalne portfele na podstawie modeli Sharpe'a

Spółki	Udziały spółek		
	Portfel „klasyczny”	Portfel progowy	
		WIG(t-1)<0	WIG(t-1)>0
	Portfel A	Portfel B	Portfel C
Dębica	0	0.031444	0.775816
Prokom	0	0	0
TPSA	0	0	0
Żywiec	0.277564	0	0.224184
Swarzędz	0.722436	0.968556	0
Warta	0	0	0
Ryzyko – S_p^2	0.000114	0.000046	0.000215
Stopa zwrotu – R_p	0.0005	0.0005	0.0005
β_p	0.3396	0.2714	0.46591

Źródło: obliczenia własne.

Portfel A otrzymany został na podstawie modelu (1). Skład takiego portfela to spółki Żywiec i Swarzędz. Inny portfel otrzymane zostały w sytuacji gdy zastosowany został model (6). Jeżeli w okresie poprzednim stopa zwrotu WIGu była ujemna to w portfelu powinny znaleźć się akcje spółek Dębica i Prokom (portfel B), natomiast gdy w poprzednim okresie był wzrost czynnika rynku to powinno inwestować się w akcje Żywca i Swarzędza, jednak taki portfel charakteryzuje wyższe ryzyko niż portfel A. Mimo, iż spółka TPSA w obu reżimach miała dodatnią stopę zwrotu to nie znalazła w portfelu.

Przedstawiony powyżej przykład pokazuje, że zastosowanie modelu progowego daje możliwość odpowiedniego doboru akcji spółek do w zależności od tego co było w okresie poprzednim. Wskazuje to na istnienie niesymetryczności zachowań na rynku kapitałowym.

Literatura

- Jajuga, K., Jajuga, T., (1997), *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Jeziorska-Papka, M., Osińska, M., Witkowski, M. (2004), Forecasting returns using threshold models. Paper presented at the International Conference *Forecasting Financial Time Series and Decision Making*, Łódź, Poland 6–8 May 2004.
- Markowitz, H.M., (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*.
- Tong, H. (1990), *Non-linear time series*, Oxford Science Publications, New York.
- Tarczyński, W. (1996), *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, Agencja Wydawnicza „PLACET”, Warszawa.
- Witkowski, M., (1999), Estymacja modeli nieliniowych SETAR z zastosowaniem do badania koniunktury gospodarki polskiej, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, 7–9 września 1999.