DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Krzysztof Piontek
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Modelowanie warunkowej kurtozy oraz skośności w finansowych szeregach czasowych

1. Wstęp

Z każdym rokiem rośnie liczba propozycji nowych rozwiązań w zakresie modelowania finansowych szeregów czasowych. Kolejnym obszarem, który zwrócił uwagę naukowców i praktyków jest zagadnienie opisu zmiennych w czasie wyższych od drugiego momentów warunkowego rozkładu stóp zwrotu. Rozwiązania te są zazwyczaj naturalnym uogólnieniem modeli klasy *ARMA* oraz *ARCH* i znajdują zastosowanie w analizie portfelowej, wycenie opcji, pomiarze ryzyka np. metodą *VaR*, czy w procedurach zabezpieczania portfela.

Niniejsza praca jest rozszerzeniem dotychczasowych prac autora[1]. Jej celem jest prezentacja możliwych rozwiązań w zakresie modelowania zmiennej w czasie skośności oraz przede wszystkim kurtozy warunkowego rozkładu stóp zwrotu, a także odpowiedź na pytanie, czy wprowadzenie do modelu zmiennego w czasie parametru odpowiedzialnego za kurtozę w sposób istotny wpływa na jakość opisu szeregów stóp zwrotu z rynku polskiego. W niniejszej pracy jako warunkowy rozkład stóp zwrotu, do którego wprowadzono zmienny w czasie parametr, przyjęto rozkład Pearsona typu IV.

2. Podejście standardowe – model *AR-GARCH*

Standardowy model w czasie dyskretnym opisujący szereg prostych stóp zwrotu dany jest następującym równaniem:

---

[1] Por. Piontek (2004), Piontek (2005a), Piontek (2005b)

$$r_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t \,, \tag{1}$$

gdzie: X_t - cena w chwili *t,* μ_t - warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu w chwili *t* ($\mu_t = \mathrm{E}\left[r_t \mid I_{t-1}\right]$), h_t - warunkowa wariancja stopy zwrotu w chwili *t* ($h_t = \mathrm{var}\left[r_t \mid I_{t-1}\right]$), z_t - niezależne, standaryzowane, warunkowe reszty modelu ($z_t = iid\ D(0,1)$), I_{t-1} - informacja dostępna w chwili *t-1*[2].

W dalszej części pracy przyjęto:

- w zakresie opisu warunkowej wartości oczekiwanej – proces $AR(1)$:

$$\mu_t = \mu + \phi r_{t-1} \,, \ |\phi| < 1 \,, \tag{2}$$

- w zakresie opisu warunkowej wariancji – proces $GARCH(1,1)$:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \,, \tag{3}$$
$$\omega > 0 \,, \ \alpha \geq 0 \,, \ \beta \geq 0 \,, \ \alpha + \beta < 1 \,.$$

W modelu warunkowej wariancji zrezygnowano z możliwości opisu efektu dźwigni, ze względu na znaczne skomplikowanie procedury estymacji parametrów przy konieczności spełnienia warunku zapewniającego skończoność bezwarunkowej wariancji w przypadku skośnych rozkładów reszt[3] (w szczególności ze zmiennymi parametrami)

W podstawowej wersji zaproponowanej przez Engle'a i Bollersleva modele heteroskedastyczne cechowały się normalnym warunkowym rozkładem składnika losowego. Kolejne propozycje, uznawane już w chwili obecnej również za standard, wykorzystują uogólniony rozkład błędu (*General Error Distribution, GED*) oraz rozkład t-Studenta, które co prawda są symetryczne, ale umożliwiają opis grubszych ogonów niż dla rozkładu normalnego.

2. Skośne rozkłady warunkowe - Rozkład Pearsona typu IV

Kolejnym krokiem była propozycja wykorzystania odpowiednich rozkładów umożliwiających opis ewentualnej skośności oraz grubych ogonów w warunkowym rozkładzie reszt modelu. Ogólnie wyróżnić można dwie podstawowe grupy rozwiązań: wykorzystanie pewnych skośnych rozkładów (np. Pearsona typu IV czy hiperbolicznego) oraz rozkładów powstałych przez wprowadzenie efektu skośności do dowolnego rozkładu symetrycznego poprzez przekształcenie postaci rozkładu na lewo i prawo od dominanty[4]. W tym drugim podejściu jako rozkład bazowy wykorzystuje się zazwyczaj symetryczny rozkład t-Studenta. Podejście to

---

[2] Por. Bollerslev, Engel, Nelson (1994), Piontek (2004).

