DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Jacek Kwiatkowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Bayesowskie testowanie procesów STUR – analiza indeksów i spółek notowanych na GPW[1]

1. Wstęp

Przeprowadzone w ostatnim czasie badania empiryczne dotyczące procesów makroekonomicznych i finansowych wskazują, że procesy te mogą posiadać losowy pierwiastek jednostkowy. Procesy te określane mianem procesów ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym (STUR) ze względu na występujący w nich losowy parametr są częściowo stacjonarne lub niestacjonarne.

Celem prezentowanego artykułu jest przedstawienie w oparciu o wnioskowanie bayesowskie wyników badań dotyczących identyfikacji procesów ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym dla wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. Na gruncie klasycznym, wyniki dotyczące identyfikacji modeli STUR zamieścili w swoich pracach m.in. Leybourne, McCabe i Tremayne (1996), Granger i Swanson (1997), Sollis, Leybourne i Newbold (2000), Kwiatkowski i Osińska (2004), Kwiatkowski (2004). W zakresie wnioskowania bayesowskiego badania empiryczne przeprowadzili Jones i Marriott (1999).

Szerszy opis bayesowskiej analizy procesów (STUR) można znaleźć w artykule Kwiatkowskiego (2005). Jako wcześniejsza pracę z tego zakresu należy wymienić artykuł Jonesa i Marriotta (1999), w którym przedstawiono bayesowską estymację modelu STUR w wersji Grangera i Swansona (1997). W prezentowanym artykule proponuje się natomiast wykorzystanie modelu STUR w wersji Leybourne, McCabe i Tremayne (1996), która zdaniem autora

[1] Praca zrealizowana w ramach projektu badawczego nr 2 H02B 015 25; *e-mail*: *jkwiat@uni.torun.pl*

jest łatwiejsza w stosowaniu i znacznie mniej wymagająca od strony numerycznej.

Układ artykułu jest następujący. Część druga przedstawia model ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym oraz związane z nim wnioskowanie bayesowskie. Część trzecia zawiera badania empiryczne przeprowadzone dla wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. W części czwartej zamieszczone są wnioski.

2. Model i wnioskowanie bayesowskie

Rozważaną reprezentację modelu STUR (*stochastic unit roots process)* można przedstawić następująco:

$$\Delta y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t,$$
$$\beta_t = \alpha + \phi_1(\beta_{t-1} - \alpha) + \ldots + \phi_p(\beta_{t-p} - \alpha) + \eta_t, \tag{1}$$

gdzie y_t oznacza realizację procesu w chwili t. Losowy parametr β_t jest stacjonarnym procesem autoregresyjnym. Procesy ε_t i η_t są białymi szumami odpowiednio z wariancjami σ^2 i ω^2. Dodatkowo zakłada się, że są wzajemnie niezależne. Jeżeli y_t jest procesem błądzenia przypadkowego to wariancja białego szumu ω^2 równa jest zero. Dodatkowo bezwarunkowa wariancja w równaniu (1) ma zdegenerowany rozkład w zerze. Dla $\omega^2 > 0$ (1) jest procesem ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym. Parametr w tym modelu zmienia się w czasie wokół jedynki, zatem jest to proces, który jest częściowo stacjonarny lub niestacjonarny.

Przyjmując, że parametr β_t jest procesem autoregresyjnym rzędu drugiego oraz zakładając, że rozkład obserwacji i nieobserwowanego parametru w modelu STUR jest warunkowym rozkładem normalnym możemy zapisać:

$$\Delta y_t | y_{t-1}, \beta_t, \sigma^2 \sim N(\beta_t y_{t-1}, \sigma^2), \text{ dla } t$$
$$\beta_t | \beta_{t-1}, \beta_{t-2}, \alpha, \phi_1, \phi_2, \omega^2 \sim N\left(\alpha + \sum_{i=1}^{2} \phi_i(\beta_{t-i} - \alpha), \omega^2\right). \tag{2}$$

W szczególnych przypadkach, w których stochastyczny pierwiastek jednostkowy jest procesem autoregresyjnym rzędu pierwszego lub białym szumem wystarczy założyć w (1), że odpowiednie współczynniki autoregresji są równe zero tj. $\phi_i = 0, i = 1,2$. W oparciu o wymienione wyżej założenia gęstość próbkową w modelu STUR można przedstawić następująco:

$$p(\Delta y | y_0, \beta, \theta) = \prod_{t=1}^{T} N\left(\alpha + \sum_{i=1}^{2} \phi_i(\beta_{t-i} - \alpha), \omega^2\right) \times \prod_{t=1}^{T} N(\beta_t y_{t-1}, \sigma^2), \tag{3}$$

gdzie $\theta=\left(\alpha,\phi_1,\phi_2,\omega^2,\sigma^2\right)$, $\alpha\in R$, $\Phi=(\phi_1,\phi_2)'\in C_p$, $\omega^2\in R_+$, $\sigma^2\in R_+$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_T)'\in R^T$; T - oznacza liczbę obserwacji, natomiast C_p - jest obszarem zmienności parametrów, przy których proces autoregresyjny w modelu (1) jest stacjonarny.

Jeżeli przyjmiemy założenie o niezależności parametrów w modelu STUR, to rozkład *a priori* wektora θ jest iloczynem gęstości brzegowych rozkładów jego składowych:

$$p(\theta)=p(\alpha)p(\phi_1)p(\phi_2)p\left(\omega^2\right)p\left(\sigma^2\right). \tag{4}$$

Dla wszystkich parametrów przyjęto standardowe rozkłady właściwe:

$$\begin{aligned}&p(\alpha)=N\left(\mu_\alpha,\sigma_\alpha^2\right),\ p(\phi_1)=N\left(\mu_{\phi_1},\sigma_{\phi_1}^2\right),\ p(\phi_2)=N\left(\mu_{\phi_2},\sigma_{\phi_2}^2\right),\\&p\left(\omega^2\right)=IG(a_2,b_2),\ p\left(\sigma^2\right)=IG(a_1,b_1),\end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ oznacza rozkład normalny o średniej μ i wariancji σ^2 , natomiast $IG(a,b)$ oznacza odwrócony rozkład gamma z parametrami $a>0,\ b>0$ [2]. Ze względu na fakt, że parametr β_t jest częścią modelu, można założyć, że wszystkie zawarte o nim informacje znajdują się w funkcji wiarygodności (Jones i Marriott, 1999; Jostova i Philipov, 2004).

Stąd łączny rozkład *a posteriori* wektora θ będący iloczynem rozkładu *a priori* (5) i próbkowej gęstości (3) ma postać:

$$\begin{aligned}&p(\beta,\theta|\Delta y,y_0)\propto N\left(\mu_\alpha,\sigma_\alpha^2\right)\times N\left(\mu_{\phi_1},\sigma_{\phi_1}^2\right)\times N\left(\mu_{\phi_2},\sigma_{\phi_2}^2\right)\times IG(a_2,b_2)\times IG(a_1,b_1)\\&\times\prod_{t=1}^{T}N\left(\alpha+\sum_{i=1}^{2}\phi_i(\beta_{t-i}-\alpha),\omega^2\right)\times\prod_{t=1}^{T}N\left(\beta_t y_{t-1},\sigma^2\right).\end{aligned} \tag{6}$$

W celu otrzymania brzegowych rozkładów *a posteriori* można zastosować algorytm Gibbsa, który jest jedną z bardziej popularnych metod stosowanych we wnioskowaniu bayesowskim do wyznaczenia próbkowych gęstości brzegowych i ich charakterystyk. Poszczególne rozkłady brzegowe wykorzystywane przy algorytmie Gibbsa dla składowych wektora θ oraz dla losowego parametru β_t znajdują się w pracy Kwiatkowskiego (2005).

Jednym z fundamentalnych zagadnień w analizie szeregów czasowych jest wybór odpowiedniego modelu. Dla modelu STUR w postaci (1) możemy badać rząd autoregresji dla losowego parametru β_t. Dodatkowo można weryfikować czy analizowany proces ma stały, czy też zmienny w czasie pierwiastek jednostkowy. Testowanie modeli odbywa się przez porównanie ich mocy wyja-

[2] Rozkłady prezentowane w artykule można znaleźć m.in. w książce Gelmana,Carlina, Sterna i Rubina (1995).

śniającej. Przyjmując założenie, że dwa modele (M_i i M_j) są *a priori* jednakowo prawdopodobne porównanie mocy wyjaśniającej można dokonać za pomocą czynnika Bayesa, który dany jest wzorem:

$$B_{ij} = \frac{p(z|M_i)}{p(z|M_j)}, \tag{7}$$

gdzie $p(z|M_k)$ $(k = i, j)$ oznacza brzegową gęstość wektora obserwacji w modelu M_k. Czynnik Bayesa większy od jedynki $(B_{ij} > 1)$ oznacza, że model M_i jest bardziej prawdopodobny niż model M_j.

Jednym z podstawowych zagadnień we wnioskowaniu bayesowskim jest obliczenie brzegowej gęstości wektora obserwacji:

$$p(z|M_k) = \int p(\Theta_k|M_k) p(z|\Theta_k, M_k) d\Theta_k, \tag{8}$$

gdzie konkurujące modele reprezentuje zbiór $M = \{M_1, M_2, ...\}$.

Niestety ze względu na złożoność zagadnień bardzo rzadko daje się ją obliczyć analitycznie. W przypadku modeli STUR, gdzie wykorzystywany jest algorytm Gibbsa, który jest częścią metod numerycznych określanych jako metody Monte Carlo wykorzystujące łańcuchy Markowa[3], naturalnym narzędziem do estymacji brzegowej gęstości jest średnia harmoniczna dana wzorem (Newton i Raftery, 1994):

$$p(z|M_k)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p(z|\Theta_k^{(n)}, M_k)^{-1}, \tag{9}$$

gdzie $\Theta_k^{(n)}$ są realizacjami z łańcucha Markowa, natomiast z oznacza wektor obserwacji. Estymator ten (N-R) jest łatwy w użyciu. Wymagana jest tylko znajomość próbkowej gętości $p(y|\Theta_k, M_k)$ oraz realizacji z rozkładu *a posteriori*. Główną wadą tego estymatora jest jego niestabilność, ponieważ nie spełnia on centralnego twierdzenia granicznego (Carlin i Louis, 2000). Z praktycznego punktu widzenia dzieje się tak, ponieważ bardzo małe wartości funkcji wiarygodności w znaczny sposób wywierają wpływają na wielkość średniej harmonicznej. Okazuje się jednak, że dla wielu aplikacji, algorytm N-R jest stabilny, blisko prawdziwej wartości brzegowej gęstości i z powodzeniem może być stosowany dla wielu zastosowań (Osiewalski i Pipień, 2004).

[3] Markow Chain Monte Carlo methods (MCMC).

2. Identyfikacja STUR na GPW

Bayesowskie testowanie modeli przeprowadzono dla wybranych indeksów i spółek notowanych na GPW w Warszawie w okresie od stycznia 2000 do końca kwietnia 2005. W artykule dokonano analizy szeregów tygodniowych, po uprzednim ich zlogarytmowaniu. Badaniu podlegały główne indeksy: WIG, WIG20, MIDWIG i TECHWIG oraz spółki. Ich szczegółowy wykaz znajduje się w tablicy 1. Dla każdego procesu rozważono cztery konkurencyjne i wzajemnie wykluczające się modele. Rozważano możliwość istnienia procesu ze stałym pierwiastkiem jednostkowym, czyli weryfikowano hipotezę, że badane procesy podlegają błądzeniu przypadkowemu (model M_1). Dodatkowo rozważono trzy reprezentacje procesu STUR. Analizowano czy zmienny pierwiastek jednostkowy może być opisany przez proces biało-szumowy (model M_2; STUR;WN), proces autoregresyjny rzędu pierwszego (model M_3; STUR; AR(1)) lub drugiego (model M_4; STUR; AR(2)). Poszczególne modele mają zatem następującą postać:

$$
\begin{aligned}
&M_1 : \Delta y_t = \varepsilon_t ,\\
&M_2 : \Delta y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t ,\\
&\qquad \beta_t = \alpha + \eta_t \ ,\\
&M_3 : \Delta y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t ,\\
&\qquad \beta_t = \alpha + \phi_1(\beta_{t-1} - \alpha) + \eta_t ,\\
&M_4 : \Delta y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t ,\\
&\qquad \beta_t = \alpha + \phi_1(\beta_{t-1} - \alpha) + \phi_2(\beta_{t-2} - \alpha) + \eta_t .
\end{aligned}
$$

Testowanie modeli odbywało się poprzez obliczenie brzegowej gęstości wektora obserwacji za pomocą estymatora Newtona i Raftery'iego (1994).

Gęstość brzegowa dla każdego modelu była obliczona w oparciu o łańcuch Markowa, który składał się z miliona iteracji. Moc wyjaśniającą dla poszczególnych modeli porównywano za pomocą czynnika Bayesa (7).

