DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Piotr Fiszeder
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Modelowanie procesów finansowych z długą pamięcią w średniej i wariancji

1. Wprowadzenie

Długa pamięć jest typowa dla procesów klimatyczno-przyrodniczych (patrz np. Hurst, 1951, Kwiatkowski i Osiewalski, 2002). Wyniki badań dotyczące procesów finansowych nie są już tak jednoznaczne. Długookresowe zależności mogą dotyczyć zarówno warunkowej wartości oczekiwanej, jak i warunkowej wariancji szeregów czasowych. W większości prac bada się tylko jedną z tych zależności pomijając drugą, tymczasem wiadomo, że pominiecie efektu ARCH obniża efektywność estymatorów parametrów w równaniu dla średniej. Efekt ARCH wpływa również na wielkość średnich błędów szacunku. Z kolei błędna identyfikacja równania dla średniej może wpłynąć na wyniki testowania dotyczące warunkowej heteroskedastyczności (patrz Lumsdaine i Ng, 1999). W niniejszym artykule modeluje się zarówno długą pamięć stóp zwrotu, jak i zmienności.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej zaprezentowano modele ARFIMA i FIGARCH, które pozwalają opisać długoterminową zależność danych. W części trzeciej modelowano wybrane szeregi finansowe. Artykuł kończy podsumowanie.

2. Modele ARFIMA-FIGARCH

Pojęcie pamięci procesu nie jest jednoznacznie rozumiane w literaturze. W artykule pod pojęciem procesów z długą pamięcią rozumie się procesy, których funkcja autokorelacyjna $\rho(k)$ wygasa w tempie hiperbolicznym, a szereg

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\rho(k)|$ jest rozbieżny. Rozważane są dwa procesy z długą pamięcią – proces ARFIMA (patrz Granger i Joyeux, 1980) i proces FIGARCH (Baillie, Bollerslev i Mikkelsen, 1996). Model ARFIMA stanowiący uogólnienie modelu ARIMA pozwala opisać długookresowe zależności między poszczególnymi obserwacjami tworzącymi szereg czasowy. Model FIGARCH będący uogólnieniem modelu GARCH pozwala opisać długoterminowe zależności między kwadratami poszczególnych obserwacji. Model ARFIMA opisuje warunkową wartość oczekiwaną, natomiast model FIGARCH warunkową wariancję. Zatem proces FIGARCH jest procesem z długą pamięcią, ale dotyczącą wyłącznie zmienności.

Model ARFIMA (P, D, Q) można przedstawić w postaci:

$$\varphi(L)(1-L)^{D}(y_t-\mu_t)=\vartheta(L)\varepsilon_t, \tag{1}$$

gdzie $\varphi(L)=1-\sum_{j=1}^{P}\varphi_j L^j$, $\vartheta(L)=1+\sum_{j=1}^{Q}\vartheta_j L^j$, L oznacza operator przesunięcia ($L^s\varepsilon_t=\varepsilon_{t-s}$), $-1<D<0.5$, ε_t jest białym szumem. Ułamkowy operator różnicowania $(1-L)^D$ zdefiniowany jest następująco:

$$(1-L)^D=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{D}{k}(-L)^k. \tag{2}$$

Proces spełniający równanie (1) jest stacjonarny, gdy $D<0{,}5$ oraz wszystkie pierwiastki równania $\varphi(L)=0$ leżą poza kołem jednostkowym, natomiast jest odwracalny, gdy $D>-1$ oraz wszystkie pierwiastki równania $\vartheta(L)=0$ leżą poza kołem jednostkowym. Jeżeli $D\in(0;\,0{,}5)$, to proces ARFIMA określany jest jako proces z długą pamięcią (patrz Kwiatkowski i Osiewalski, 2002). Funkcja autokorelacyjna $\rho(k)$ maleje bardzo powoli do zera zgodnie z funkcją hiperboliczną i szereg $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\rho(k)|$ jest rozbieżny. W przypadku, gdy $D=0$ proces (1) jest procesem ARMA (P,Q), a funkcja autokorelacyjna zmierza do zera w postępie geometrycznym (zgodnie z funkcją wykładniczą), czyli bardzo szybko. Proces ARMA jest procesem z krótką pamięcią. Jeżeli $D\in(-0{,}5;\,0)$, proces ARFIMA określa się jako proces ze średnią pamięcią.

