

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Piotr Fiszeder

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Modele zgodne dla procesów GARCH

1. Wprowadzenie

W 1981 roku Granger sformułował ideę zgodności, jako podobieństwo dominujących własności zmiennej objaśnianej oraz dominujących własności zmiennych objaśniających (zgodność struktur harmonicznych). Zieliński (1984) sformułował koncepcję budowy dynamicznego modelu zgodnego. Przez zgodność modelu w sensie Zielińskiego rozumie się zgodność harmonicznej struktury procesu objaśnianego z łączną harmoniczną strukturą procesów objaśniających oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających. Koncepcja dynamicznego modelowania zgodnego opiera się na uwzględnieniu na etapie specyfikacji modelu informacji o wewnętrznej strukturze badanych procesów i budowie dynamicznego modelu zgodnego na podstawie zależności dla białoszumowych składników resztowych. Jeżeli poprawnie zostaną zidentyfikowane elementy wewnętrznej struktury wykorzystywanych procesów i wyspecyfikowane w modelu pełnym, to modele budowane na podstawie procedury budowy zgodnego modelu dynamicznego są na ogół lepszymi modelami pod względem struktury przyczynowo-skutkowej, jak i pod względem własności statystyczno-prognostycznych. Wykorzystanie informacji o wewnętrznej strukturze procesów było również podstawą koncepcji budowy modelu zrównoważonego sformułowanej przez Grangera (1990).

W obu powyższych koncepcjach modelowania nie wspomina się o zgodności dotyczącej warunkowych wariancji. W niniejszym artykule pojęcie zgodności zostało rozszerzone na wariancje warunkowe. Przez zgodność modelu w wariancji warunkowej rozumie się równość wariancji warunkowej zmiennej objaśnianej z wariancją warunkową formy ważonej procesów objaśniających i procesu resztowego. W niniejszym artykule zakładamy, że wszystkie procesy mają stałe i skończone wariancje bezwarunkowe. Model jest zgodny w wariancji wa-

runkowej, jeżeli wariancja bezwarunkowa zmiennej objaśnianej jest równa wariancji bezwarunkowej formy ważonej procesów objaśniających i procesu resztowego oraz występuje zgodność harmonicznej struktury kwadratu procesu objaśnianego z harmoniczną strukturą kwadratu formy ważonej procesów objaśniających i procesu resztowego¹.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono modele zgodne w wariancji dla procesów GARCH. W części trzeciej pokazano jakie mogą być konsekwencje wykorzystywania modeli niezgodnych w wyżej podanym sensie. Część czwarta zawiera przykłady empiryczne dotyczące procesów finansowych. Artykuł kończy podsumowanie.

2. Modele zgodne w wariancji warunkowej

Proces GARCH(p, q) można przedstawić w następującej formie:

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim D(0, h_t), \quad (1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (2)$$

gdzie ψ_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w okresie $t-1$, a $D(0, h_t)$ oznacza określoną postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa (najczęściej rozkład normalny lub t-Studenta) o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji h_t .

Niech ε_{yt} , $\varepsilon_{x_s t}$ ($s=1, 2, \dots, k$) oraz ε_t będą białoszumowymi procesami GARCH (procesami o wartości oczekiwanej równej zero, stałej wariancji brzegowej i pozbawione autokorelacji). Następujący model:

$$\varepsilon_{yt} = \sum_{s=1}^k \rho_s \varepsilon_{x_s t} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

gdzie $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{x_s t}) = 0$, jest zgodny, ponieważ struktury harmoniczne lewej i prawej strony równania są identyczne.

Jeżeli ε_{yt} jest procesem resztowym w modelu opisującym wewnętrzną strukturę zmiennej objaśnianej, a $\varepsilon_{x_s t}$ procesami resztowymi w modelach opisujących wewnętrzną strukturę zmiennych objaśniających, to model zgodny można zbudować w tradycyjny sposób uwzględniając w równaniu (3) wewnętrzną strukturę procesów (patrz Talaga i Zieliński, 1986). Stopy zwrotu procesów finansowych są najczęściej stacjonarne, często można je dobrze opisać za pomocą modeli autoregresyjnych o niskim rzędzie autoregresji.

¹ Pojęcie zgodności modelu może być dalej rozszerzane na wyższe momenty warunkowe rozkładu.