[3] Por. Piontek (2005b).

[4] Por. Bond (2001), Hansen (1994), Piontek (2005a), Dark (2005).

prowadzi do uzyskania tzw. skośnych rozkładów Studenta z parametrami odpowiedzialnymi za grubość ogonów oraz za skośność.

W zakresie pierwszego rozwiązania, uwagę badaczy skupił rozkład Pearsona typu IV. Rozkład ten cechuje szereg pozytywnych własności: posiada wprost parametr odpowiedzialny za skośność, jest standaryzowalny oraz zawiera w sobie zarówno rozkład t-Studenta, jak i normalny.

Rozkład Pearsona typu IV opisywany jest następującą postacią funkcji gęstości[5]:

$$f(x;a,q,\delta) = const\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-q}\exp\left[\delta\ \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right], \tag{4}$$

$$const = \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\pi}a\Gamma(q-0,5)}\left|\frac{\Gamma\left(q-\frac{i\delta}{2}\right)}{\Gamma(q)}\right|^2, \tag{5}$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ to funkcja gamma, a i to jednostka urojona.

Podstawowe statystyki opisowe rozkładu Pearsona typu IV dane są poniżej:

- średnia rozkładu:

$$m = \frac{\delta a}{d},\ \text{dla}\ d > 0, \tag{6}$$

- odchylenie standardowe:

$$s = \frac{a}{d}\sqrt{\frac{d^2+\delta^2}{d-1}},\ \text{dla}\ d > 1, \tag{7}$$

- skośność:

$$sk = \frac{4\delta}{d-2}\sqrt{\frac{d-1}{d^2-\delta^2}},\ \text{dla}\ d > 2, \tag{8}$$

- kurtoza:

$$k = \frac{3(d-1)\left[(d+6)\left(d^2+\delta^2\right)-8\delta^2\right]}{(d-2)(d-3)\left(d^2+\delta^2\right)},\ \text{dla}\ d > 3, \tag{9}$$

gdzie $d = 2(q-1)$. (10)

Parametrem δ determinuje skośność rozkładu i obok parametru d wpływa na wszystkie pozostałe statystyki (por. wzory (6)- (10)).

[5] Por. Heinrich (2004), Premaratne, Bera (2001).

Rozkład Pearsona typu IV dany wzorami (4) i (5) nie posiada w ogólności zerowej średniej i jednostkowej wariancji. Niezbędna staje się procedura standaryzacji według wzoru:

$$f(z) = k\, s \left(1 + \left(\frac{s\,z + m}{a}\right)^2\right)^{-q} \exp\left(\delta \operatorname{arctg}\left(\frac{s\,z + m}{a}\right)\right), \tag{11}$$

gdzie m i s zadane są wzorami (6) i (7).

Postać standaryzowanego rozkładu Pearsona typu IV znaleźć można np. w pracy Piontka z 2004 roku. Gęstość $f(z)$ takiego rozkładu nie zależy już od parametru a. Dodatkowo, gdy $\delta = 0$ wzór (11) upraszcza się do postaci standaryzowanego rozkładu t-Studenta.

3. Model *AR-GARCH-P4* ze zmiennymi parametrami warunkowej kurtozy i skośności

W pracy Piontka z 2004 r., prezentującej wykorzystanie warunkowego rozkładu Pearsona typu IV do opisu własności finansowych szeregów stóp zwrotu z rynku polskiego, zastosowano model ze stałymi w czasie parametrami δ oraz q. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, bo model taki uogólnić w taki sposób, by parametry δ oraz q zmieniały się zgodnie z jakimś założonym procesem.

Jako pierwszy podejście takie zastosował Hansen w pracy z 1994 roku w odniesieniu do skośnego rozkładu t-Studenta[6]. Analogicznie można rozszerzyć model oparty na warunkowym rozkładzie Pearsona typu IV.

W podejściu takim zakłada się, że parametry warunkowego rozkładu (δ i q) zależą od łącznej miary napływającej informacji, z którą utożsamia się resztę modelu ε_t. W dalszej części pracy, te zmienne w czasie parametry oznaczane będą poprzez δ_t oraz q_t. Wprowadzenie zmiennych parametrów δ_t oraz q_t skutkuje poprzez wzory (8) i (9) zmienną w czasie skośnością (sk_t) oraz kurtozą (k_t).

W literaturze znaleźć można dwa konkurencyjne podejścia.

