

## DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Aneta Włodarczyk, Marcin Zawada*  
*Politechnika Częstochowska*

### Przełącznikowy model Markowa jako przykład niestacjonarnego modelu kursu walutowego

#### 1. Wprowadzenie

Modele regresji przełącznikowej umożliwiają modelowanie zarówno gwałtownych jak i stopniowych, skokowych zmian w poziomie badanej zmiennej ekonomicznej, przy czym zmiana parametru modelu przełącznikowego następuje wraz ze zmianą reżimu (stanu), do którego należy część wartości procesu. Zastosowania modeli przełącznikowych opierają się na ogólnym założeniu, że badane szeregi czasowe można modelować przy użyciu procesów stochastycznych zdefiniowanych jako ciągi zmiennych losowych o znanym typie rozkładu warunkowego w każdym reżimie. W modelach przełącznikowych zakłada się, że zarówno mechanizm sterujący zmianami w obrębie poszczególnych reżimów jak i mechanizm zmiany reżimu jest losowy. Zatem specyficzny charakter tym modelom nadają: obserwowalny proces ekonomiczny oraz nieobserwowalny proces sterujący<sup>1</sup>. Mianem przełącznikowych modeli Markowa (*Markov switching model*, MSM) określana jest kategoria modeli przełącznikowych, w których procesem sterującym zmianami reżimu jest jednorodny łańcuch Markowa. Klasa modeli przełącznikowych uwzględnia zarówno zmiany mechanizmu zachowania się zjawisk ekonomicznych poprzez określenie odmiennej struktury dynamicznej modelu w każdym reżimie, jak i zmiany wartości parametrów ich rozkładów dzięki przełączeniu do innego reżimu. Pierwsze wzmianki na temat modelu przełącznikowego można odnaleźć w pracy Goldfelda i Quandta (por.

---

<sup>1</sup> J. Stawicki opisując przełącznikowe modele Markowa wprowadza pojęcie podwójnego procesu stochastycznego, aby podkreślić istnienie nieobserwowalnej zmiennej sterującej zmianami reżimów obok obserwowalnej zmiennej objaśnianej; por. Stawicki (2004), s. 51.

Goldfeld, Quandt, 1973), w której rozważano model regresji liniowej o współczynnikach zmieniających się wraz ze zmianą reżimu sterującego procesem. Rozszerzeniem idei tego modelu jest przełącznikowy model Markowa zaproponowany przez Hamiltona (por. Hamilton, 1989). Celem pracy jest opis zachowania się wybranych kursów walutowych względem PLN przy wykorzystaniu przełącznikowych modeli Markowa. Artykuł składa się z części teoretycznej zawierającej specyfikację i opis metody estymacji parametrów przełącznikowego modelu Markowa, oraz empirycznej obejmującej estymację i weryfikację przełącznikowych modeli kursu złotego.

## 2. Heteroskedastyczny przełącznikowy model Markowa

Szczególne przypadki procesów generowanych przez przełącznikowy model Markowa stanowią mieszaniny niezależnych i identycznych rozkładów (*i.i.d. mixture distributions*). Niech reżim, w którym znajduje się proces w chwili  $t$  będzie indeksowany przez nieobserwowalną zmienną losową  $s_t$ , która przyjmuje  $N$  możliwych wartości z przestrzeni stanów  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Rozważania dotyczą heteroskedastycznej specyfikacji modelu, tzn. poziom zmienności procesu podlega losowym przełączeniom do różnych reżimów (stanów), którymi steruje zmienna  $s_t$ . Innymi słowy proces stochastyczny generujący badane zjawisko jest mieszaniną kilku rozkładów normalnych o różnych średnich i wariancjach (por. Hamilton 1994):

$$y_t / \Phi_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2), \quad (1)$$

gdzie:

- nieobserwowalną zmienną  $s_t$ , będącą jednorodnym łańcuchem Markowa o  $N$  stanach i macierzy prawdopodobieństw przejścia  $P = [p_{ij}]_{N \times N}$  określa reżim, w jakim znajduje się zmienna  $y_t$  w chwili  $t$
- zbiór  $\Phi_t$  zawiera wszystkie dostępne informacje dotyczące obserwowalnego procesu  $y_t$  do chwili  $t$  włącznie.