Powyższe modele zgodne nie muszą być modelami zgodnymi w wariancji warunkowej. Rozważmy najpierw przykład z jedną zmienną objaśniającą. Niech ε_{xt} i ε_{yt} oznaczają procesy GARCH odpowiednio o rzędach: $\text{GARCH}(p_1, q_1)$ i $\text{GARCH}(p_2, q_2)$. Jeżeli procesy ε_{yt} , ε_{xt} oraz ε_t są procesami białoszumowymi, to model:

$$\varepsilon_{yt} = \rho\varepsilon_{xt} + \varepsilon_t \tag{4}$$

jest modelem zgodnym.

Model (4) jest modelem zgodnym w wariancji warunkowej, jeżeli wariancja bezwarunkowa ε_{yt} jest równa wariancji bezwarunkowej $\rho\varepsilon_{xt} + \varepsilon_t$ oraz zachodzi zgodność struktury harmonicznej procesów ε_{yt}^2 oraz $(\rho\varepsilon_{xt} + \varepsilon_t)^2$, czyli jeżeli następujący model:

$$\varepsilon_{yt}^2 = \rho^2\varepsilon_{xt}^2 + 2\rho\varepsilon_{xt}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2 \tag{5}$$

jest zgodny.

Równość wariancji bezwarunkowych ε_t i $\rho\varepsilon_{xt} + \varepsilon_t$ powinna mieć miejsce w każdym modelu zgodnym w postaci (4).

Przyjmując za $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, model $\text{GARCH}(p, q)$ można zapisać w postaci modelu $\text{ARMA}(m, p)$ dla ε_t^2 , gdzie $m = \max\{p, q\}$. Wobec tego ε_{xt}^2 oraz ε_{yt}^2 można przedstawić w formie:

$$\varepsilon_{xt}^2 = \alpha_{01} + \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_{i1}\varepsilon_{xt-i}^2 + \sum_{j=1}^{p_1} \beta_{j1}\varepsilon_{xt-j}^2 - \sum_{j=1}^{p_1} \beta_{j1}v_{xt-j} + v_{xt}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{yt}^2 = \alpha_{02} + \sum_{i=1}^{q_2} \alpha_{i2}\varepsilon_{yt-i}^2 + \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{j2}\varepsilon_{yt-j}^2 - \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{j2}v_{yt-j} + v_{yt}, \tag{7}$$

gdzie v_{yt} , v_{xt} są procesami białoszumowymi.

Struktura ε_t^2 będzie zależała od wewnętrznej struktury procesów ε_{yt}^2 oraz ε_{xt}^2 . Wariancja warunkowa składnika losowego ε_t w równaniu (4) może być zatem opisana za pomocą modelu $\text{GARCH}(p_3, q_3)$. Wartości p_3 i q_3 będą zależały od charakteru zależności pomiędzy ε_{yt}^2 i ε_{xt}^2 oraz od własności tych procesów (własności procesów powstających z sumowania procesów autoregresyjnych można znaleźć w pracach Kufel, Piłatowska i Zieliński, 1996, Stawicki i Górka, 1996). Jeżeli $B_1(u)Y_{1t} = A_1(u)\varepsilon_{1t}$ i $B_2(u)Y_{2t} = A_2(u)\varepsilon_{2t}$ są niezależnymi procesami typu ARMA o rzędach równych odpowiednio (p_1, q_1) oraz (p_2, q_2) , to

$$Y_t = Y_{2t} - Y_{1t} = B_2^{-1}(u)A_2(u)\varepsilon_{2t} - B_1^{-1}(u)A_1(u)\varepsilon_{1t} \tag{8}$$

oraz

$$B_1(u)B_2(u)Y_t = B_1(u)A_2(u)\varepsilon_{2t} - B_2(u)A_1(u)\varepsilon_{1t}. \quad (9)$$

Zatem proces Y_t jest procesem ARMA(p, q), gdzie $p = p_1 + p_2$ i $q = \max(p_1q_2, p_2q_1)$. Jeżeli niektóre parametry są zbliżone do zera, to proces może zostać zidentyfikowany jako proces o mniejszej liczbie opóźnień. W przypadku procesów finansowych dysponujemy na ogół dużą liczbą obserwacji, dlatego Y_t będzie prawie zawsze identyfikowany jako proces typu ARMA. Analogicznie, jeżeli ε_{yt}^2 i ε_{xt}^2 są niezależne, to wariancja ε_t w równaniu (4) może być zapisana jako proces ARMA(p, q).

Tylko prawidłowa specyfikacja modelu (4) oraz modelu GARCH dla ε_t zapewnia zgodność modelu (4) w wariancji.