W pierwszym[7] - odpowiednimi, stosunkowo prostymi, co do postaci, procesami modelowane są parametry δ_t oraz q_t, co implikuje skomplikowane zależności w procesach sk_t i k_t. Dodatkowo, w ramach tego podejścia, by zagwarantować spełnienie ograniczeń narzuconych na parametry δ_t i q_t (np. $q_t > 1$ dla rozkładu Pearsona) oraz uniknąć problemów numerycznych (np. dla dużych wartości parametrów – por. wzór (5)) stosuje się zazwyczaj przekształcenie oparte na funkcji logistycznej:

---

[6] Por. Hansen (1994), Dark (2005).

[7] Por. Hansen (1994), Jondeau, Rockinger (2000), Premaratne, Bera (2001).

$$y = L + \frac{U - L}{1 + \exp\left[-a\left(y^* - b\right)\right]}, \tag{12}$$

gdzie: U i L to górna i dolna granica zmiennej po przekształceniu, a i b to parametry określające kształt funkcji.

Odpowiedniemu modelowaniu podlegają więc zmienne δ_t^* i q_t^*, które po przekształceniu za pomocą transformacji danej wzorem (12), już jako δ_t i q_t trafiają do wzorów (4)-(11).

Ze względu na stosunkowo niewielką liczbę badań, brak jest jeszcze wypracowanego standardu co do postaci procesów opisujących zmiany parametrów, który zapewniałby zazwyczaj najlepsze dopasowanie modelu do danych. Najczęściej modele zmian parametrów δ_t^* i q_t^* zawierają się w następujących równaniach:

$$\delta_t^* = \gamma_0' + \gamma_1'\varepsilon_{t-1} + \gamma_2'\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_3'\delta_{t-1}^*, \tag{13}$$

$$q_t^* = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1} + \gamma_2\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_3 q_{t-1}^*. \tag{14}$$

Pojawiają się jednak również propozycje, w których reszta modelu $\left(\varepsilon_{t-1}\right)$ zastąpiona jest w równaniach (13) i (14) przez standaryzowaną resztę $\left(z_{t-1}\right)$[8]. Wzory (13) i (14) nie wyczerpują katalogu możliwości. W pracy Premaratne i Bery pojawia się następująca potencjalna propozycja odnośnie parametrów rozkładu Pearsona IV, która jednak nie zostaje poddana badaniu empirycznemu:

$$\delta_t^* = \gamma_0' + \gamma_1'\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right)^3 + \gamma_2'\delta_{t-1}^*, \tag{15}$$

$$q_t^* = \gamma_0 + \gamma_0\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right)^4 + \gamma_0 q_{t-1}^*. \tag{16}$$

Drugim stosowanym rozwiązaniem jest modelowanie odpowiednim procesem zmiennych w czasie wartości k_t i sk_t, a następnie z układu zazwyczaj skomplikowanych równań nieliniowych (por. wzory (8) i (9)) wyznaczanie parametrów δ_t i q_t. Także w tym przypadku nie można mówić o jakiś standardowych rozwiązaniach. Przykładowo Harley i Siddique zaproponowali proces dla zmian warunkowej skośności dany wzorem (17), a Brookes, Burke i Persand proces warunkowej kurtozy zadany poprzez równanie (18):

$$s_t = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^3 + \gamma_2 s_{t-1}, \tag{17}$$

$$k_t = \gamma_0 + \gamma_1\left(\frac{\varepsilon_{t-1}^4}{h_{t-1}}\right) + \gamma_2 k_{t-1}. \tag{18}$$

---

[8] Por. Dark (2005).

W jednym i drugim podejściu modelowane mogą być jednocześnie oba parametry rozkładu δ_t i q_t lub tylko jeden, przy założeniu, że drugi pozostaje stały w czasie. Ponieważ każde kolejne równanie dość znacznie komplikuje zagadnienie, zazwyczaj zakłada się stałość w czasie parametru $\delta_t = \delta$, a skupia się uwagę na opisie zmian parametru q_t zakładając, iż modelowanie zmiennej kurtozy jest istotniejsze od modelowania skośności. O ile tylko $\delta \neq 0$, to zmienny w czasie parametr q_t będzie implikował także zmienną skośność rozkładu warunkowego. Estymacji parametrów modelu dokonuje się najczęściej metodą największej wiarygodności.

W przykładzie empirycznym, wykorzystane zostanie podejście pierwsze, w którym parametr δ_t jest stały w czasie.