Macierz prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha Markowa posiada następujące własności macierzy stochastycznej:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} \geq 0 \text{ oraz } \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad (2)$$

dla  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Należy zauważyć, iż prawdopodobieństwo przejścia (stanowiące elementy macierzy P) ze stanu  $i$  w chwili  $t-1$  do stanu  $j$  w chwili  $t$  spełniają własność Markowa:

$$p_{ij} = \Pr(s_t = j / s_{t-1} = i) = \Pr(s_t = j / s_{t-1} = i, s_{t-2} = i_{t-2}, \dots, s_0 = i_0) \quad (3)$$

dla dowolnego  $t$  oraz dowolnego ciągu  $i_0, \dots, i_{t-2}$  należącego do przestrzeni stanów łańcucha Markowa.

Macierz P wykorzystywana jest do określenia zależności pomiędzy rozkładami bezwarunkowymi nieobserwowalnej zmiennej reżimowej  $s_t$  w kolejnych okresach:

$$\Pr(s_{t+1} = j / \Phi_t; \theta) = \sum_{i=1}^N p_{ij} \cdot \Pr(s_t = i / \Phi_{t-1}; \theta) \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Następnie definiuje się warunkową funkcję gęstości dla zmiennej obserwowalnej  $y_t$ :

$$f(y_t / s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

gdzie wektor  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, p_{11}, p_{22})$  zawiera parametry modelu przełącznikowego postaci (1), które należy oszacować.

Z kolei warunkowa funkcja gęstości (5) określa funkcję gęstości rozkładu bezwarunkowego zmiennej  $y_t$ :

$$\begin{aligned} f(y_t / \Phi_{t-1}; \theta) &= \sum_{i=1}^N f(y_t, s_t = i / \Phi_{t-1}; \theta) = \\ &= \sum_{i=1}^N f(y_t / s_t = i, \Phi_{t-1}; \theta) \cdot \Pr(s_t = i / \Phi_{t-1}; \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Warunkowy rozkład zmiennej sterującej zmianami reżimu  $s_t$  można przedstawić w postaci ilorazu łącznej funkcji gęstości  $y_t$  i  $s_t$  przez funkcję gęstości rozkładu brzegowego:

$$\begin{aligned} \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \theta) &= \frac{f(y_t, s_t = j / \Phi_{t-1}; \theta)}{f(y_t / \Phi_{t-1}; \theta)} = \\ &= \frac{f(y_t / s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) \cdot \Pr(s_t = j / \Phi_{t-1}; \theta)}{\sum_{i=1}^N f(y_t / s_t = i, \Phi_{t-1}; \theta) \cdot \Pr(s_t = i / \Phi_{t-1}; \theta)} \end{aligned} \quad (7)$$

dla  $j = 1, 2, \dots, N$ . Mając do dyspozycji obserwowalne dane dotyczące zmiennej  $y_t$ , można wskazać z określonym przez powyższy szacunek prawdopodobieństwem, iż obserwacja w chwili  $t$  została wygenerowana w nieobserwowalnym reżimie  $j$ . W zależności od zakresu zbioru informacji  $\Phi_t$  w oparciu, o który

przeprowadza się powyższe wnioskowania można wyróżnić dwa typy prawdopodobieństw określonych przez relację (7):

- prawdopodobieństwa filtrowane (*filter probability*) wyznaczone na podstawie zbioru informacji  $\Phi_t$  dla  $t < T$
- prawdopodobieństwa wygładzone (*smoothed probability*) wyznaczone na podstawie wszystkich informacji zawartych w próbie statystycznej  $\Phi_T$ .

Aby móc wnioskować na temat, który z reżimów generuje daną wartość zmiennej obserwowalnej  $y_t$  niezbędne jest uzyskanie oszacowań wektora parametrów  $\theta$ .

### 3. Estymacja parametrów przełącznikowego modelu Markowa

Dysponując obserwacjami zmiennej  $y_t$  dla  $t = 1, 2, \dots, T$  można zbudować funkcję wiarygodności:

$$\tilde{L}(y_1, y_2, \dots, y_T; \theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t / \Phi_{t-1}; \theta), \quad (8)$$

gdzie funkcję gęstości rozkładu bezwarunkowego zmiennej  $y_t$  określa (6).