Podobne wnioski wynikają z ogólnego modelu dla k zmiennych objaśniających w postaci (3), przy założeniu $E(\varepsilon_{x_s t}, \varepsilon_{x_s' t}) = 0$. Jeżeli zmienne objaśniające są skorelowane, to wariancja ε_t będzie zależała również od kowariancji poszczególnych zmiennych objaśniających.

Warto zwrócić uwagę, że nie da się wyprowadzić klasycznego modelu zgodnego między procesami GARCH – ε_{yt} i ε_{xt} na podstawie procesów standaryzowanych. Niech z_{yt} , z_{xt} oraz z_t będą standaryzowanymi procesami białoszumowymi o stałych wariancjach warunkowych:

$$z_{yt} = \varepsilon_{yt} / h_{yt}, \quad z_{xt} = \varepsilon_{xt} / h_{xt}, \quad z_t = \varepsilon_t / h_t. \quad (10)$$

Następujący model:

$$z_{yt} = \rho z_{xt} + z_t \quad (11)$$

jest modelem zgodnym. Podstawiając (10) do równania (11) i mnożąc równanie przez h_{yt} otrzymujemy:

$$\varepsilon_{yt} = \rho \frac{h_{yt}}{h_{xt}} \varepsilon_{xt} + \varepsilon_t \frac{h_{yt}}{h_t}. \quad (12)$$

Podstawiając $\rho \frac{h_{yt}}{h_{xt}} = \rho_t^*$ oraz $\varepsilon_t \frac{h_{yt}}{h_t} = \varepsilon_t^*$ otrzymujemy model zgodny:

$$\varepsilon_{yt} = \rho_t^* \varepsilon_{xt} + \varepsilon_t^*, \quad (13)$$

z losowym parametrem ρ_t^* .

Oczywiście istnieje klasyczny model zgodny między procesami ε_{yt} i $\frac{\varepsilon_{xt}}{h_{xt}h_{yt}^{-1}}$, czyli między procesem ε_{yt} i odpowiednio standaryzowanym procesem ε_{xt} .

3. Eksploatacja modelu – modele zgodne w wariancji warunkowej

Zmienność jest ważnym parametrem w wielu analizach finansowych, jak na przykład wycena instrumentów pochodnych, wycena aktywów kapitałowych, analiza przepływu informacji pomiędzy różnymi rynkami czy instrumentami finansowymi. Zmienność wariancji warunkowej składnika losowego w modelu (3) obniża efektywność estymatorów parametrów strukturalnych ρ_i otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów, a macierz kowariancji estymatorów $\sigma^2(X'X)^{-1}$ jest nieodpowiednia. Wynik wnioskowania o istotności parametrów ρ_i może być w tej sytuacji błędny. Należałoby zatem zastosować metodę estymacji odporną na zmienność wariancji lub opisać bezpośrednio w modelu zmienną wariancję warunkową składnika losowego, na przykład za pomocą modelu GARCH lub SV. Jeżeli model na podstawie, którego konstruowana jest miara zmienności nie jest zgodny w wariancji warunkowej, to szacunek wariancji będzie najczęściej zaniżony. Zgodność modelu w wariancji jest zatem istotna dla wszystkich analiz, w których wykorzystywane są prognozy zmienności.

Niech y_t oznacza proces AR(r)-GARCH(p, q):

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^r \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (14)$$

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (15)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (16)$$

Szacunki wariancji y_t konstruowane na podstawie wariancji warunkowej ε_t będą zaniżone, ponieważ nie uwzględniają zmienności procesu autoregresyjnego. Prognozy wariancji y_t konstruowane na podstawie wariancji warunkowej ε_t będą natomiast niedoszacowane. Aby zachować zgodność modelu (14) w wariancji warunkowej szacunki wariancji warunkowej powinny zostać skorygowane w następujący sposób:

$$hs_t = \frac{h_t}{1 - \sum_{i=1}^r \phi_i^2}, \quad (17)$$

gdzie hs_t oznacza skorygowaną wartość wariancji warunkowej y_t .

Podobnie szacunki wariancji warunkowej ε_{yt} konstruowane na podstawie wariancji warunkowej ε_t w równaniu (3) będą niedoszacowane, ponieważ zostaje pominięta zmienność zmiennych objaśniających $\varepsilon_{x,t}$. Niech

$E(\varepsilon_{x_s,t}, \varepsilon_{x_s,t}) = 0$. Skorygowana wartość warunkowej wariancji ε_{yt} dana jest następującą formułą:

$$hs_{yt} = \sum_{s=1}^k \rho_s^2 h_{x_s} + h_t, \quad (18)$$

gdzie h_{x_s} ($s = 1, 2, \dots, k$) oraz h_t oznaczają wariancje warunkowe odpowiednio zmiennych objaśniających i składnika losowego.

Jeżeli model (3) nie będzie zgodny w wariancji warunkowej, czyli ε_t^2 nie uwzględni wewnętrznej struktury ε_{yt}^2 i $\varepsilon_{x_{st}}^2$ ($s = 1, 2, \dots, k$), to szacunki wariancji warunkowej konstruowane na podstawie tego modelu będą niedokładne (niedoszacowane lub przeszacowane).

4. Przykłady empiryczne

Opisane powyżej zagadnienia zilustrowano na przykładzie rzeczywistych procesów finansowych. Dzielne stopy zwrotu najstarszego indeksu charakteryzującego GPW w Warszawie – indeksu WIG – można opisać za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1). Wartości r, p, q były zawsze ustalane na podstawie bayesowskiego kryterium informacyjnego. Do badania przyjęto najdłuższy możliwy okres, w którym notowania odbywały się pięć razy w tygodniu (od 3 października 1994 r. do 28 kwietnia 2005 r.). Oszacowany za pomocą metody największej wiarygodności model został przedstawiony w tabeli 1.

Tabela 1. Model AR-GARCH dla indeksu WIG

$\phi_0 \times 10^{-4}$	ϕ_1	$\alpha_0 \times 10^{-6}$	α_1	β_1	ν
4.3196	0.1487	3.6820	0.0910	0.8971	8.1785
(2.5101)	(0.0195)	(1.1279)	(0.0122)	(0.0132)	(1.1886)

W nawiasach pod ocenami parametrów podano średnie błędy szacunku. Parametr ν oznacza liczbę stopni swobody w warunkowym rozkładzie t-Studenta.

Źródło: obliczenia własne.

Ocena wariancji brzegowej składnika losowego z modelu autoregresyjnego wynosi 0,0003098, natomiast ocena wariancji brzegowej stóp zwrotu indeksu WIG równa jest 0,0003168. Zatem szacunek wariancji, jak i jej prognoza konstruowana na podstawie wariancji warunkowej ε_t w równaniu (16) będą niedoszacowane średnio o 2,2%.

Koniunktura na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie zależy w dużym stopniu od koniunktury na giełdzie w Nowym Jorku. Do badania wybrano indeks S&P 500. Stopy zwrotu indeksu S&P 500 są pozbawione autokorelacji, a wariancję warunkową najlepiej opisuje model GARCH(1,1). Notowania w Nowym Jorku kończą się po zamknięciu sesji na GPW w Warszawie, dlatego inwestorzy mogą zareagować na wydarzenia na NYSE dopiero następnego

dnia. Stąd pomiędzy indeksem WIG a indeksem S&P 500 występuje „naturalne” opóźnienie czasowe. Oszacowany model przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Model indeksu WIG z indeksem S&P 500

$\phi_0 \times 10^{-4}$	ϕ_1	$\phi_{S\&P500}$	$\alpha_0 \times 10^{-6}$	α_1	β_1	ν
2.7713	0.1025	0.3312	3.9584	0.0955	0.8904	8.7340
(2.4508)	(0.0190)	(0.0218)	(1.1785)	(0.0130)	(0.0142)	(1.3939)

W nawiasach pod ocenami parametrów podano średnie błędy szacunku. Parametr ν oznacza liczbę stopni swobody w warunkowym rozkładzie t-Studenta.

Źródło: obliczenia własne.

Wariancję warunkową składnika losowego najlepiej opisuje model GARCH(1,1), a więc struktura wariancji warunkowej jest prostsza, niż wynikałoby to z formuły (9). Ocena wariancji brzegowej stóp zwrotu indeksu WIG wynosi 0,0003168, natomiast ocena wariancji brzegowej składnika losowego równa jest 0,0002811. Szacunek wariancji, jak i jej prognoza konstruowana na podstawie wariancji warunkowej dla modelu przedstawionego w tablicy 2 (na podstawie wariancji warunkowej składnika losowego) będą niedoszacowane średnio o 11,3%.

