

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Ewa Dziawgo*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

### **Analiza wrażliwości modelu wyceny wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji**

#### **1. Wstęp**

Opcje wsteczne należą do klasy opcji egzotycznych uwarunkowanych wartościami ekstremalnymi (ang. extremum-dependent options). Na wartość opcji uwarunkowanych wartościami ekstremalnymi ma wpływ ekstremalna wartość osiągnięta przez cenę instrumentu bazowego w okresie ważności opcji. Nabywca wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji (ang. floating-strike look-back options) ma prawo zakupu instrumentu bazowego po najniższej cenie, którą osiągnął instrument bazowy w okresie życia opcji. Natomiast nabywca wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji ma prawo sprzedaży określonego instrumentu bazowego po najwyższej cenie, którą ten instrument osiągnął w okresie życia opcji.

W artykule przedstawiono zagadnienia związane z opcjami wstecznymi o zmiennej cenie realizacji. Badania empiryczne zawarte w artykule dotyczą wyceny wstecznych opcji kupna o zmiennej cenie realizacji. Na przykładach wstecznych oraz zwykłych opcji walutowych wystawionych na EUR dokonano analizy kształtowania się cen tych opcji oraz zbadano wpływ wybranych czynników na kształtowanie się cen rozpatrywanych opcji.

#### **2. Model wyceny wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji**

Wsteczne opcje kupna o zmiennej cenie realizacji mogą być typu *in-the-money* (wówczas bieżąca cena instrumentu bazowego jest większa od ceny realizacji) lub *at-the-money* (w przypadku, kiedy bieżąca cena instrumentu ba-

zowego równa jest cenie realizacji). Wsteczne opcje o zmiennej cenie realizacji nigdy nie są typu *out-of-the-money*.<sup>1</sup>

W dniu wygaśnięcia funkcja wypłaty wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji jest postaci:

$$\max[0, S_T - m_T^S] = S_T - m_T^S \quad (1)$$

gdzie:

$S_T$  – cena instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji,

$m_T^S$  – najniższa cena instrumentu bazowego w okresie ważności opcji.

W chwili  $t \in [0; T]$  cena opcji wynosi:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} C_t^W &= e^{-r(T-t)} E^Q(S_T - m_T^S | F_t) = e^{-r(T-t)} E^Q(S_T | F_t) - e^{-r(T-t)} E^Q(m_T^S | F_t) \equiv \\ &\equiv e^r E^Q(e^{-rT} S_T | F_t) - e^{-r(T-t)} E^Q\left(\min\left(m_t^S, S_t e^{-M_{T-t}^X}\right)\right) = \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} E^Q\left(\min\left(m_t^S, S_t e^{-M_{T-t}^X}\right)\right) = \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} \left[ E^Q\left(\min\left(m_t^S, S_t e^{-M_{T-t}^X}\right)\right) - m_t^S + m_t^S \right] = \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} \left[ E^Q\left(\left(S_t e^{-M_{T-t}^X} - m_t^S\right) \mathbf{1}_{[M_{T-t}^X \geq z]}\right) \right] - e^{-r(T-t)} m_t^S = \\ &= -e^{-r(T-t)} \left[ -S_t \int_z^\infty e^{-y} Q[M_{T-t}^X \geq y] dy \right] = -e^{-r(T-t)} \left[ -S_t \int_z^\infty e^{-y} Q[X_{T-t} \geq y] dy \right] - \\ &- e^{-r(T-t)} \left[ -S_t \int_z^\infty e^{-2r\sigma^{-2}y} Q[X_{T-t} \geq y + 2\lambda(T-t)] dy \right] = \\ &= -e^{-r(T-t)} \left[ S_t E^Q\left(\left(e^{-X_{T-t}} - e^{-z}\right) \mathbf{1}_{[X_{T-t} \geq z]}\right) \right] - \\ &- e^{-r(T-t)} \left[ \frac{S_t \sigma^2}{2r} E^Q\left(\left(e^{-2r\sigma^{-2}(X_{T-t} - 2\lambda(T-t))} - e^{-2r\sigma^{-2}z}\right) \mathbf{1}_{[X_{T-t} \geq z + 2\lambda(T-t)]}\right) \right] = \\ &= -e^{-r(T-t)} \left[ S_t e^{r(T-t)} E^Q\left(e^{\sigma \tilde{B}_{T-t} - 0,5\sigma^2(T-t)} \mathbf{1}_{[X_{T-t} \geq z]}\right) \right] - m_t^S Q[X_{T-t} \geq z] - \\ &- e^{-r(T-t)} \left[ \frac{S_t \sigma^2}{2r} E^Q\left(e^{-2r\sigma^{-2}(X_{T-t} - 2\lambda(T-t))} \mathbf{1}_{[X_{T-t} \geq z + 2\lambda(T-t)]}\right) \right] + \\ &+ e^{-r(T-t)} \left[ e^{-2r\sigma^{-2}z} \frac{S_t \sigma^2}{2r} Q[X_{T-t} \geq z + 2\lambda(T-t)] \right] = \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Opcja kupna jest *out-of-the-money*, jeśli bieżąca cena instrumentu bazowego jest mniejsza od ceny realizacji.

