

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Magdalena Sokalska
Szkoła Główna Handlowa

Modelowanie zmienności stóp zwrotu danych finansowych o wysokiej częstotliwości

1. Wstęp

Celem artykułu jest prezentacja nowego modelu wariancji warunkowej dla danych o wysokiej częstotliwości. Model ten początkowo został zaproponowany w pracy Engle, Sokalska, Chanda (2005) i oszacowany na dużej próbie 2700 spółek notowanych na głównych giełdach amerykańskich. W niniejszym artykule, oprócz krótkiego omówienia modelu, prezentujemy jego empiryczne własności w skali mikro.

Poprzednie badania, w szczególności Andersena i Bollersleva (1997), zwróciły uwagę na to, że „standardowe” modele GARCH dają niezadowolające wyniki w zastosowaniu do danych o wysokiej częstotliwości. Wahania aktywności inwestorów i wariancji warunkowej stóp zwrotu w ciągu dnia, określane dalej jako (dzienna) sezonowość, w znaczący sposób wpływają na oszacowanie parametrów modeli GARCH i czynią je nieporównywalnymi dla danych o różnym stopniu agregacji czasowej. Stąd prace Andersena i Bollersleva (1997,1998) budują multiplikatywne modele GARCH. Artykuł Engle, Sokalska, Chanda (2005) (ESC) rozwija poprzednie badania, proponując alternatywną specyfikację składników multiplikatywnych wariancji warunkowej.

2. Model

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywać następujące oznaczenia. Poszczególne dni indeksowane są symbolem t ($t=1, \dots, T$). Każdy dzień dzie-

limy na 10-minutowe interwały i ($i=0, \dots, N$). Cena akcji w okresie $\{t, i\}$, tzn. dniu t , interwale (porze) i to $P_{\{t, i\}}$. Logarytmiczne stopy zwrotu wynoszą:

$$\begin{aligned} r_{\{t, i\}} &= \ln\left(\frac{P_{\{t, i\}}}{P_{\{t, i-1\}}}\right) & \text{dla } i \geq 1 \\ &= \ln\left(\frac{P_{\{t, 1\}}}{P_{\{t-1, N\}}}\right) & \text{dla } i = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Engle, Sokalska, Chanda (2005) proponują dekompozycję wariancji warunkowej na nieobserwowalne składniki i opisują logarytmiczną stopę zwrotu za pomocą następującego modelu:

$$r_{\{t, i\}} = \sqrt{h_t s_i q_{\{t, i\}}} \varepsilon_{\{t, i\}} \quad \varepsilon_{\{t, i\}} \sim N(0, 1) \quad (2)$$

gdzie:

h_t jest składnikiem dziennym wariancji - stałym w ciągu danego dnia,

s_i to deterministyczny składnik sezonowy,

$q_{\{t, i\}}$ to stochastyczny składnik intraday,

$\varepsilon_{\{t, i\}}$ składnik losowy.

Choć składnik dzienny może być oszacowany na kilka sposobów, w tym artykule proponujemy model GARCH(1,1) dla danych dziennych:

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{h_t} \zeta_t \quad \zeta_t \sim N(0, 1) \\ h_t &= w_0 + \alpha_d r_{t-1}^2 + \beta_d h_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

ζ_t to osobny składnik losowy dla dziennych stóp zwrotu r_t , natomiast α_d i β_d to parametry modelu. Model dla danych dziennych należy estymować na podstawie dłuższej próby niż model dla danych intraday.

Składnik sezonowy s_i szacujemy jako wariancję stóp zwrotu w poszczególnych 10-minutowych interwałach.

$$\hat{s}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{r_{\{t, i\}}^2}{\hat{h}_t}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Wreszcie ostatni składnik wariancji warunkowej - $q_{\{t, i\}}$ przedstawiamy jako osobny model GARCH(1,1):

$$q_{\{t, i\}} = \omega + \alpha (r_{\{t, i-1\}} / \sqrt{\hat{h}_t \hat{s}_{i-1}})^2 + \beta q_{\{t, i-1\}}, \quad (5)$$

gdzie α i β to parametry modelu dla danych intraday.