Oceny wektora parametrów  $\theta$  można uzyskać m.in. metodą największej wiarygodności w wyniku maksymalizacji wyrażenia (8), uwzględniając następujące ograniczenia dotyczące elementów tego wektora:

$$\sum_{j=1}^N \Pr(s_t = j / \Phi_{t-1}; \theta) = 1, \quad \Pr(s_t = j / \Phi_{t-1}; \theta) \geq 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Udowodniono, iż ocena wektora parametrów  $\hat{\theta}$  uzyskana metodą największej wiarygodności stanowi rozwiązanie następującego systemu nieliniowych równań:

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T y_t \cdot \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \hat{\theta})}{\sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \hat{\theta})}, \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_j)^2 \cdot \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \hat{\theta})}{\sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \hat{\theta})}, \quad (11)$$

$$\hat{p}_j = \Pr(s_t = j / \Phi_{t-1}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \hat{\theta}) \quad (12)$$

dla  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Jednym ze sposobów maksymalizacji skonstruowanej dla potrzeb przełącznikowego modelu Markowa funkcji wiarygodności (8) jest zastosowanie odpowiedniej wersji algorytmu *Expectations Maximization*, zaproponowanego pierwotnie przez Dempstera, Lairda, Rubina (1977)<sup>2</sup>. Zastosowanie algorytmu EM do klasy modeli przełącznikowych wymaga wyprowadzenia zależności pomiędzy oszacowanymi na podstawie dostępnych informacji prawdopodobieństwami filtrowanymi, że obserwacja  $y_t$  została wygenerowana przez reżim  $j$  (7), a warunkami narzuconymi na parametry poprzez układ równań wynikający z potrzeby maksymalizacji funkcji wiarygodności (8). Po ustaleniu wartości początkowych dla wszystkich parametrów modelu, w każdej iteracji algorytmu EM wykonywane są dwa kroki. Pierwszy krok (*expectations*) polega na wyznaczeniu prawdopodobieństw filtrowanych  $\Pr(s_t = j / y_t, \Phi_{t-1}; \theta)$  zgodnie z relacją (7). Krok drugi (*maximization*) prowadzi do wyznaczenia wektora parametrów maksymalizującego funkcję wiarygodności, co stanowi rozwiązanie systemu nieliniowych równań (10)–(12). Hamilton (1990) udowodnił, że ciąg otrzymanych w ten sposób oszacowań jest zbieżny do lokalnego maksimum funkcji wiarygodności<sup>3</sup>.

#### 4. Przełącznikowy model Markowa dla kursów wymiany złotego

Przedmiotem badań będzie heteroskedastyczny przełącznikowy model Markowa postaci (1), w którym zmienna  $s_t$  oznacza dwustanowy łańcuch Markowa:  $s_t = 1$  oznacza stan (reżim) wysokiej zmienności kursu walutowego, natomiast  $s_t = 2$  oznacza stan niskiej zmienności kursu walutowego. Zatem przełącznikowy model Markowa dostarcza informacji o średnich poziomach logarytmicznych stóp zwrotu kursów walutowych w zależności od obowiązującego reżimu (parametry  $\mu_1$  i  $\mu_2$ ), wariancjach składnika losowego charakteryzujących poszczególne stany (parametry  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$ ) oraz prawdopodobieństwach przejścia ze stanu do stanu (parametry  $p_{11}$  i  $p_{22}$ ).

Badania empiryczne zostały przeprowadzone w oparciu o średnie dzienne notowania NBP kursu PLN/USD i PLN /CHF w okresie 02.01.1998 – 28.02.2005 oraz PLN/EUR w okresie 01.01.1999 – 28.02.2005. Estymację parametrów tego modelu przeprowadzono w pakiecie Ox wykorzystując kody programowe napisane przez Hamiltona:

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 1 można wnioskować, iż wartości oczekiwane i wariacje przypisane odpowiednim stanom różnią się od siebie dla każdego kursu walutowego. Przykładowo wyniki uzyskane dla stóp zwrotu PLN/USD wskazują, iż w reżimie wysokiej zmienności kursu walutowego średnia dzienna stopa zwrotu z inwestycji w USD wynosi około 0,11%,

<sup>2</sup> Por. Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., (1977), s. 1–38.