Model FIGARCH (p,d,q) można przedstawić w następującej formie:

$$\varepsilon_t|\psi_{t-1}\sim D(0,h_t), \tag{3}$$

$$\phi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2=\alpha_0+[1-\beta(L)]v_t, \tag{4}$$

gdzie ψ_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w okresie $t-1$, $D(0,h_t)$ określoną postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji h_t, $\phi(L)=1-\sum_{j=1}^{q}\phi_j L^j$, $\beta(L)=\sum_{j=1}^{p}\beta_j L^j$, $\nu_t=\varepsilon_t^2-h_t$, $0<d<1$ oraz wszystkie pierwiastki równania $\phi(L)=0$ leżą poza kołem jednostkowym.

Proces FIGARCH jest niestacjonarny w szerszym sensie, ponieważ nie istnieje wariancja bezwarunkowa ε_t (patrz Baillie, Bollerslev i Mikkelsen, 1996), jednakże jest procesem stacjonarnym w węższym sensie (ściśle stacjonarnym). Trudno jest ustalić warunki istnienia dodatniej wariancji warunkowej w ogólnym modelu FIGARCH (p,d,q), jednakże możliwe jest ustalenie restrykcji w przypadku modeli o niskich rzędach p i q. Na przykład dla modelu FIGARCH $(1,d,1)$ następujące warunki:

$$\beta_1-d\le\phi_1\le(2-d)/3, \quad d\left[\phi_1-(1-d)/2\right]\le\beta_1(\phi_1-\beta_1+d), \tag{5}$$

zapewniają dodatniość warunkowej wariancji.

Chung (1999) podaje inne warunki również zapewniające istnienie dodatniej wariancji warunkowej:

$$0\le\phi_1\le\beta_1\le d<1. \tag{6}$$

Żaden ze zbiorów dopuszczalnych wartości parametrów wynikających z restrykcji (5) i (6) nie zawiera się w drugim. Warunki (5) i (6) są wystarczające, ale nie konieczne, aby wariancja warunkowa była dodatnia.

Chung (1999) zwraca uwagę, że parametr α_0 w równaniu (4) jest równy zeru i pokazuje na podstawie symulacji[1], że przyjęcie postaci (4) może powodować obciążenie innych parametrów w modelu. Proponuje on alternatywną postać modelu FIGARCH (p,d,q):

$$\phi(L)(1-L)^d\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right)=[1-\beta(L)]\nu_t, \tag{7}$$

dla której niestety problem estymacji modelu nie jest do końca rozwiązany, ponieważ występuje znaczne obciążenie parametru σ^2.

Jeżeli $d=0$, to proces (4) jest procesem GARCH, natomiast dla $d=1$ procesem IGARCH. Jednakże model FIGARCH $(p,0,q)$ nie zawsze redukuje się do modelu GARCH (p,q). Jeżeli proces GARCH jest stacjonarny w szerszym sensie, to wpływ bieżącej zmienności[2] na jej prognozowane wartości maleje do zera w tempie wykładniczym. W przypadku procesu IGARCH obecna zmien-

---

[1] Autor przyjmuje nierealistyczne w przypadku stóp zwrotu założenie, że $\alpha_0 = 1$.