4. Przykład empiryczny

Celem przykładu empirycznego jest analiza możliwości wykorzystania modeli klasy *AR-GARCH* dopuszczających zmienną warunkową kurtozę rozkładu Pearsona typu IV do poprawy jakości opisu wybranych szeregów stóp zwrotu z rynku polskiego. Prezentowane badania mają jedynie charakter ilustracyjny i zostaną pogłębione przez autora w dalszych badaniach. Próbę do badań stanowiły szeregi prostych, dziennych stóp zwrotu (liczonych według cen zamknięcia rynku w kolejnych dniach sesyjnych) z następujących instrumentów (spółek, indeksów, walut): Almamarket, Dębica, INGBSK, Kable, Żywiec, WIG, DJIA, EUR, GBP, USD. Wybór analizowanych instrumentów był subiektywny i opierał się na długości szeregów czasowych. Tabela 1 prezentuje między innymi datę odpowiadającą początkowi szeregu oraz liczbę obserwacji. Datą końca szeregu był we wszystkich przypadkach dzień 30.05.2005 roku. Estymacji parametrów analizowanych procesów dokonano za pomocą autorskich procedur napisanych w środowisku MATLAB 6.0.

Wobec braku zgodności co do postaci procesu, jaki powinien opisywać zmiany parametru q_t^*, analizie poddano 4 przykładowe modele:

model A: $q_t^* = \gamma_0 + \gamma_1 z_{t-1} + \gamma_2 z_{t-1}^2 + \gamma_3 q_{t-1}^*$, (19)

model B: $q_t^* = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_3 q_{t-1}^*$, (20)

model C: $q_t^* = \gamma_0 + \gamma_1 z_{t-1}^2 + \gamma_2 z_{t-1}^4 + \gamma_3 q_{t-1}^*$, (21)

model D: $q_t^* = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^4 + \gamma_3 q_{t-1}^*$. (22)

Przyjęto następujące wartości parametrów funkcji ograniczającej (por. wzór (12)): *L*=1,55; *U*=20; *a*=0,4 oraz *b*=9.

Do porównywania modeli zastosowano kryterium informacyjne Akaike'a:

$$AIC = \frac{-2LLF + 2(\text{liczba parametrów modelu})}{\text{liczba obserwacji}}.$$

Tabela 1. prezentuje wartości kryterium *AIC* dla poszczególnych modeli (bez restrykcji nałożonych na parametry $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta$ - łącznie 10 parametrów) i spółek. Dla ułatwienia analizy, obok wartości kryterium przedstawiono również kolejność[9] modeli dla poszczególnych spółek.

Ze względu na subiektywny wybór szeregów czasowych oraz ich ograniczoną liczbę, możliwe jest jedynie wysnucie pewnych ostrożnych wniosków.

Żaden z wybranych modeli (A-D) nie uzyskuje jednoznacznej przewagi nad pozostałymi. Potencjalnie lepsze wydają się być modele A i B, co wynikać może z faktu, iż modele te dopuszczają asymetrię wpływu pozytywnych i negatywnych informacji (składniki $\gamma_1 z_{t-1}$ oraz $\gamma_1 \varepsilon_{t-1}$) na wartość kurtozy rozkładu warunkowego w dniu kolejnym. Hipoteza ta wymaga jednak dokładniejszych badań w celu pełnej weryfikacji. Model D wydaje się być modelem najgorszym, choć i on uzyskał najwyższą ocenę w 1 przypadku. Każdorazowo niezbędna jest więc analiza różnych możliwych postaci modelu procesu parametru odpowiedzialnego za kurtozę warunkowego rozkładu.

Tabela 1. Wartości kryterium *AIC* dla modeli bez restrykcji

instrument	**data początk.**	**liczba obserw.**	***AIC* model A**		***AIC* model B**		***AIC* model C**		***AIC* model D**	
Almamar.	25.07.94	2703	-4.02978	4	**-4.03646**	**1**	-4.03112	3	-4.03276	2
Dębica	24.11.94	2626	-4.93624	2	**-4.93703**	**1**	-4.93608	4	-4.93622	3
INGBSK	25.01.94	2783	-5.02294	2	-5.01748	4	-5.02227	3	**-5.02580**	**1**
Kable	16.04.91	3073	-3.90358	3	**-3.90504**	**1**	-3.90426	2	-3.89195	4
Żywiec	24.09.91	3030	**-4.91896**	**1**	-4.91397	3	-4.91877	2	-4.91394	4
WIG	16.04.91	3082	**-5.38959**	**1**	-5.38902	2	-5.38835	3	-5.38754	4
DJIA	03.01.95	2630	-6.43305	2	-6.42761	3	**-6.43735**	**1**	-6.42675	4
EUR	01.01.99	1628	-7.27258	2	-7.27181	3	**-7.27356**	**1**	-7.27174	4
GBP	04.01.93	3139	**-7.61185**	**1**	-7.59904	3	-7.60000	2	-7.59885	4
USD	04.01.93	3139	**-7.65989**	**1**	-7.65715	3	-7.65849	2	-7.65651	4

Źródło: obliczenia własne.