W celu estymacji i testowania modeli przyjęto rozkład *a priori*, który wyraża stosunkowo niewielką informację wstępną o parametrach:

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &= p(\alpha)p(\phi_1)p(\phi_2)p(\omega^2)p(\sigma^2) =\\
&= N(0,10)N(0,10)N(0,10)IG(0{,}01, 0{,}01)IG(0{,}01, 0{,}01).
\end{aligned}
$$

Ze względu na duże rozpiętości otrzymanych wartości, wyniki logarytmowano. Zlogarytmowane czynniki Bayesa dla poszczególnych modeli obliczone względem modelu błądzenia przypadkowego przedstawia tabela 1. Pogrubioną czcionką zaznaczono modele, które są najbardziej prawdopodobne. W 12 przypadkach na 15 najbardziej prawdopodobny okazał się model błądzenia przypadkowego. Jest to model ze stałym pierwiastkiem jednostkowym. Wszystkie analizowane indeksy są procesami zintegrowanymi rzędu pierwszego. Wśród analizowanych spółek najbardziej preferowany jest również proces błądzenia przypadkowego. Tylko trzy spółki to procesy typu STUR, czyli ze zmiennym pierwiastkiem jednostkowym. Są to Mieszko, Millenium i Optimus. W większości przypadków losowy parametr w procesach STUR nie wykazuje autokorelacji, czyli jest białym szumem.

Tabela 1. Logarytm dziesiętny czynników Bayesa $\log_{10}\left(B_{RWj}\right)$ obliczony względem modelu błądzenia przypadkowego dla wybranych indeksów i spółek

Badane procesy	Błądzenie przypadkowe M_1	STUR;WN M_2	STUR; AR(1) M_3	STUR; AR(2) M_4
WIG	**0.000**	95.175	97.500	98.596
WIG20	**0.000**	55.668	56.711	58.615
MIDWIG	**0.000**	95.434	95.300	98.837
TECHWIG	**0.000**	21.697	22.565	27.301
APATOR	**0.000**	11.127	10.293	10.502
BRE	**0.000**	18.424	18.801	20.659
BZWBK	**0.000**	18.515	19.867	21.538
DEBICA	**0.000**	26.371	25.365	31.421
HANDLOWY	**0.000**	35.224	32.703	33.766
MIESZKO	0.000	-2.098	-1.894	**-2.361**
MILLENIUM	0.000	**-3.047**	-3.002	-2.890
OPTIMUS	0.000	**-12.658**	-12.039	-9.573
PROCHNIK	**0.000**	1.226	1.261	1.625
TPSA	**0.000**	9.426	8.569	9.759
WAWEL	**0.000**	13.542	14.587	15.796

Źródło: Obliczenia własne.

3. Wnioski

W artykule przedstawiono modele ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym STUR. Dodatkowo omówiono bayesowskie testowanie tych modeli. Badania identyfikacji procesów STUR dotyczyły wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. W oparciu o wyniki przeprowadzonych badań można stwierdzić, że większość analizowanych indeksów i spółek wykazuje stały pierwiastek jednostkowy. Tylko kilka z nich, mianowicie Mieszko, Millenium i Optimus to procesy STUR.

Literatura

Box, G.E.P., Jenkins, G.M. (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.

Carlin, B.P., Louis, T.A. (2000), *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, New York, Chapman & Hall/CRC.

Gelman, A., Carlin J., Stern, H., Rubin, D. (1997), *Bayesian Data Analysis*, London, Chapman & Hall.

Granger, C.W.J., Swanson, N.R. (1997), An Introduction to Stochastic Unit–root Process, *Journal of Econometrics*, vol. 80, 35–62.

Jones, C.R., Marriott, J.M. (1999), A Bayesian analysis of stochastic unit root models, *Bayesian Statistics,* vol. 6, 785–794.

Jostova, G., Philipov, A. (2004), Bayesian analysis of stochastic betas, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, w druku.

Newton, M.A., Raftery, A.E. (1994), Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society B,* vol. 56, 3–48.

Kwiatkowski, J. (2004), Maximum likelihood estimation of stochastic unit root models with GARCH disturbances, praca niepublikowana.

Kwiatkowski, J. (2005), A Bayesian analysis of STUR models, praca niepublikowana.

Kwiatkowski, J., Osińska, M. (2004), Forecasting STUR processes. A comparison to threshold and GARCH models, praca niepublikowana.

Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., Mills, T.C. (1996), Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: theory and applications, *Journal of Forecasting*, vol. 15, 253–270.

Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., Tremayne, A.R (1996), Can economic time series be differenced to stationarity? *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 14, 435–446.

Osiewalski, J., Pipień, M. (2004), Bayesian comparison of bivariate ARCH-type models for main exchange rates in Poland, *Journal of Econometrics*, vol. 123, 371–391.

Sollis, R., Leybourne, S.J., Newbold, P. (2000), Stochastic unit roots modelling of stock price indices, *Applied Financial Economics*, vol. 10, 311–315.