[2] Często, zamiast o wpływie bieżącej zmienności, mówi się również o wpływie zjawisk szokowych na prognozy zmienności.

ność ma nieskończony wpływ na prognozę wariancji warunkowej. Dla procesu FIGARCH wpływ ten maleje do zera znacznie wolniej, niż w przypadku procesu GARCH, tzn. zgodnie z funkcją hiperboliczną. Należy jednakże odróżnić wpływ bieżącej zmienności na prognozy zmienności od wpływu na rzeczywistą zmienność procesu (patrz Ding i Granger, 1996). Mianowicie funkcja autokorelacyjna dla ε_t^2 dla procesów GARCH i IGARCH wygasa w tempie wykładniczym, natomiast dla procesu FIGARCH wygasa w tempie hiperbolicznym. Zatem w przypadku, gdy $0 < d < 1$, to proces (4) ma długą pamięć w zmienności. Natomiast pomimo tego, że wpływ bieżącej zmienności na prognozy wariancji warunkowej jest dla procesu IGARCH nieskończony, to proces ten jest procesem z krótką pamięcią w znaczeniu rozumianym w niniejszym artykule.

3. Analiza wybranych procesów finansowych

Badaniu poddano następujące procesy finansowe: indeksy rynku akcji na GPW w Warszawie – MIDWIG, TechWIG, WIG, WIG20, WIRR, indeksy rynku akcji na świecie – DJIA, Nasdaq Composite, S&P 500 (Nowy Jork), DAX (Frankfurt), BUX (Budapeszt), kursy walut – USD/PLN, EUR/PLN, EUR/USD, surowce naturalne – złoto, ropa naftowa, miedź. Dla indeksów rynku akcji na GPW w Warszawie analizowano dzienne obserwacje od momentu, kiedy notowania odbywały się pięć razy w tygodniu (3 październik 1994 r.) lub od momentu wprowadzenia danego indeksu na GPW w Warszawie do 28 lutego 2005 r. Aby zachować zbliżoną liczebność próby taki sam okres przyjęto przy badaniu indeksów rynku akcji na świecie oraz surowców naturalnych. Na dynamikę kursów wymiany złotego znaczący wpływ miał obowiązujący w okresie ich notowania system kursu walutowego (patrz Doman i Doman, 2004), dlatego dla kursu USD/PLN badano dwa szeregi. Pierwszy obejmował dane od momentu częściowego uwolnienia kursu złotego (16 maj 1995 r.), drugi od momentu całkowitego uwolnienia kursu złotego (12 kwiecień 2000 r.) do 28 lutego 2005 r. Kursy EUR/PLN i EUR/USD badane były w okresie od 12 kwietnia 2000 r. do 28 lutego 2005r. Część spośród analizowanych instrumentów finansowych była już przedmiotem podobnych badań (patrz np. Osiewalski i Pipień, 2000, Fiszeder, 2001, Doman i Doman, 2004), jednakże prezentowane w niniejszym artykule wyniki często różnią się od wyników publikowanych w innych pracach.

W pierwszej kolejności dla wszystkich szeregów czasowych przeprowadzono test na pierwiastek jednostkowy Ng-Perrona oraz test stacjonarności KPSS. Otrzymane wyniki zostały zaprezentowane w tabeli 1. Wyniki testu Ng-Perrona wskazują, że wszystkie procesy są procesami zintegrowanymi rzędu pierwszego. Do takiego samego wniosku (z wyjątkiem dwóch szeregów) prowadzą wyniki testu KPSS. Tylko w przypadku indeksu S&P 500 i kursu USD/PLN (1 szereg) hipoteza o stacjonarności pierwszych przyrostów logarytmów badanych zmiennych została odrzucona. Wyniki testów należy jednakże interpretować z dużą ostrożnością, ponieważ we wszystkich szeregach występuje efekt ARCH, a suma ocen parametrów w modelach GARCH jest często bliska jedności.[3] Podjęcie decyzji o stacjonarności procesu w węższym sensie w przypadku procesów IGARCH będzie zawsze błędne, ponieważ wariancja bezwarunkowa takiego procesu nie istnieje.

Na podstawie logarytmicznych stóp zwrotu oszacowano modele ARFIMA-FIGARCH. Jako warunkowy rozkład ε_t w formule (3) przyjęto skośny rozkład t-Studenta (patrz Osiewalski i Pipień, 2000). Dla szeregów stóp zwrotu: MIDWIG, TechWIG, WIRR i BUX otrzymano istotny parametr D $(0 < D < 0.5)$ w modelu ARFIMA, co oznacza, że są one realizacjami procesów z długą pamięcią. W przypadku szeregów stóp zwrotu: MIDWIG, WIG, WIG20, WIRR, BUX, EUR/PLN, EUR/USD parametr d $(0 < d < 1)$ w modelu FIGARCH był istotny, co wskazuje na występowanie długookresowych zależności w wariancji. Parametr asymetrii ξ w warunkowym skośnym rozkładzie t-Studenta był istotny dla następujących szeregów: MIDWIG, WIG20, WIRR, Nasdaq Composite, S&P 500, DAX, USD/PLN (krótszy szereg), EUR/PLN i ropa naftowa. Wyboru różnych specyfikacji modelu (wartości P, Q, p, q, postaci warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej wariancji oraz warunkowego rozkładu ε_t) dokonywano na podstawie kryterium Akaike (AIC) i bayesowskiego kryterium informacyjnego (BIC) z uwzględnieniem wyników odpowiednich testów diagnostycznych. Z uwagi na ograniczoną objętość artykułu w tabeli 2 zaprezentowano oszacowane modele wybrane jedynie na podstawie kryterium Akaike.

Jeżeli wyboru modelu dokonywano na podstawie bayesowskiego kryterium informacyjnego, to struktura modelu okazała się znacznie prostsza, zwłaszcza w przypadku modelu wariancji warunkowej. Oba kryteria wskazywały model ARFIMA jako najlepszy tylko dla dwóch indeksów MIDWIG i WIRR. Modelem najlepiej opisującym wariancję warunkową większości szeregów stóp zwrotu według kryterium BIC okazał się model IGARCH (poza szeregami miedź, EUR/PLN i USD/PLN – krótszy szereg, dla których najlepszym modelem był GARCH i szeregami WIRR i BUX, dla których najlepszy był model FIGARCH, jednakże nie spełniał on restrykcji zapewniających dodatniość wariancji warunkowej). Jeżeli wyboru modelu dokonywano na podstawie kryterium AIC, to najlepszym modelem był najczęściej model FIGARCH, choć w większości przypadków oceny parametrów nie spełniały restrykcji zapewniających dodatniość wariancji. Porównując funkcje autokorelacyjne obliczone dla kwadratów realizacji procesów GARCH, IGARCH i FIGARCH z funkcjami autokorelacyjnymi oszacowanymi dla kwadratów stóp zwrotu badanych szeregów można zauważyć, że modele FIGARCH i GARCH w wielu przypadkach

[3] Na przykład test Dickey-Fullera w takiej sytuacji odrzuca hipotezę zerową znacznie częściej, niż powinien (patrz Kim i Schmidt, 1993).

lepiej opisują zmienność analizowanych szeregów (dla modeli IGARCH wartości funkcji autokorelacyjnej dla pierwszych kilkudziesięciu odstępów są wyraźnie przeszacowane).

4. Zakończenie

W artykule dokonano charakterystyki modeli ARFIMA i FIGARCH. W części empirycznej modelowano wybrane szeregi finansowe. Dla wielu szeregów najlepszym modelem opisującym zmienność był model IGARCH. Wydaje się jednak, że modele wybrane na podstawie bayesowskiego kryterium informacyjnego są zbyt oszczędnie sparametryzowane i w wielu przypadkach opisują zmienność empirycznych stóp zwrotu gorzej niż modele GARCH lub FIGARCH.

Literatura

Baillie, R. T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H. O. (1996), Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3–30.

Chung, C.–F. (1999), Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model, National Taiwan University Working Papers.

Ding, Z., Granger, C. W. J. (1996), Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach, *Journal of Econometrics*, 73, 185–215.

Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, AE w Poznaniu, Poznań.

Fiszeder, P. (2001), Jednorównaniowe modele GARCH – analiza procesów zachodzących na GPW w Warszawie, Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.

Granger, C. W. J., Joyeoux, R. (1980), An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, s. 15–29.

Hurst, H. E. (1951), Long Term Storage Capacity of Reservoirs, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, 116, 770– 799.

Kim, K., Schmidt, P. (1993), Unit Root Tests with Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 59, 287–300.

Kwiatkowski, J., Osiewalski, J. (2002), Modele ARFIMA: podstawowe własności i analiza bayesowska, *Przegląd Statystyczny*, 50, 2, 105–122.

Lumsdaine, R. L., Ng, S. (1999), Testing for ARCH in the Presence of a Possibly Misspecified Conditional Mean, *Journal of Econometrics*, 93, 257–279.

Osiewalski, J., Pipień, M. (2000), GARCH-In-Mean through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates, Materiały konferencji MACROMODELS'99, Absolwent, Łódź.

Tabela 1. Test na pierwiastek jednostkowy oraz test stacjonarności dla wybranych procesów finansowych

Szereg	Test Ng-Perrona								Test KPSS	
	$\ln y_t$				$\Delta \ln y_t$				$\ln y_t$	$\Delta \ln y_t$
	MZ_ρ	MZ_t	MSB	MP_T	MZ_ρ	MZ_t	MSB	MP_T		
Indeksy rynku akcji na GPW w Warszawie										
MIDWIG	-0.61	-0.24	0.39	13.13	-308.48*	-12.41*	0.04*	0.09*	2.60*	0.20
TechWIG	-1.09	-0.69	0.63	20.35	-84.55*	-6.48*	0.08*	0.33*	2.50*	0.28
WIG	0.31	0.17	0.55	22.88	-909.31*	-21.32*	0.02*	0.03*	3.18*	0.07
WIG20	-0.84	-0.39	0.47	15.17	-944.75*	-21.73*	0.02*	0.03*	1.54*	0.07
WIRR	1.01	0.91	0.91	58.69	-120.51*	-7.74*	0.06*	0.24*	1.06*	0.24
Indeksy rynku akcji na świecie										
DJIA	0.55	0.78	1.41	120.33	-594.59*	-17.24*	0.03*	0.04*	4.22*	0.35
Nasdaq C.	0.06	0.06	0.98	54.84	-653.30*	-18.07*	0.03*	0.04*	2.32*	0.30
S&P500	0.45	0.61	1.36	109.00	-449.25*	-14.99*	0.03*	0.06*	3.29*	0.49*
DAX	-0.06	-0.06	0.95	50.28	-773.43*	-19.66*	0.03*	0.03*	2.17*	0.35
BUX	1.08	1.70	1.58	167.20	-1268.7*	-25.18*	0.02*	0.02*	4.12*	0.24
Kursy walut										
USD/PLN 1	-0.20	-0.26	1.29	83.87	-923.14*	-21.48*	0.02*	0.03*	3.47*	1.07*
USD/PLN 2	2.39	0.86	0.36	17.58	-116.29*	-7.60*	0.07*	0.25*	3.16*	0.32
EUR/PLN	-2.69	-1.16	0.43	9.11	-102.17*	-7.13*	0.07*	0.27*	2.71*	0.22
EUR/USD	0.84	0.56	0.66	33.54	-627.14*	-17.71*	0.03*	0.04*	3.94*	0.24
Surowce naturalne										
Złoto	-1.54	-0.85	0.55	15.38	-947.96*	-21.77*	0.02*	0.03*	1.53*	0.44
Ropa (fut.)	-0.38	-0.14	0.37	13.00	-1188.9*	-24.38*	0.02*	0.02*	3.70*	0.12
Miedź (fut.)	-2.37	-1.02	0.43	9.90	-1057.7*	-23.00*	0.02*	0.02*	1.50*	0.39

* oznaczono oceny statystyk, w przypadku których, weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie 0,05.
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Wyniki estymacji modeli w klasie ARFIMA-FIGARCH

