**DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6-8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

*Witold Orzeszko*
*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

# Własności procesów STUR w świetle metod z teorii chaosu[1]

## 1. Wprowadzenie

Procesy ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym – STUR posiadają pierwiastki wielomianu charakterystycznego oscylujące w czasie wokół jedynki, co powoduje, że procesy te okresowo zachowują się jak procesy stacjonarne. Ich wykorzystanie do modelowania zjawisk ekonomicznych wymaga zastosowania właściwej metody identyfikacji. Tradycyjne testy na obecność pierwiastka jednostkowego nie są w stanie trafnie rozróżnić procesów STUR od procesów zintegrowanych. W niniejszej pracy rozważono dwie metody identyfikacji szeregów czasowych, wywodzące się z teorii chaosu – analizę R/S oraz szacowanie największego wykładnika Lapunowa. Przeprowadzono symulacje, których celem było zweryfikowanie, czy metody te mogą stać się skutecznym narzędziem identyfikacji procesów STUR.

## 2. Istota i identyfikacja procesów STUR

Jedna z reprezentacji procesów ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym, wprowadzona przez Grangera i Swansona (1997) definiuje te procesy jako:

$$x_t = a_t x_{t-1} + \varepsilon_t , \tag{1}$$

[1] Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003-2006 jako projekt badawczy.

gdzie $\varepsilon_t$ jest procesem i.i.d. ze średnią zero i wariancją $\sigma_\varepsilon^2$, natomiast $a_t = \exp(\alpha_t)$ dla pewnego, niezależnego od $\varepsilon_t$ stacjonarnego procesu $\alpha_t \sim N(0;\sigma_\alpha^2)$. W szczególnym wypadku, rozpatrywanym w niniejszej pracy, przyjmuje się, że $\alpha_t$ jest procesem AR(1), tzn.:

$$\alpha_t = \mu + \rho\alpha_{t-1} + \eta_t, \qquad (2)$$

gdzie $|\rho| < 1$ i $\eta_t \sim N(0;\sigma_\eta^2)$ jest procesem i.i.d. niezależnym od $\varepsilon_t$.

Procesy STUR można traktować jako szczególną klasę znanych w literaturze procesów ze zmiennym parametrem, a także jako pewne uogólnienie procesów z pierwiastkiem jednostkowym. Przykładowo, wprost z definicji procesu STUR wynika, że jeśli $\alpha_t = 0$ dla każdego *t*, wówczas $x_t$ jest błądzeniem przypadkowym. Jednak w ogólnym wypadku, pierwiastki wielomianu charakterystycznego procesu STUR oscylują w czasie wokół jedynki, czego efektem są zmiany charakteru procesu w różnych okresach.

Wykorzystanie procesów STUR do modelowania szeregów czasowych wymaga zastosowania odpowiedniej metody ich identyfikacji. Granger i Swanson (1997) przeprowadzili symulacje, które wykazały, że jedna z najpopularniejszych metod badania występowania pierwiastka jednostkowego – rozszerzony test Dickey-Fullera – ADF, nie jest w stanie trafnie rozróżnić szeregów wygenerowanych przez STUR i model błądzenia przypadkowego. W 1996 r. Leybourne, McCabe i Tremayne zaprezentowali test, który lepiej niż ADF identyfikuje procesy STUR. Należy jednak podkreślić, że przeprowadzone symulacje wykazały, że jego skuteczność zależy w dużym stopniu od długości badanych szeregów oraz od wariancji $\sigma_\eta^2$ (Granger, Swanson (1997)).

## 3. Analiza R/S

Analiza przeskalowanego zakresu, zwana analizą R/S, bada istnienie efektu długiej pamięci i z tego powodu stosowana jest do identyfikacji zachowania nielosowego w szeregach czasowych. Algorytm obliczania przeskalowanego zakresu dla zadanego szeregu $y_t$, gdzie $t = 1,2,...,n$, przebiega według następujących etapów (por. Peters (1994)):

1. Obliczenie wartości średniej $M^{(n)}$ i odchylenia standardowego $S^{(n)}$ dla $y_t$.
2. Wyznaczenie szeregu $Y_k^{(n)} = \sum_{t=1}^{k}(y_t - M^{(n)})$, dla $k = 1,2,...,n$.
3. Obliczenie rozstępu $R^{(n)} = \max_k(Y_k^{(n)}) - \min_k(Y_k^{(n)})$.