Pomiędzy większością indeksów notowanych na GPW w Warszawie istnieją silne zależności. Poniżej zbadano zależności pomiędzy stopą zwrotu indeksów TechWIG (charakteryzuje spółki z Segmentu Innowacyjnych Technologii) i WIG20 (charakteryzuje 20 spółek o największej wartości rynkowej i największym obrocie). W tabeli 3 przedstawiono dwa modele oszacowane dla indeksu TechWIG. Pierwszy model uwzględnia jedynie wewnętrzną strukturę procesu stóp zwrotu i jest to model AR(1)-GARCH(1,1). Drugi opisuje zależność z indeksem WIG20. Wariancje warunkowe składnika losowego dla obu modeli zostały przedstawione na rysunku 1.

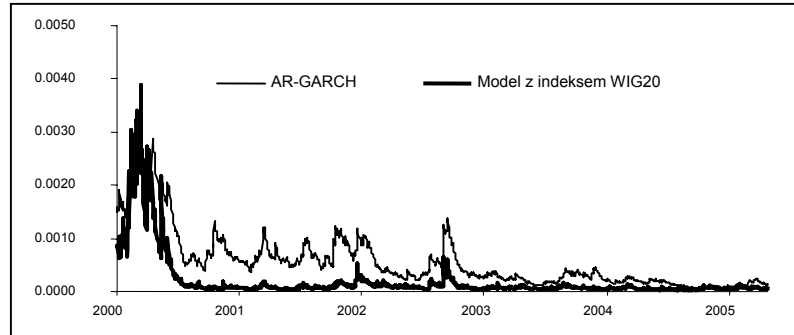
Tabela 3. Modele dla indeksu TechWIG

$\phi_0 \times 10^{-4}$	ϕ_1	ϕ_{WIG20}	ϕ_{2WIG20}	$\alpha_0 \times 10^{-6}$	α_1	β_1	ν
0.0606	0.0831	-	-	1.2184	0.0628	0.9348	10.9809
(4.3739)	(0.0281)	-	-	(0.8080)	(0.0124)	(0.0114)	(3.1284)
-5.8655	0.1044	1.1346	-0.1115	3.1814	0.1033	0.8644	9.8751
(2.3147)	(0.0281)	(0.0143)	(0.0355)	(0.8131)	(0.0184)	(0.0182)	(2.5621)

W nawiasach pod ocenami parametrów podano średnie błędy szacunku. Parametr ν oznacza liczbę stopni swobody w warunkowym rozkładzie t-Studenta.

Źródło: obliczenia własne.

Wariancja warunkowa składnika resztowego dla modelu opisującego zależność z indeksem WIG20 jest znacznie mniejsza niż wariancja warunkowa składnika resztowego dla modelu opisującego jedynie wewnętrzną strukturę procesu. Regresja indeksu TechWIG względem indeksu WIG20 spowodowała znaczne zmniejszenie warunkowej wariancji składnika resztowego.



Wykres 1. Wariacje warunkowe składników resztowych dla indeksu TechWIG

Większość zmienności indeksu TechWIG została wyjaśniona przez zmienność indeksu WIG20, szczególnie w okresie od drugiej połowy 2000 r. do końca 2002 r. Zatem pomiędzy wariacjami indeksów TechWIG i WIG20 istnieje silna zależność jednoczesna.

5. Zakończenie

W artykule rozszerzono pojęcie zgodności modelu na wariacje warunkowe. Pokazano jakie mogą być konsekwencje wykorzystywania modeli niezgodnych w wariacji oraz podano przykłady empiryczne dotyczące procesów finansowych.

Literatura

- Granger, C. W. J. (1981), Some Properties of Time Series Data and their Use In Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121–130.
- Granger, C. W. J. (1990), Where Are the Controversies In Econometric Methodology?, w: C. W. J Granger (red.), *Modelling Economic Series*, Clarendonpress, Oxford.
- Kufel, T., Piłatowska, M., Zieliński, Z., (1996), Symulacyjna analiza poznawczych własności dynamicznych modeli zgodnych, *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, AE, Kraków.
- Stawicki, J., Górka, J. (1996), An ARMA Representation for a Sum of Autoregressive Processes, *Dynamic Econometric Models*, vol. 2, UMK, Toruń.
- Talaga, L., Zieliński, Z. (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- Zieliński, Z. (1984), Zmienność w czasie strukturalnych parametrów modelu ekonometrycznego, *Przegląd Statystyczny*, 31, 1/2, 135–148.