<sup>3</sup> Por. Hamilton J. D., (1990), s. 39–70.

co odpowiada deprecjacji złotego, natomiast w reżimie niskiej zmienności złoty wzmacniał się średnio o 0,06% dziennie. Wariancja odpowiadająca pierwszemu reżimowi jest ponad czterokrotnie wyższa od wariancji charakteryzującej drugi reżim, co uzasadnia wybór modelu przełącznikowego do opisu zachowania kursu PLN/USD. Należy zwrócić ponadto uwagę, iż prawdopodobieństwa utrzymania się stanów wysokiej i niskiej zmienności są wysokie, co odzwierciedla efekt grupowania wariancji w szeregach stóp zwrotu. Różnice w oszacowaniach parametrów dla poszczególnych walut mogą wynikać z ich specyficznych własności.

Tabela 1. Parametry przełącznikowego modelu Markowa

waluta wektor $\theta$	PLN /EUR n = 1558	PLN /CHF n = 1813	PLN /USD n = 1813
$\mu_1$	0.173334 (0.0937124)	0.248328 (0.0831591)	0.108561 (0.054556)
$\mu_2$	-0.0339755 (0.015884)	-0.0377841 (0.0162546)	-0.057882 (0.017087)
$\rho_{11}$	0.896028 (0.0342493)	0.88785 (0.0250588)	0.911902 (0.0247608)
$\rho_{22}$	0.981794 (0.00577913)	0.981469 (0.00491669)	0.964546 (0.010212)
$\sigma_1^2$	1.71207 (0.247454)	2.08652 (0.194277)	1.11068 (0.137022)
$\sigma_2^2$	0.290798 (0.0161122)	0.332519 (0.0152418)	0.248586 (0.0236443)
$\rho_1$	0.1490121	0.1418033	0.286956
$P(s_T = 1/\Phi_T; \theta)$	0.0942	0.0145	0.0345
$P(s_T = 1/\Phi_T; \theta)$	0.0169	0.0237	0.0837
Log lik	- 99.4226	- 239.662	- 145.349

Źródło: Obliczenia własne. W nawiasach podano błędy standardowe ocen parametrów modelu oszacowane na podstawie drugich pochodnych logarytmu funkcji wiarygodności.

Tabela 2. Testy weryfikujące dynamiczną specyfikację przełącznikowego modelu Markowa

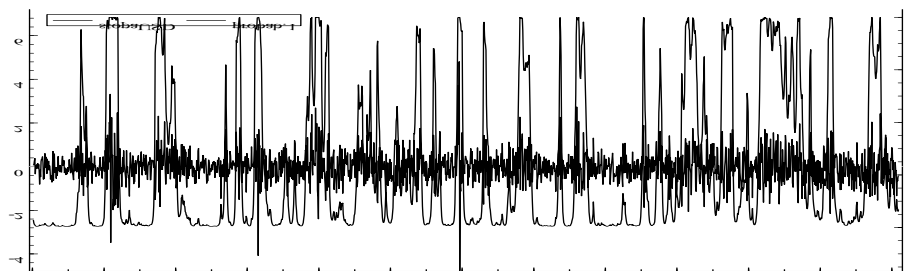
Test	PLN /USD	PLN/EUR	PLN /CHF
Test White na autokorelację	10.3457	10.535346	9.684355
Test White na efekt ARCH	9.529311	11.418597	12.974499
Test White na własność Markowa	3.91021	9.374302	11.970283
Test LM na autokorelację w reżimie 1	0.623541	2.818197	4.727319
Test LM na autokorelację w reżimie 2	0.025730	8.02875**	4.5622
Test LM na autokorelację na przestrzeni reżimów	0.093286	10.105234**	7.655025**
Test LM na efekt ARCH	4.20014	3.767907	5.622368

Źródło: obliczenia własne, \* \*oznacza istotność wyniku na poziomie 1 %.

Następnie zastosowano testy weryfikujące dynamiczną specyfikację modelu przełącznikowego (por. Hamilton 1996):

Wyniki testów zamieszczonych w tabeli 2 potwierdzają, iż reszty modelu dla kursu PLN/USD spełniają założenia białego szumu, tzn. nie są skorelowane oraz są homoskedastyczne, zarówno w obrębie każdego z reżimów, jak i na przestrzeni reżimów. Test LM wskazuje na istotną autokorelację reszt na przestrzeni reżimów w przypadku kursów PLN/EUR i PLN/CHF. Własność Markowa jest spełniona dla każdego rozważanego kursu walutowego.