Zestawiając i porządkując powyższe postępowanie, szacujemy następujący model:

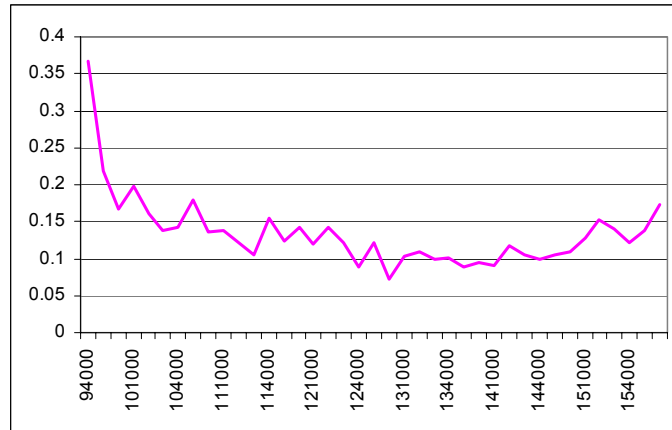
$$\begin{aligned} z_{\{t,i\}} \Big| F_{\{t,i-1\}} &\sim N(0, q_{\{t,i\}}) \\ q_{\{t,i\}} &= \omega + \alpha z_{\{t,i-1\}}^2 + \beta q_{\{t,i-1\}} \cdot \\ z_{\{t,i\}} &= r_{\{t,i\}} / \sqrt{\hat{h}_t \hat{s}_i} \end{aligned} \quad (6)$$

ESC wykazują, że estymatory parametrów uzyskane w powyższej sekwencyjnej procedurze są zgodne i asymptotycznie normalne.

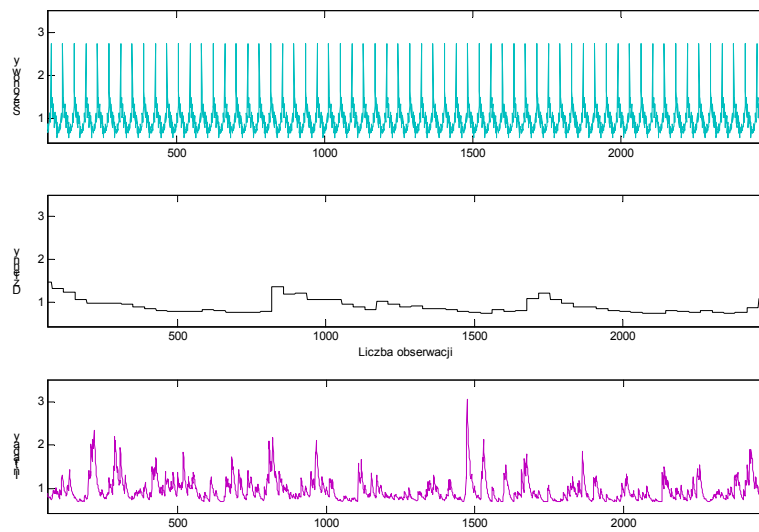
3. Analiza empiryczna

Model omówiony w poprzednim rozdziale zostanie oszacowany dla losowo wybranej spółki notowanej na giełdzie NYSE. Wybrany walor, RGC-Republic Group Inc., jest spółką średniej wielkości. Szereg czasowy pochodzi z pracy Engle i Patton (2004). W omawianym półtorarocznym okresie, od 2-go stycznia 1998 r. do 30-go czerwca 1999, dokonano 13 tysięcy transakcji kupna-sprzedaży, co daje średnią 35 transakcji na dzień.

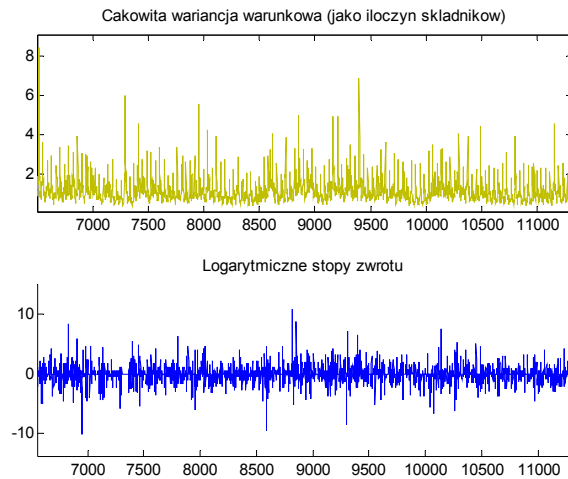
Rys. 1 przedstawia pierwiastek kwadratowy oszacowanego składnika sezonowego (por. równanie 4) – czyli odchylenie standardowe stóp zwrotu w poszczególnych porach dnia. Widzimy wyraźnie zwiększoną aktywność i zmienność cen w godzinach rannych, spadek zmienności w ciągu dnia i powolny wzrost przed końcem sesji giełdowej. Dzielne składniki wariancji warunkowej otrzymujemy rekursywnie jako jedno-okresowe prognozy na podstawie równania (3). Dzienny GARCH został oszacowany dla danych od początku sierpnia 1985 r. Rys. 2 zestawia trzy składniki wariancji w początkowym okresie ponad 3 miesięcy. Kolejno od góry zestawiono składnik sezonowy, dzienny i intraday wariancji warunkowej. Wyniki oszacowania parametrów modeli GARCH dla danych dziennych i intraday znajdują się w Tabeli 1. Rys. 3 pokazuje iloczyn tych trzech czynników oraz analizowany szereg czasowy stóp zwrotu w jednym z podokresów.



Rys. 1. Wartość wariancji warunkowej w zależności od pory dnia – Spółka RGC
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. Składniki wariancji warunkowej – Spółka RGC
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Wykres logarymicznych stóp zwrotu oraz oszacowania wariancji warunkowej – Spółka RGC
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 1. Wyniki estymacji modelu GARCH(1,1) dla spółki RGC

Dane dzienne			
Parametr	Wartość	Błąd standard.	Stat-t
C	0.00023757	0.00041135	0.577537
K	0.00013636	0.00001149	11.86358
GARCH (1)	0.65957	0.019085	34.5596
ARCH (1)	0.18073	0.010675	16.93021
Dane intraday			
Parametr	Wartość	Błąd standard.	Stat-t
C	-0.0047551	0.0072439	-0.6564
K	0.079635	0.0020221	39.3828
GARCH (1)	0.8311	0.0033093	251.1402
ARCH (1)	0.097794	0.002116	46.2155

Uwagi: C oznacza stałą w równaniu średniej, podczas gdy K – to stała w równaniu wariancji warunkowej

Źródło: obliczenia własne.

4. Zakończenie

Obecny artykuł prezentuje nowy model dla danych o wysokiej częstotliwości. Dokonujemy dekompozycji wariancji warunkowej na składniki, które łatwo jest oszacować i interpretować. W niniejszej pracy, oprócz krótkiego omówienia modelu, prezentujemy wyniki jego oszacowania dla reprezentatywnej spółki giełdowej.

Literatura

- Alexander, C. (2001), *Risk Management and Analysis*, Wiley, New York.
- Andersen, T.G., T. Bollerslev (1997), Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets, *Journal of Empirical Finance*, vol. 4, 115-158.
- Andersen, T.G., T. Bollerslev (1998), DM-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer-Run Dependencies, *Journal of Finance*, 53, 219-265.
- Deo, R., C. Hurvich and Y. Lu (2005), Forecasting realized volatility using a long memory stochastic volatility model: Estimation, prediction and seasonal adjustment, w druku w *Journal of Econometrics*.
- Engle, R. F., Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica* 50(4) (1982), 987-1007.
- Engle, R.F., 2002, New Frontiers for ARCH Models, *Journal of Applied Econometrics*, 17, 425-446.
- Engle, R.F., M.E. Sokalska, A. Chanda (2005), High Frequency Multiplicative Component GARCH, Stern School of Business, NYU, Working Paper.
- Engle, R.F. and G.P. Gallo(2005), A Multiple Indicators Model for Volatility Using Intra-Daily Data, nieopublikowany maszynopis.
- Engle R. F. and A. Patton (2004), Impacts of Trades in an Error-Correction Model of Quote Prices, *Journal of Financial Markets*, Vol. 7, No. 4.
- Granger, C. (2003), *Empirical modeling in economics. Specification and Evaluation*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Patton, A (2004), Volatility Forecast Evaluation and Comparison Using Imperfect Volatility Proxies, nieopublikowany maszynopis.
- Taylor S.J., and X. Xu (1997), The incremental volatility information in million foreign ex-change quotations, *Journal of Empirical Finance*, 4, 317-340.