Szereg	$\phi_0 \times 10^{-4}$	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	d_1	$\alpha_0 \times 10^{-4}$	α_1 lub φ_1	α_2	β_1	d_2	ν	ξ
MIDWIG	1.1796 (4.7709)	-	-	-	0.1046 (0.0188)	4.9806 (2.8887)	0.1029 (0.0746)	-	0.5800 (0.0947)	0.5911 (0.0651)	9.3522 (2.2249)	-0.0840 (0.0345
TechWIG	2.2738 (4.3247)	0.0903 (0.0282)	-	-	-	0.0124 (0.0090)	0.0732 (0.0137)	-	-	-	11.2753 (3.2175)	-
WIG	5.8458 (4.3244)	-	-	0.1572 (0.0204)	-	0.0257 (0.0119)	0.1018 (0.0154)	-	-	-	7.3670 (1.0141)	-
WIG20	7.7597 (3.4501	0.0698 (0.0200)	-	-	-	0.0614 (0.0181)	0.0970 (0.0127)	-	0.8901 (0.0139)	-	8.2265 (1.3395)	0.0665 (0.0284)
WIRR	-5.6879 (6.3638)	0.0440 (0.0319)	-0.1000 (0.0238)	-	0.1332 (0.0262)	0.0103 (0.0042)	0.1879 (0.0348)	-0.1199 (0.0376)	-	-	7.2820 (0.9252)	-01262 (0.0284)
DJIA	6.3572 (1.7399(	-	-	-	-	0.0098 (0.0034)	0.0665 (0.0094)	-	0.9259 (0.0101)	-	9.6183 (1.5514)	-0.0629 (0.0310)
Nasdaq	10.7963 (2.1535)	-	-	-	-	0.0184 (0.0073)	0.0345 (0.0192)	0.0812 (0.0290)	-	-	13.4195 (2.9514)	-0.1321 (0.0381)
S&P 500	7.6261 (1.6025)	-	-	-	-	0.0058 (0.0023)	0.0329 (00180)	0.0439 (0.0218)	-	-	8.1124 (1.1634)	-0.0650 (0.0300)
DAX	6.6957 (2.1694)	-	-	-	-	0.0158 (0.0065)	0.0004 (0.0161)	0.1135 (0.0230)	-	-	16.5858 (3.9796)	-0.1085 (0.0290)
BUX	10.9156 (2.723)	-	-	0.0673 (0.0326)	-	0.0651 (0.0172)	0.1980 (0.0253)	-01005 (0.0268)	-	-	4.9737 (0.5171)	-
USD/PLN 1	1.6305 (0.9251)	-	-	-	-	0.0123 (0.0028)	0.2493 (0.0382)	-0.1061 (0.0495)	-	-	5.3949 (0.5065)	-
USD/PLN 2	-3.8988 (1.9585)	-	-	-	-	0.0821 (0.0253)	0.1489 (0.0320)		0.6947 (0.0646)	-	10.2065 (3.1741)	0.1101 (0.0426)
EUR/PLN	-1.3877 (1.6334)	-0.1106 (0.0317)	-	-	-	1.0134 (0.4522)	0.2929 (0.1340)	-	0.5739 (0.1529)	0.4352 (0.0825)	6.2186 (1.1227)	0.1145 (0.0439)
EUR/USD	2.8011 (1.6978)	-	-	-0.0598 (0.0260)	-	0.5774 (0.1677)	0.2724 (0.0573)	-	0.6526 (0.0848)	0.3914 (0.0921)	10.7057 (3.5385)	-
Złoto	-1.3035 (0.9528)	-	-	-0.0463 (0.0187)	-	0.0022 (0.0011)	0.0851 (0.0139)	-	0.9148 (0.0088)	-	3.5742 (0.2912)	-
Ropa (fut.)	5.4732 (3.5341)	-	-	-	-	0.0189 (0.0089)	0.0377 (0.0089)	-	-	-	6.361 (0.853)	-0.0596 (0.0277)
Miedź (fut.)	0.5315 (2.3480)	-0.0768 (0.0186)	-	-	-	0.0307 (0.0123)	0.0237 (0.0060)	-	0.9627 (0.0097)	-	5.0453 (0.4949)	-

W nawiasach pod ocenami parametrów podano średnie błędy szacunku, ν i ξ to parametry skośnego rozkładu t-Studenta.
Źródło: obliczenia własne.