4. Obliczenie przeskalowanego zakresu $R/S_n \overset{df}{=} R^{(n)} \big/ S^{(n)}$.

Zasadniczym wynikiem analizy R/S jest wykładnik Hursta. W celu wyznaczenia jego wartości szereg czasowy $x_t$, $t = 1, 2, ..., N$, należy podzielić na podciągi długości *n*, gdzie *n* jest kolejno każdym z dzielników liczby *N*, spełniającym warunek[2] $2 \le n \le N/2$. Przy ustalonym *n*, dla każdego wyodrębnionego *i*-tego podciągu oblicza się wartość $R/S_n^{(i)}$, postępując według kroków 1–4. Następnie wyznacza się średnią arytmetyczną $\overline{R/S_n^{(i)}}$, przyjmując ją za szukaną wartość $R/S_n$ dla rozważanego *n*. Stosując tę procedurę dla kolejnych *n* otrzymuje się ciąg wartości ($R/S_n$), zaś podstawą R/S analizy jest ich potęgowa zależność od liczby *n*:

$$R/S_n = a \cdot n^{h(N)}, \tag{3}$$

lub równoważnie:

$$\ln(R/S_n) = h(N)\ln n + \ln a, \tag{4}$$

gdzie liczbę $h(N)$ nazywa się wykładnikiem Hursta, zaś $a$ jest pewną stałą. Wartość wykładnika Hursta szacuje się jako współczynnik regresji równania 4.

Wykładnik różny od 0.5 świadczy o tym, że kolejne obserwacje szeregu $x_t$ zawierają w sobie długookresową pamięć o poprzedzających je obserwacjach, a więc nie są niezależne. Jednak należy podkreślić, że choć wykładnik Hursta szeregu losowego (tzn. wygenerowanego przez proces i.i.d.) jest równy 0.5, to dopiero dla odpowiednio dużych *N* oszacowane $h(N)$ będą zbliżały się do tej wartości granicznej. Zatem, aby wyciągnąć wnioski na temat losowości badanego szeregu, należy oszacowany wykładnik Hursta porównać z wartością oczekiwaną wykładnika szeregu losowego tej samej długości. W tym celu należy najpierw obliczyć $E(R/S_n)$ w oparciu o wzór aproksymacyjny. Jednym z takich wzorów jest formuła Anisa i Lloyda (1976):

$$E(R/S_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}}, \tag{5}$$

gdzie $\Gamma(z)$ – funkcja gamma, określona wzorami:

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \quad \Gamma\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \cdot (2z-1)!!. \tag{6}$$

---

[2] Dla poprawy wiarygodności wyników zaleca się dobierać *n* począwszy od nieco większych wartości, np. $n \ge 10$ ( Peters (1994), s. 63).

## 4. Największy wykładnik Lapunowa

Wykładniki Lapunowa są miarą tempa oddalania/zbliżania się w kolejnych iteracjach początkowo bliskich sobie stanów systemu dynamicznego. Mierzą one wrażliwość systemu na zmianę warunków początkowych, która jest podstawowym atrybutem chaosu deterministycznego. Istnienie w systemie dodatniego wykładnika Lapunowa oznacza, że początkowo bliskie sobie trajektorie oddalają się od siebie w kolejnych iteracjach w tempie wykładniczym. Im większa jego wartość, tym większa wrażliwość systemu, a więc i wyższy poziom chaosu.

Do wyznaczenia największego wykładnika Lapunowa w oparciu o szereg czasowy wykorzystano w niniejszej pracy algorytm zaproponowany niezależnie przez Kantza (1994) oraz Rosensteina i in. (1993). Algorytm przebiega według następujących kroków (por. Kantz, Schreiber (1997)):

1) Dla każdego wektora opóźnień $\hat{x}_i^m = (x_i, x_{i-lag}, ..., x_{i-(m-1)lag})$, gdzie $i = (m-1)lag + 1, ..., N$ wyznacza się zbiór $O_i$, złożony z $k$ najbliższych (w sensie zadanej metryki) jego sąsiadów – $\hat{x}_{i_j}^m$.

2) Dla każdego $i = (m-1)lag + 1, ..., N$, oraz $n = 0, 1, ..., n_{\max}$ oblicza się:

$$d_n(i) = \frac{1}{k} \sum_{\hat{x}_{i_j}^m \in O_i} \left| x_{i+n} - x_{i_j+n} \right|, \tag{7}$$

gdzie $n_{\max}$ jest ustaloną liczbą naturalną, określającą liczbę iteracji, w trakcie których obserwowane jest rozbieganie się stanów systemu.

3) Wyznacza się średnią z $d_n(i)$ po wszystkich wektorach opóźnień:

$$d_n = \frac{1}{N\text{-}(m\text{-}1)lag} \sum_{i=(m-1)lag+1}^{N} d_n(i). \tag{8}$$

4) Największy wykładnik Lapunowa $\lambda$ szacuje się jako współczynnik regresji:

$$\ln(d_n) = \ln(d_0) + \lambda n, \text{ dla } n \geq 1. \tag{9}$$

Analizując algorytm, można zauważyć, że jego wyniki zależą od przyjętych *a priori*: metryki i wartości parametrów *m*, *lag*, *k* oraz $n_{\max}$ (por. np. Orzeszko (2003)).

## 5. Wyniki symulacji

Badaniu poddano proces STUR wykorzystany przez Grangera i Swansona (1997) do oceny przydatności testu ADF do identyfikacji procesów STUR. Proces ten jest zdefiniowany równaniami 1 i 2 dla $\rho = 0.6$, $\mu = -0.00003125$.[3] Procesy $\varepsilon_t \sim N(0;\, 1)$ oraz $\eta_t \sim N(0;\, 0.01)$ wygenerowano niezależne od siebie przy wykorzystaniu generatora liczb pseudolosowych. Z analizowanego procesu STUR wygenerowano 1000 szeregów czasowych, składających się z 250 obserwacji. Równolegle, dla porównania otrzymanych rezultatów rozważono proces błądzenia przypadkowego $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$, z którego również wygenerowano 1000 szeregów, składających się z 250 obserwacji.

W pierwszej kolejności zastosowano analizę przeskalowanego zakresu. W tym celu wyznaczono szeregi przyrostów $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$, co prowadzi do 249 obserwacji. Ponieważ liczba 249 ma tylko 4 dzielniki badaniu poddano skrócone szeregi, składające się z 240 pierwszych obserwacji (20 dzielników)[4]. Obliczona ze wzoru Anisa i Lloyda oczekiwana wartość wykładnika Hursta dla szeregu losowego wynosi $E(h(240)) = 0.5760$.

W tabeli 1 zamieszczono wyznaczone charakterystyki rozkładu empirycznego wykładników Hursta, oszacowanych dla pierwszych przyrostów szeregów wygenerowanych z procesu STUR i błądzenia przypadkowego[5] RW.

Tabela 1. Charakterystyki rozkładu empirycznego wykładników Hursta

| | Δ STUR | Δ RW |
|---|---|---|
| Średnia $\bar{h}$ | 0.6057 | 0.5700 |
| Mediana | 0.6038 | 0.5721 |
| Maksimum | 0.8088 | 0.7764 |
| Minimum | 0.4054 | 0.3219 |
| Odchylenie standardowe | 0.0716 | 0.0618 |
| Statystyka Jarque'a-Bery (wartość p) | 3.404 (0.182) | 15.203 (0.001) |

*Źródło*: obliczenia własne

Test Jarque'a-Bery nie odrzucił hipotezy o normalności rozkładu wykładników Hursta dla procesu Δ STUR. Z tego powodu do weryfikacji hipotezy zerowej $H_0 : \bar{h} = 0.5760$ względem hipotezy alternatywnej $H_1 : \bar{h} > 0{,}5760$ zastosowano statystykę $Z = \frac{0.6057 - 0.5760}{0.0716} \cdot \sqrt{1000}$ =13.117. Otrzymana wartość w istotny sposób prowadzi do odrzucenia $H_0$ na korzyść hipotezy alternatywnej. Oznacza to, że analiza R/S daje średnio wyższe wartości wykładników Hursta dla procesu Δ STUR niż dla Δ RW, a więc może być traktowana jako narzędzie różnicujące szeregi pochodzące od tych procesów.

[3] Przy ustalonym $\rho$ wartość $\mu$ jest tak dobrana, aby $E(a_t) = 1$.

[4] Zbyt mała liczba dzielników pogarsza wiarygodność szacunków współczynników regresji równania 4 (por. Peters (1994)).

[5] Oczywiście w przypadku błądzenia przypadkowego pierwsze przyrosty są po prostu procesem $\varepsilon_t$.

Dodatkowo, przy zastosowaniu testu Smirnowa-Kołmogorowa zweryfikowano hipotezę o zgodności rozkładów wykładników Hursta dla procesów $\Delta$ STUR i $\Delta$ RW [6]. Wartość statystyki Smirnowa-Kołmogorowa wyniosła *SK* = 5.277, co zarówno dla poziomów istotności $\alpha = 0.05$, jak i $\alpha = 0.01$ oznacza odrzucenie hipotezy zerowej o zgodności rozkładów. Otrzymany wynik potwierdza różnice pomiędzy wykładnikami Hursta obu rozważonych procesów.

W drugiej kolejności zastosowano metodę szacowania największego wykładnika Lapunowa. Ponieważ niestacjonarność może być czynnikiem negatywnie wpływającym na przebieg działania metod identyfikacji chaosu (por. Kantz, Schreiber (1997), s.102), więc badaniu poddano szeregi przyrostów $\Delta x_t$, $t = 2, 3, ..., 250$. Celem badania była weryfikacja, czy w szeregach STUR obecna jest wykładnicza wrażliwość na zmianę warunków początkowych oraz, czy metoda rozróżnia szeregi STUR od wygenerowanych przez proces błądzenia przypadkowego.

W algorytmie przyjęto wartości parametrów $lag = 1$, $k = 1$, $n_{\max} = 5$ oraz kolejno $m = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15$. W tabeli 2 podsumowano charakterystyki otrzymanych rozkładów empirycznych.

W oparciu o otrzymane rezultaty dokonano weryfikacji hipotezy o nieistotności największych wykładników Lapunowa. W pierwszej kolejności badaniu poddano wykładniki dla procesu $\Delta$ STUR. Postawiono hipotezę zerową $H_0 : \overline{\lambda} = 0$ wobec alternatywnej $H_1 : \overline{\lambda} > 0$. Z uwagi na wyniki testu Jarque'a-Bery, który wskazał na brak podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładów, do weryfikacji istotności wykładników zastosowano statystykę $Z = \frac{\overline{\lambda}}{\sigma}\sqrt{1000}$. W tabeli 3 podsumowano obliczone wartości tej statystyki, dla kolejnych *m*. Symbolem * i ** oznaczono wartości prowadzące do odrzucenia $H_0$ na poziomie istotności odpowiednio 0.05 i 0.01. Jak widać otrzymane rezultaty prowadzą do przyjęcia hipotezy alternatywnej, oznaczającej wykładniczą wrażliwość na zmianę warunków początkowych. Należy jednak podkreślić, że oszacowane średnie wartości wykładników Lapunowa są bardzo małe (zob. tabela 2), a więc zidentyfikowana wrażliwość jest stosunkowo niewielka. Odmienne, a jednocześnie zgodne z oczekiwaniami, rezultaty otrzymano dla wykładników procesu $\Delta$ RW. W tym wypadku wartości statystyki *Z* nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej[7].

[6] Aby uniknąć kolizji oznaczeń statystykę Smirnowa-Kołmogorowa, którą zwykle w literaturze oznacza się podobnie jak wykładniki Lapunowa – symbolem $\lambda$, w niniejszym artykule nazwano SK.

[7] Dla $m = 3$ oraz $m = 5$ w badaniu postawiono hipotezę $H_1$: $\overline{\lambda} > 0$, natomiast dla pozostałych – $H_1$: $\overline{\lambda} < 0$.

Tabela 2. Charakterystyki rozkładu empirycznego największych wykładników Lapunowa

| | Średnia $\overline{\lambda}$ | Mediana | Max | Min | $\sigma$ | Statystyka Jarque'a-Bery (wartość *p*) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $m$=1 | | | |
| Δ STUR | 0.0017 | 0.0010 | 0.0849 | -0.0767 | 0.0264 | 3.116 (0.211) |
| Δ RW | -0.0006 | -0.0014 | 0.0864 | -0.0973 | 0.0258 | 1.436 (0.488) |
| | | | $m$=2 | | | |
| Δ STUR | 0.0024 | 0.0018 | 0.0947 | -0.0891 | 0.0273 | 0.581 (0.748) |
| Δ RW | -0.0003 | 0.0009 | 0.0934 | -0.0886 | 0.0265 | 1.108 (0.575) |
| | | | $m$=3 | | | |
| Δ STUR | 0.0028 | 0.0018 | 0.0860 | -0.0690 | 0.0273 | 1.464 (0.481) |
| Δ RW | 0.0005 | 0.0007 | 0.0997 | -0.0953 | 0.0278 | 1.273 (0.529) |
| | | | $m$=5 | | | |
| Δ STUR | 0.0021 | 0.0020 | 0.0941 | -0.0823 | 0.0270 | 3.449 (0.178) |
| Δ RW | 0.0008 | 0.0005 | 0.0928 | -0.0914 | 0.0264 | 4.165 (0.125) |
| | | | $m$=7 | | | |
| Δ STUR | 0.0015 | 0.0018 | 0.0991 | -0.0811 | 0.0279 | 0.740 (0.691) |
| Δ RW | -0.0013 | -0.0017 | 0.0839 | -0.1078 | 0.0274 | 3.067 (0.216) |
| | | | $m$=10 | | | |
| Δ STUR | 0.0015 | 0.0019 | 0.0766 | -0.0816 | 0.0264 | 0.369 (0.832) |
| Δ RW | -0.0001 | -0.0011 | 0.0826 | -0.0900 | 0.0258 | 2.077 (0.354) |
| | | | $m$=15 | | | |
| Δ STUR | 0.0023 | 0.0025 | 0.0924 | -0.0746 | 0.0254 | 0.707 (0.702) |
| Δ RW | -0.0007 | -0.0007 | 0.0768 | -0.0969 | 0.0249 | 1.458 (0.482) |

*Źródło*: obliczenia własne

Tabela 3. Wartości statystyki *Z* w teście istotności wykładników Lapunowa

| | $m$=1 | $m$=2 | $m$=3 | $m$=5 | $m$=7 | $m$=10 | $m$=15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Δ STUR | 2.024* | 2.832** | 3.235** | 2.401** | 1.655* | 1.794* | 2.816** |
| Δ RW | -0.731 | -0.327 | 0.593 | 0.952 | -1.544 | -0.182 | -0.892 |

*Źródło*: obliczenia własne

Przeprowadzone badanie pozwala na stwierdzenie, że poprzez analizę znaku oszacowanego największego wykładnika Lapunowa możliwe jest rozróżnienie realizacji procesów STUR i błądzenia przypadkowego.

Dodatkowo, podobnie jak w przypadku analizy R/S, przeprowadzono test Smirnowa-Kołmogorowa do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładów największych wykładników Lapunowa dla procesów Δ STUR i Δ RW. Obliczone wartości statystyki *SK* zaprezentowano w tabeli 4.

Tabela 4. Wartości statystyki *SK* w teście zgodności rozkładów wykładników Lapunowa

| | $m$=1 | $m$=2 | $m$=3 | $m$=5 | $m$=7 | $m$=10 | $m$=15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *SK* | 1.185 | 1.096 | 0.850 | 0.738 | 1.476* | 1.163 | 1.431* |

*Źródło*: obliczenia własne

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ test odrzucił hipotezę o zgodności rozkładów dla $m = 7$ oraz $m = 15$. Oznacza to, że w świetle testu Smirnowa-Kołmogorowa, metoda szacowania największego wykładnika Lapunowa może stać się narzędziem rozróżniania realizacji procesów STUR i RW pod warunkiem, że zostanie dobrana odpowiednia wartość parametru *m*.

## Literatura

Anis, A. A., Lloyd, E. H. (1976), The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands, *Biometrika*, 63, 111–116.

Granger, C. W. J., Swanson, N. R. (1997), An introduction to stochastic unit-root processes, *Journal of Econometrics*, 80, 35–62.

Kantz, H. (1994), A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Physical Letters* A, 185, 77.

Kantz, H., Schreiber, T. (1997), *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kwiatkowski, J., Osińska, M. (2003), Procesy zawierające stochastyczne pierwiastki jednostkowe – identyfikacja i zastosowanie, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, Wydawnictwo UMK, Toruń, 273–281.

Kwiatkowski, J., Osińska, M. (2004), Forecasting STUR processes. A comparison to threshold and GARCH models, *w druku*.

Leybourne, S. J., McCabe, B. P. M., Tremayne, A. R. (1996), Can Economic Time Series Be Differenced to Stationarity?, *Journal of Business & Economic Statistics*, 14, 435–446.

Orzeszko, W. (2003), Wpływ doboru metod rekonstrukcji przestrzeni fazowej na efektywność prognozowania chaotycznych szeregów czasowych, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, Wydawnictwo UMK, Toruń, 349–356.

Peters, E. E. (1994), *Fractal market analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Rosenstein, M. T., Collins, J. J., De Luca, C. J. (1993), A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica* D, 65, 117–134.