<sup>2</sup> Por. Goldman, Sosin, Gatto (1979), Musiela, Rutkowski (1998).

$$\begin{aligned}
 &= -S_t P[X_{T-t} \geq z] + e^{-r(T-t)} m_t^S Q[X_{T-t} \geq z] - \frac{S_t \sigma^2}{2r} P[X_{T-t} \geq z + 2\lambda(T-t)] + \\
 &+ e^{-r(T-t)} e^{-2r\sigma^{-2}z} \frac{S_t \sigma^2}{2r} Q[X_{T-t} \geq z + 2\lambda(T-t)] = \\
 &= -S_t N\left(\frac{\ln(m_t^S / S_t) - (r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \\
 &+ e^{-r(T-t)} m_t^S N\left(\frac{\ln(m_t^S / S_t) - (r - 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \\
 &- \frac{S_t \sigma^2}{2r} N\left(\frac{\ln(m_t^S / S_t) - (r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \\
 &+ e^{-r(T-t)} e^{-2r\sigma^{-2}\ln(m_t^S / S_t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} N\left(\frac{\ln(m_t^S / S_t) + (r - 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$C_t^W$  – cena wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,

$\sigma$  – zmienność ceny instrumentu bazowego,

$T$  – czas wygaśnięcia opcji,

$r$  – stopa procentowa wolna od ryzyka,

$m_{t,T}^S \equiv \min_{u \in [t,T]} S_u = S_t e^{-M_{t,T}^X}$ ,  $M_{t,T}^X = \max_{u \in [t,T]} (X_u - X_t)$ ,

$m_T^S = \min(m_t^S, m_{t,T}^S) = \min\left(m_t^S, S_t e^{-M_{t,T}^X}\right)$ ,

$S_u = S_t \exp\left(\sigma(\tilde{B}_u - \tilde{B}_t) + (r - 0,5\sigma^2)(u - t)\right) = S_t e^{-(X_u - X_t)}$ ,

$X_t = -\sigma\tilde{B}_t + \lambda t$ ,  $\lambda = 0,5\sigma^2 - r$ ,  $\tilde{B}_t$  jest standardowym ruchem Browna względem miary  $Q$ ,

Ostatecznie cena opcji wynosi<sup>3</sup>:

$$C_t^W = S_t N(d_1) - S_t \frac{\sigma^2}{2r} N(-d_1) - e^{-r(T-t)} m_t^S \left[ N(d_2) - \frac{\sigma^2}{2r} e^{a_1} N(-d_3) \right] \tag{3}$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right) + (r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

<sup>3</sup> Por. Hull (1989), s. 464.

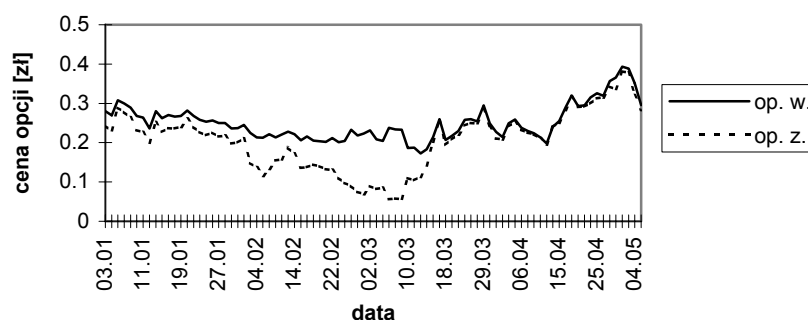
$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right) + (-r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, a_1 = \frac{-2(r - 0,5\sigma^2)\ln\frac{S_t}{m_t^S}}{\sigma^2},$$

$N(d)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego.

### 3. Przykład empiryczny

Badania empiryczne dotyczą wyceny europejskich walutowych opcji kupna. Opcje wystawione są na EUR. Jedną z opcji jest opcją wsteczną o zmiennej cenie realizacji (oz. op. w.). Druga opcja jest opcją zwykłą (oz. op. z.). Opcje są 4-miesięczne. Rozważania dotyczą okresu: 03.01.2005 – 05.05.2005 r.

Na wykresie 1 przedstawiono kształtowanie się cen rozpatrywanych opcji.

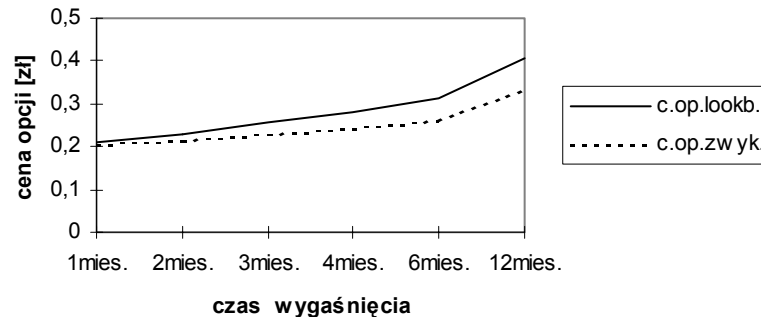


Wykres 1. Kształtowanie się ceny walutowej wstecznej opcji kupna oraz opcji zwykłej, wystawionych na EUR. Rozpatrywany okres: 03.01.2005– 05.05.2005 r.

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen wynika, że wsteczna opcja kupna o zmiennej cenie realizacji jest droższa od opcji zwykłej. Gwałtowny spadek ceny instrumentu bazowego wpłynął na znaczny spadek ceny zwykłej opcji kupna oraz na wzrost ceny wstecznej opcji kupna. Kiedy zbliżał się termin wygaśnięcia zmniejszały się różnice między cenami rozpatrywanych opcji.

Na wykresie 2 przedstawiono wpływ czasu wygaśnięcia na cenę wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji oraz zwykłej opcji kupna.

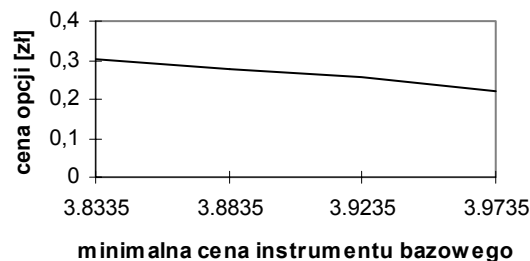


Wykres 2. Wpływ czasu wygaśnięcia opcji na kształtowanie się ceny wstecznej opcji oraz zwykłej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen wynika, że dla każdego terminu wygaśnięcia, ceny wstecznej opcji są większe od cen opcji zwykłej. Jeżeli opcje charakteryzują się dłuższym terminem wygaśnięcia, wówczas występują większe różnice między cenami wstecznej oraz zwykłej opcji. W sytuacji zbliżania się terminu wygaśnięcia różnice między cenami rozpatrywanych opcji zmniejszają się.

Na wykresie 3 przedstawiono wpływ minimalnej ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się ceny wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji.

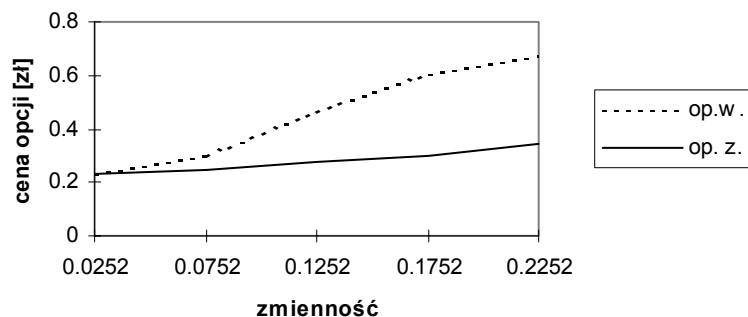


Wykres 3. Wpływ wzrostu minimalnej ceny instrumentu bazowego na cenę wstecznej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Wzrost minimalnej ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek ceny wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji.

Na wykresie 4 przedstawiono wpływ zmienności na kształtowanie się ceny wstecznej oraz zwykłej opcji kupna.

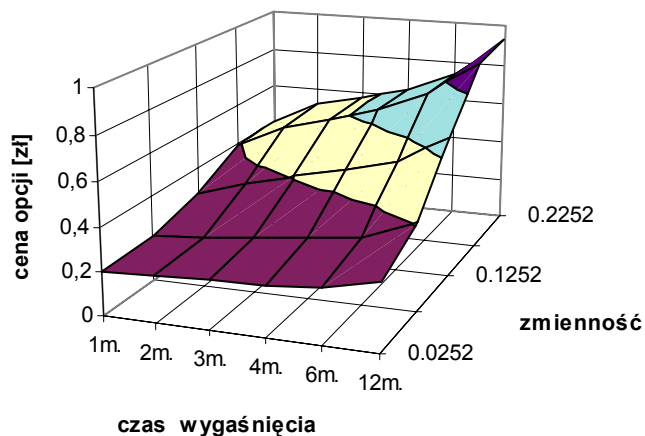


Wykres 4. Wpływ zmienności na kształtowanie się ceny wstecznej oraz zwykłej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

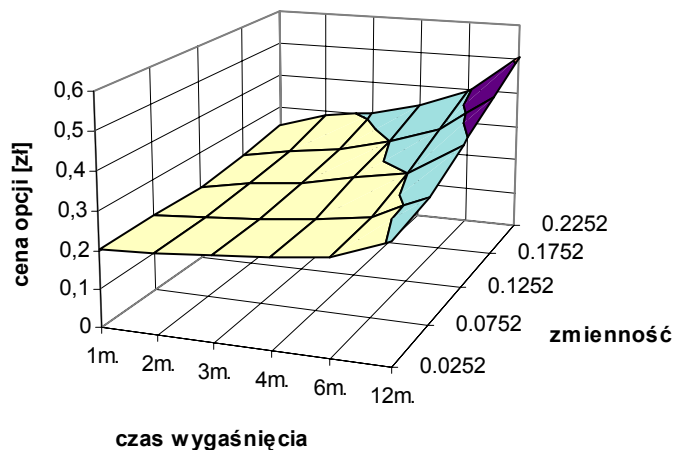
Z analizy kształtowania się cen wynika, że wzrost zmienności wpływa na wzrost zarówno wstecznej jak i zwykłej opcji kupna. Jednakże w przypadku wzrostu zmienności gwałtowniej wzrastają ceny opcji wstecznej. W przypadku spadku zmienności maleją różnice między cenami rozpatrywanych opcji.

Na wykresach 5 i 6 przedstawiono wpływ czasu pozostałego do wygaśnięcia opcji oraz zmienności na cenę wstecznej opcji kupna (wykres 5) oraz zwykłej opcji kupna (wykres 6).



Wykres 5. Wpływ zmienności oraz czasu wygaśnięcia na kształtowanie się cen wstecznej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 6. Wpływ zmienności oraz czasu wygaśnięcia na cenę zwykłej opcji kupna  
*Źródło:* opracowanie własne.

W rozpatrywanym przykładzie dla każdej zmienności oraz wartości czasu pozostałego do wygaśnięcia opcje wsteczne są droższe od opcji zwykłych. Dłuższy termin wygaśnięcia oraz wzrost zmienności wpływa na znaczny wzrost ceny wstecznej opcji kupna. Różnica między cenami rozpatrywanych opcji zmniejsza się w przypadku spadku zmienności oraz upływu czasu pozostałego do wygaśnięcia.

#### 4. Podsumowanie

Wsteczna opcja kupna o zmiennej cenie realizacji daje prawo zakupu instrumentu bazowego po najniższej cenie osiągniętej przez instrument bazowy w okresie ważności opcji. Wsteczna opcja jest droższa od opcji zwykłej.

Wartość funkcji wypłaty w dniu wygaśnięcia wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji zależy od dwóch czynników, na które ma wpływ zmienność ceny instrumentu bazowego:

- bieżącej ceny instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji,
- najniższej ceny instrumentu bazowego osiągniętej w okresie ważności opcji.

Ceny wstecznych opcji gwałtownie reagują na wahania zmienności. Szczególnie wrażliwe na wahania zmienności są ceny wstecznych opcji o dłuższym terminie wygaśnięcia.

W związku z tym, wsteczna opcja o zmiennej cenie realizacji jest szczególnie atrakcyjnym instrumentem finansowym dla grupy inwestorów, którzy stosują opcje w transakcjach spekulacyjnych na rynku zmienności cen instrumentu bazowego.

## Literatura

- Goldman, B. M., Sosin, H. B., Gatto, M. A. (1979), Path Dependent Options: "Buy at the Low, Sell at the High", *The Journal of Finance*, vol. XXXIV, 1111–1127.
- Hull, J. C. (1989), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall International, Inc.
- Jajuga, K., Gudaszewski, W., Mróz, W. (2004), Opcje egzotyczne – wprowadzenie, *Rynek Terminowy*, 1, 6–11.
- Musiela, M., Rutkowski, M. (1998), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin.
- Napiórkowski, A., (2002), *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, NBP Departament Analiz i Badań, Warszawa.
- Neftci, S. N. (1996), *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, San Diego.
- Weron, A., Weron, R. (1998), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.