Na wykresie 1 przedstawiano logarymiczne stopy zwrotu kursu PLN/USD (lewa skala) na tle prawdopodobieństw wygładzonych przebywania procesu w reżimie 1 (prawa skala):



Wykres 1. Kształtowanie się logarymicznych stóp zwrotu kursu PLN/USD na tle wygładzonych prawdopodobieństw osiągnięcia stanu wysokiej zmienności

Przełącznikowe modele Markowa mogą opisywać różne typy zachowań kursów walutowych (por. Engle, Hamilton 1990):

- asymetrię w trwałości poszczególnych reżimów; wzrost kursu walutowego może być krótki, lecz gwałtowny (faza deprecjacji waluty krajowej: parametr  $\mu_1$  osiąga dużą i dodatnią wartość,  $p_{11}$  – małą wartość), podczas gdy spadek kursu ma charakter stopniowy i długotrwały (faza aprecjacji waluty krajowej: parametr  $\mu_2$  osiąga ujemną i małą co do modułu wartość,  $p_{22}$  – wysoką wartość)
- zmiany kursu walutowego w danym okresie mogą być całkowicie niezależne od reżimu generującego wartości procesu w poprzednim okresie, podobnie jak w procesie błędzenia losowego ( $p_{11} = 1 - p_{22}$ )
- efekt *long swings*, który polega na występowaniu przeplatających się, długotrwałych okresów deprecjacji i aprecjacji waluty krajowej (parametry  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są przeciwnych znaków oraz  $p_{11}$  i  $p_{22}$  mają wysokie wartości).

Wyniki oszacowań parametrów modeli przełącznikowych dla kursów PLN/USD, PLN/EUR i PLN/CHF potwierdzają występowanie efektu *long swings*. Wartości prawdopodobieństw przejścia są punktem wyjścia do wyznaczenia średniej długości trwania okresów aprecjacji i deprecjacji kursu wymiany (por. Marsh 2000) :

$$a = \frac{1}{1 - p_{22}}, \quad (13)$$

$$d = \frac{1}{1 - p_{11}}, \quad (14)$$

gdzie: a – średnia długość trwania okresu aprecjacji  
d – średnia długość trwania okresu deprecjacji.

Tabela 3. Średnia długość trwania okresów aprecjacji i deprecjacji kursu walutowego (w dniach)

Waluta	Aprecjacja	Deprecjacja
PLN/USD	28.20556214	11.35099548
PLN/EUR	54.92694716	9.617974070
PLN/CHF	53.96362851	8.916629514

Źródło: obliczenia własne.

## 5. Podsumowanie

Przy modelowaniu krótkookresowych wahań kursu walutowego zwykle występuje potrzeba uwzględnienia uwarunkowań typu losowego, czyli rezygnacja z fundamentalnych teorii kursu walutowego na rzecz modelowania probabilistycznego. Do głównych zalet modeli Markowa należy zaliczyć:

- należą one do klasy modeli nieliniowych
- modelowanie skokowych i bardzo dużych (co do wartości bezwzględnej) zmian w poziomie zmiennej ekonomicznej umożliwia łańcuch Markowa, który steruje zmianami reżimu, dzięki czemu proces może przełączać się gwałtownie
- możliwość opisu dynamiki procesu w szerokim zakresie, począwszy od częstych i stosunkowo umiarkowanych zmian, a skończywszy na rzadkich i gwałtownych zmianach.
- rozkład zmiennej objaśnianej w tym modelu jest mieszaniną kilku rozkładów normalnych, a to nie implikuje zależności, że rozkład tej zmiennej jest normalny.

## Literatura

- Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B.(1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 39, 1–38.
- Engel, C., Hamilton, J. D.(1990), Long Swings in the Dollar: Are They in Data and Do Markets Know It?, *American Economic Review*, vol. 80, 689–713.
- Hamilton, J. D.(1990), Analysis of Time Series subject to Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, vol. 45, 39–70.
- Hamilton, J. D.(1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hamilton, J. D. (1996), Specification Testing in Markov-Switching Time Series Models, *Journal of Econometrics*, vol. 70, 127–157.
- Marsh, I. W. (2000), High-frequency Markov Switching Models in the Foreign Exchange Market, *Journal of Forecasting*, vol. 19, 123–134.
- Stawicki, J.(2004), *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń.