DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Monika Kośko
Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii TWP w Olsztynie

Zastosowanie przełącznikowych modeli Markowa w analizie stóp zwrotu cen akcji

1. Wprowadzenie

Cechą charakterystyczną szeregów stóp zwrotów rynków finansowych jest występowanie zgrupowań zmienności dla podokresów o wyższej i niższej aktywności. Badania empiryczne wielokrotnie potwierdzają, występowanie pewnej struktury dzielącej okres na podokresy o różnych parametrach. Sposobem na opisanie tych zależności może być model zawierający jednoczesne przełączenia badanej zmiennej i estymowanych parametrów w podokresach. Własność tę posiadają przełącznikowe modele Markowa *MS*, w których zarówno zamienna jak i parametry opisują dynamikę procesu między stanami. Po raz pierwszy dynamiczny model ekonometryczny z przełączeniem typu Markowa wprowadził J. Hamilton (1989, 1994), jako narzędzie opisujące wewnętrzną strukturę przejścia między stanami procesu cyklu gospodarczego. W swojej pracy Hamilton rozważył łańcuch o dwóch stanach, odpowiednio dla ekspansji i recesji, przy czym specyfikacji podlega średnia zwrotów. Kontynuacją były prace Clements'a i Krolzig'a (2000), następnie modele z przełączeniem w wariancji lub w średniej i wariancji jednocześnie (Turner, Startz, Nelson 1989, Yin 2003), przełącznikowe modele typu VAR (Linne 2000, Krolzig 2001) oraz przełącznikowe modele ARCH–SWARCH (Hamilton, Susmel 1993).

W pracy Yin'a (1993) wykorzystano miesięczne stopy zwrotu indeksu S&P50 (1970.02−2003.01). Badany okres podzielono na 4 podokresy i dla każdego z okresów oszacowano model z jednoczesnym przełączeniem w średniej i wariancji. Uzyskane wyniki wskazują na występowanie dwóch stanów o skrajnie różnych wartościach średniej i wariancji. „Dobry" stan odznacza się 4.5 razy wyższą średnią oraz 2 razy niższą wariancją w porównaniu do „złego" stanu. Stan „dobry" okazał się trwały ($p_{11} = 0.9999$) natomiast stan „zły" przejściowy ($p_{22} = 0.0004$), co tłumaczy się powracaniem szybkim procesu do reżimu o „dobrych" parametrach. Wnioski płynące z pracy można odnieść do wcześniejszych badań dotyczących asymetrii w zmienności procesów rynku kapitałowego, mianowicie gwałtownemu wzrostowi zmienności towarzyszą często duże ujemne wartości stóp zwrotu, co z kolei jest przeciwne intuicyjnemu stwierdzeniu, że wyższemu ryzyku odpowiadają wysokie stopy zwrotu.

Artykuł Linne'a (2003) miał na celu zbadanie "efektu zarażenia" na wschodzących rynkach wschodniej Europy pod wpływek wyróżnionych kryzysów: Czechy '97, Azja '97 i Rosja '98. Do badania wykorzystano tygodniowe stopy zwrotu (1997.03−2000.03) głównych indeksów giełdowych tj. Czech, Estonii, Węgier, Polski, Rosji, Słowacji, Słoweni. Zbudowano wektorowo-autoregresyjny przełącznikowy model Markowa *MS(2)-VAR(1)*, którego współczynniki autoregresji dodatkowo określają wpływ kryzysowych zmian na poszczególne rynki. W modelach zastosowano przełączenie w średniej, w wariancji oraz w średniej i wariancji jednocześnie. Rynek objęty efektem odznacza się zwiększoną aktywnością handlową, wyższą zmiennością oraz spadkiem cen akcji. Artykuł jest próbą odpowiedzi na pytanie: czy przełączeniom w reżimach odpowiada okres kryzysu oraz czy zachowanie stóp zwrotu jest wtedy podobne? Wyniki pokazały występowanie stanu „spokoju" o niskiej zmienności i dodatniej średniej oraz stanu „kryzysu" o wysokiej zmienności i ujemnej średniej. Prawdopodobieństwa pozostania w obu stanach są wysokie, a okresy wysokiego prawdopodobieństwa dla stanu „kryzysowego" odpowiadają rzeczywistym badanym kryzysom (najwyraźniej jest to widoczne dla modelu *MSMV(2)−VAR(1)*. Wnioski pozwalają na stwierdzenie, że wykorzystany model jest zdolny do wykrycia zmienności stóp zwrotu wspólnej dla wszystkich rynków, tym samym dostarcza wyjaśnienia dla grupowania się zmienności cen akcji. W pracy zbadano efekt ARCH wykorzystując test F zastosowany przez Garcia, Pierre (1996), wyniki nie pozwalają na odrzucenie hipotezy zerowej o braku efektu ARCH w przypadku pięciu na siedem szeregów stóp zwrotu. Celem poniżej pracy jest przedstawienie autoregresyjnego modelu przełącznikowego *MS* z różnym rodzajem przełączeń dla danych tygodniowych i dziennych, porównanie ich własności z modelem *ARMA(p,q)* oraz zbadanie efektu ARCH.

2. Budowa modelu i estymacja modelu

Cechą przełącznikowego modelu Markowa jest możliwość przełączania się wybranych parametrów procesu między reżimami (stanami) zgodnie z procesem Markowa. W takim procesie stan teraźniejszy badanej zmiennej jest zależny jedynie od stanu poprzedniego, co można zapisać jako:

$$P(s_t = j / s_0 = i_0, s_1 = i_i, \ldots, s_{t-1} = i) = P(s_t = j / s_{t-1} = i) = p_{ij}(t) \quad (1)$$

(powyższy zapis oznacza, że prawdopodobieństwo procesu w chwili t zależy jedynie od stanu procesu w chwili t-1 i nazywane jest prawdopodobieństwem przejścia łańcucha ze stanu i do stanu j). Estymowany model ma postać:

$$(r_t - \mu_{st}) = \gamma\left(r_{t-1} - \mu_{s(t-1)}\right) + e_t, \qquad e_t \sim N\left(0, \sigma_{st}^2\right) \quad (2)$$

gdzie przełączeniu między dwoma stanami (s_t) podlega średnia bądź wariancja resztowa, co można przedstawić jako:

$$\mu_{st}, \sigma_{st}^2 = \begin{cases} s_t = 1, \\ s_t = 2 \end{cases}. \quad (3)$$

Prawdopodobieństwa przejścia między dwoma stanami łańcucha mają postać:

$$P(s_t = 1 / s_{t-1} = 1) = p_{11}$$

$$P(s_t = 2 / s_{t-1} = 2) = p_{22}$$

i tworzą macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Estymacji w modelach podlegają parametry tj. średnia (μ), wariancja resztowa (σ_e^2), parametr przy zmiennej opóźnionej (γ) oraz wartości prawdopodobieństw przejścia poszczególnych stanów (p_{11}, p_{22}), tworzą one wektor estymowanych parametrów (θ) dla następujących modeli:

– z przełączeniem w średniej *MSM(2):* $\theta = [\mu_1, \mu_2, \sigma_e^2, \gamma, p_{11}, p_{22}]$,

– z przełączeniem w wariancji *MSV(2)*: $\theta = [\mu_0, \sigma_{e1}^2, \sigma_{e2}^2, \gamma, p_{11}, p_{22}]$,

– z przełączeniem w średniej i w wariancji jednocześnie *MSMV(2)*: $\theta = [\mu_1, \mu_2, \sigma_{e1}^2, \sigma_{e2}^2, \gamma, p_{11}, p_{22}]$.

Estymacja modelu przełącznikowego polega znalezieniu ocen parametrów wektora θ przy maksymalizacji funkcji wiarygodności[1]:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{T} ln\, f(r_t / \psi_{t-1}) \quad (5)$$

przy warunkach pobocznych: $\sum p_i = 1,\ p_i \geq 0$

[1] Por. Kim, Nelson (1999), s. 60.

gdzie:

$$f(r_t/\psi_{t-1}) = \sum_{st=1}^{2} \sum_{s(t-1)=1}^{2} f(r_t, s_t, s_{t-1}/\psi_{t-1}), \tag{6}$$

$$f(r_t, s_t, s_{t-1}/\psi_{t-1}) = f(r_t/s_t, s_{t-1}, \psi_{t-1}) \cdot P(s_t, s_{t-1}/\psi_{t-1}), \tag{7}$$

ψ_{t-1} są obserwacjami na wektorach do momentu *t-1*,

$$\theta = [\mu_i, \sigma_{ei}^2, p_i]. \tag{8}$$

Aby rozpocząć iterację zakłada się wartości początkowe prawdopodobieństw:

$$\pi_1 = P(s_0 = 1/\psi_0) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \tag{9}$$

$$\pi_2 = P(s_0 = 2/\psi_0) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}. \tag{10}$$

Średni czas powrotu procesu do i-tego stanu:

$$m(i) = \frac{1}{p_{ii}}. \tag{11}$$

Oczekiwany dalszy czas trwania procesu w i-tym stanie:

$$d(i) = \frac{1}{1 - p_{ii}}. \tag{12}$$

3. Wyniki estymacji modelu MS dla szeregów WIG i PROKOM

Do badania wykorzystane obserwacje tygodniowe oraz dzienne (2000.11.17 −2005.03.11) indeksu WIG oraz spółek Prokom, TPSA i Comarch._Modele przełącznikowe *MSM(2)*, *MSV(2)*, *MSMV(2)* dla danych tygodniowych i dziennych porównano z modelem *ARMA(p,q)*, a następnie zbadano efekt ARCH w procesie resztowym modelu przełącznikowego, wykorzystując test *Engle'a*[2]. Ponad to wykorzystano kryterium informacyjne *Akaike'a* oraz logarytm funkcji wiarygodności. Wyniki estymacji wybranych szeregów (WIG i Prokom) umieszczono w tabelach 1−4. Biorąc pod uwagę kryteria porównawcze *AIC* i *LL*, wyniki uzyskane z modeli *MSV(2)* i *MSMV(2)* nieznacznie się od siebie różnią z przewagą modelu *MSV(2)*, i są one lepsze zarówno od modeli *MSM(2)* jak i *ARMA(p,q)*. Natomiast współczynnik R^2 okazała się wyższy dla modelu ARMA(p,q) w większości szeregów.

[2] Por. Engle (1982).

Szeregi tygodniowe (tabela $1-2$): Dla szeregów WIG i Prokom modele *MSV(2)* i *MSMV(2)* zidentyfikowały stany o niskiej i wysokiej aktywności, oba mają charakter zachowawczy, tj. prawdopodobieństwo pozostania procesu w stanie jest wysokie, dla indeksu WIG w 1 stanie: $p_{11}(MSV) = 0.94$, $p_{11}(MSMV) = 0.90$ i w 2 stanie: $p_{22}(MSV) = 0.97$, $p_{22}(MSMV) = 0.91$. Stan 1 o niższym odchyleniu standardowym jest stanem niskiej aktywności, średni czas trwania systemu w tym stanie dla obu modeli wynosi odpowiednio 15 i 10 tygodni, w 2 stanie o wysokiej aktywności proces pozostaje średnio 35 i 11 tygodni (odpowiednio *MSV* i *MSMV*), system zmienia stan średnio co 1 tydzień. Model *MSMV(2)* pozwala również na oszacowanie średnich w reżimach, niższa średnia odpowiada stanowi o wyższej aktywności jednak obie średnie okazały się nieistotne. Prawdopodobieństwa pozostania procesu dla spółki Prokom w stanie 1 wynoszą: $p_{11}(MSV) = 1.00$, $p_{11}(MSMV) = 1.00$, jest to stan o niskiej aktywności (dla *MSMV* o zerowej średniej) i długim okresem trwania systemu wynoszącym odpowiednio dla obu modeli 1469930 i 1204340 tygodni, w 2 stanie o wysokiej aktywności proces pozostaje średnio 60 tygodni (dla obu modeli). Efekt ARCH w szeregach tygodniowych modeli przełącznikowych okazał się nieistotny.

Tabela 1. Wyniki estymacji dla danych tygodniowych indeksu WIG

Parametry		***MSM(2)***		***MSV(2)***		***MSMV(2)***	
μ_1		-0.0018 (0.0031)		0.000583* (0.000321)		0.000903* (0.000464)	
μ_2		0.0027 (0.0042)		–		0.000255 (0.000534)	
γ_1		0.0570* (0.0490)		0.06264 (0.0626)		0.06195* (0.03061)	
σ_{e1}		0.011543		0.00779		0.007795	
σ_{e2}		–		0.01329		0.01329	
p_{11}	p_{21}	0.7539	0.2461	0.9886	0.0114	0.9887	0.0113
p_{21}	p_{22}	0.2403	0.7597	0.0059	0.9941	0.0058	0.9942
m(1)	*m(2)*	1.33	1.32	1.01	1.01	1.01	1.01
d(1)	*d(2)*	4.06	4.17	87.54	169.92	88.51	171.28
AIC		-6533.75		-6611.8		-6610.57	
LL		3272.93		3311.95		3312.36	
R^2		–		0.00450		0.00460	
TR^2		–		65.94		65.11	
ARMA(1,0)							
μ_0	γ_1	β_1	*AIC*	*LL*	R^2		
0.000436 (0.000358)	0.074599* (0.028731)	–	-6539.71	3272.85	0.00556		

Źródło: obliczenia własne w programie Ox[3], w nawiasach podano średnie błędy szacunku, (*) oznacza istotność.

[3] www.doornik.com.

Tabela 2. Wyniki estymacji dla danych tygodniowych spółki Prokom

Parametry		***MSM(2)***		***MSV(2)***		***MSMV(2)***	
μ_1		-0.0072 (0.0353)		-0.00025 (0.00296)		0.0000 (0.0041)	
μ_2		0.0055 (0.0318)		–		-0.0031 (0.0117)	
γ_1		0.2253* (0.073)		0.23600* (0.066395)		0.2352* (0.0665)	
σ_{e1}		0.048352		0.039134		0.03914	
σ_{e2}		–		0.067796		0.06778	
p_{11}	p_{21}	0.7458	0,2542	1.00	0.00	1.00	0.00
p_{21}	p_{22}	0.2536	0,7464	0.01677	0.9832	0.01678	0.9832
m(1)	*m(2)*	1.34	1,34	1.00	1.02	1.00	1.02
d(1)	*d(2)*	3.93	3,94	1469930.00	59.64	1204340.00	59.59
AIC		-673.57		-695.923		-693.82	
LL		343.08		354.26		354.28	
R^2		–		0.05583		0.05662	
TR^2		–		6.07		6.00	

ARMA(1,0)					
μ_0	γ_1	β_1	*AIC*	*LL*	R^2
-0.000381 (0.003356)	0.231598* (0.065373)	–	-677.18	341.59	0.05518

Źródło: obliczenia własne w programie Ox, w nawiasach podano średnie błędy szacunku, (*) oznacza istotność.

Szeregi dzienne (tabela 3−4): W przypadku obu szeregów występują dwa stany o niskiej i wysokiej aktywności, różnice między odchyleniami standardowymi są większe niż w szeregach tygodniowych, oba stany mają charakter zachowawczy, dla indeksu WIG w 1 stanie: $p_{11}(MSV) = 0.99$, $p_{11}(MSMV) = 0.99$ i w 2 stanie $p_{22}(MSV) = 0.99$, $p_{22}(MSMV) = 0.99$, w stanie 1 o niższej aktywności proces pozostaje średnio 88 dni (dla obu modeli), w 2 stanie o wyższej aktywności około 170 dni co pokrywa się z wynikiem uzyskanym dla szeregów tygodniowych. Dla spółki Prokom prawdopodobieństwa pozostawania w stanie 1 wynoszą: $p_{11}(MSV) = 0.98$, $p_{11}(MSMV) = 0.97$, średnie czasy trwania procesu w obu stanach są zbliżone, stan o niskiej około 37−39 dni, natomiast stan o wysokiej aktywności 46−47 dni. Efekt ARCH w modelach przełącznikowych dla danych dziennych jest istotny. Wyniki szacunków uzyskane dla modeli z przełączeniem w wariancji *MSV(2)* oraz z przełączeniem jednocześnie w średniej i wariancji *MSMV(2)* są podobne. Fakt, że przełączenie w średniej nie zwiększa efektywności modelu, a kryteria porównawcze są nieznacznie lepsze w przypadku *MSV(2)* wskazuje na wybór modelu z przełączeniem w wariancji.

Tabela 3. Wyniki estymacji dla danych dziennych indeksu WIG

Parametry		***MSM(2)***		***MSV(2)***		***MSMV(2)***	
μ_1		-0.0018 (0.0031)		0.000583* (0.000321)		0.000903* (0.000464)	
μ_2		0.0027 (0.0042)		–		0.000255 (0.000534)	
γ_1		0.0570* (0.0490)		0.06264 (0.0626)		0.06195* (0.03061)	
σ_{e1}		0.011543		0.00779		0.007795	
σ_{e2}		–		0.01329		0.01329	
p_{11}	p_{21}	0.7539	0,2461	0.9886	0.0114	0.9887	0.0113
p_{21}	p_{22}	0.2403	0,7597	0.0059	0.9941	0.0058	0.9942
m(1)	*m(2)*	1.33	1,32	1.01	1.01	1.01	1.01
d(1)	*d(2)*	4.06	4,17	87.54	169.92	88.51	171.28
AIC		-6533.75		-6611.8		-6610.57	
LL		3272.93		3311.95		3312.36	
R^2		–		0.00450		0.00460	
TR^2		–		65.94		65.11	

ARMA(1,0)					
μ_0	γ_1	β_1	*AIC*	*LL*	R^2
0.000436 (0.000358)	0.074599* (0.028731)	–	-6539.71	3272.85	0.00556

Źródło: obliczenia własne w programie Ox, w nawiasach podano średnie błędy szacunku, (*) oznacza istotność.

Tabela 4. Wyniki estymacji dla danych dziennych spółki Prokom

Parametry		***MSM(2)***		***MSV(2)***		***MSMV(2)***	
μ_1		-0.0039 (0.0077)		0.00008 (0.00066)		-0.0012* (0.0016)	
μ_2		0.0028 (0.0044)		–		0.0005 (0.0008)	
γ_1		0.0851 (0.0351)		0.07229* (0.03131)		0.0713* (0.0314)	
σ_{e1}		0.02504		0.01714		0.03221	
σ_{e2}		–		0.03228		0.01714	
p_{11}	p_{21}	0.7079	0.2921	0.9781	0.0219	0.9743	0.0257
p_{21}	p_{22}	0.2533	0.7467	0.0268	0.9732	0.0211	0.9789
m(1)	*m(2)*	1.41	1.34	1.02	1.03	1.03	1.02
d(1)	*d(2)*	3.42	3.95	45.67	37.36	38.89	47.33
AIC		-4878.75		-5000.54		-4999.32	
LL		2445.43		2506.33		2506.73	
R^2		–		0.00542		0.00638	
TR^2		–		98.35		97.90	

ARMA(1,0)					
μ_0	γ_1	β_1	*AIC*	*LL*	R^2
-0.0002681 (0.000768)	0.091498* (0.023405)	–	-4884.92	2445.46	0.00837

Źródło: obliczenia własne w programie Ox, w nawiasach podano średnie błędy szacunku, (*) oznacza istotność.

4. Podsumowanie

Celem pracy było przedstawienie zastosowania modeli przełącznikowych w analizie stóp zwrotu cen akcji, zbadanie własności *MS* oraz porównanie ich z modelem *ARMA(p,q)*, jednym z najbardziej popularnych modeli opisujących zmienność finansowych szeregów czasowych. Wyniki badania wskazują na wybór modelu z przełączeniem w wariancji, zarówno dla danych tygodniowych jak i dziennych. Wszystkie stany mają charakter zachowawczy co jest dowodem na występowanie w szeregach stóp zwrotu pewnej struktury o różnych parametrach (różnej wariancji resztowej) i uzależnionej od zmian tego szeregu. Brak efektu ARCH dla danych tygodniowych świadczy o lepszych własnościach modeli *MS* budowanych na danych o mniejszej częstotliwości, w których efekt ARCH jest słabszy. W modelach *MS* dla danych dziennych efekt ARCH pozostaje. Stwierdza się, że *MS* nie opisują zmienności wariancji warunkowej w szeregach dziennych, co może być wskazówką do dalszych badań idących w kierunku budowy przełącznikowego modelu ARCH.

Literatura

Brzeszczyński, J., Kalm R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG-Press, Warszawa.

Engle, R.F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, vol. 50.

Garcia, R., Pierre, P. (1996), An Analysis of the Real Interest Rate under Regime Shift, *Review of Economics and Statistics,* vol. 78.

Hamilton, J.D. (1989), W New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Busines Cycle, *Econometrica* ,vol. 57.

Kim, C. J., Nelson, C.R. (1999), *State-Space Models with Regime Switching*, The MIT Press, London.

Koskinen, L., Pukkila, T. (1995), An Application of the Vector Autoregressive Model with a Markov Regime to Inflation Rates, *źródła internetowe*.

Krolzig, H.M. (1998*), Econometric Modelling of Markov_Switching Vector Autoregressions using MSVAR for Ox*, Institute for Economics and Statistics, Oxford.

Linne, T. (2002), A Markov Switching Model of Stock Returns: An Application to the Emerging Markets in Central and Eastern Europe, *East European Transition and EU Englargement A Quantitative Approach*, Berlin.

Podgórska M. (2002), *Łańcuch Markowa w teorii i zastosowaniach,* SGH, Warszawa.

Stawicki, J. (2004), *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynków kapitałowych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.

Yin, P. (2003), Markov Switching in the Stock Market, *Economics,* vol. 413, www.missouri.edu/~econprm/ec413f02/pyin.