Do dalszej analizy wybrano 4 instrumenty, dla których najlepszymi okazały się poszczególne modele A-D. Dla każdego z modeli (A-D) wprowadzono następnie szereg przykładowych możliwych restrykcji, co prowadzi do uzyskania w ramach tych podejść modeli od 1 do10. Modele te nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwych kombinacji restrykcji.

Tabela 2. prezentuje poszczególne restrykcje nałożone na modele ogólne oraz wartości kryterium *AIC*. Wartość „0" w kolumnie „restrykcje" oznacza, że dany parametr był estymowany, a „1", że wartość danego parametru ustalona jest na zero. Zaznaczone zostały modele najlepsze z punktu widzenia kryterium *AIC*.

[9] „1" oznacza model najlepszy z punktu widzenia kryterium *AIC*, a „4" – model najgorszy.

W trzech przypadkach (GBP, DJIA, INGBSK) dopuszczenie skośności rozkładu warunkowego w sposób istotny poprawia parametry modeli. Dla spółki ALMAMARKET wprowadzenie skośności nie poprawia modelu.

W przypadku akurat GBP oraz ALMAMARKET nie obserwuje się by uwzględnienie asymetrii wpływu informacji na kurtozę w dniu kolejnym poprawiało jakość modelu (modele A i B).

Dla wszystkich przypadków włączenie czynników z_{t-1}^2 lub ε_{t-1}^2 poprawiało istotnie model. W przypadku z_{t-1}^4 oraz ε_{t-1}^4 wnioski nie są już tak jednoznaczne.

Ostatecznie, co najważniejsze punktu widzenia niniejszej pracy, w każdym przypadku dopuszczenie zmiennej w czasie kurtozy warunkowego rozkładu poprawiało jakość modelu z punktu widzenia kryterium *AIC*.

Tabela 2. Wartości kryterium *AIC* dla wybranych modeli z restrykcjami

model	Restrykcje					liczba param.	AIC GBP	AIC ALMA	AIC DJIA	AIC INGBSK
	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	δ		model A	model B	model C	model D
1	0	0	0	0	0	10	-7.60868	-4.03276	**-6.43354**	-5.02221
2	0	0	0	0	1	9	-7.60795	-4.03336	-6.43269	-5.02075
3	0	0	0	1	1	8	-7.5962	-4.03404	-6.43239	-5.02130
4	0	0	1	0	1	8	-7.59608	-4.02442	-6.42552	-5.02147
5	0	1	0	0	1	8	-7.59811	**-4.03051**	-6.42451	-5.00035
6	0	1	1	1	1	6	-7.59709	-4.02527	-6.42291	-5.00179
7	0	0	0	1	0	9	-7.59652	-4.03342	-6.43309	-5.02281
8	0	0	1	0	0	9	-7.59645	-4.02369	-6.42607	**-5.02292**
9	0	1	0	0	0	9	**-7.60936**	-4.0298	-6.42759	-5.00219
10	1	0	0	0	1	7	-7.59755	-4.02456	-6.42523	-5.00363

Źródło: obliczenia własne.

5. Podsumowanie

Choć wyniki prezentowanych badań w zakresie wykorzystania modeli ze zmienną kurtozą warunkowego rozkładu reszt są zachęcające, należy jednak być ostrożnym w formułowaniu zbyt daleko idących wniosków. Po pierwsze, przebadana próbka jest niezbyt wielka, 10 instrumentów, co nie uprawnia raczej do wydawania kategorycznych sądów.

Pamiętać należy, że zmienny parametr q_t implikuje nie tylko zmienną kurtozę lecz także skośność. Niemniej możliwe jest dalsze komplikowanie modelu, w zakresie zmiennego w czasie parametru δ odpowiedzialnego za skośność.

Warto zaznaczyć również, że wykorzystany w pracy rozkład Pearsona typu IV nie jest jedynym możliwym rozwiązaniem. Przyszłe badania rozszerzone zostaną o wyniki dla innych rozkładów.

Odpowiedź na pytanie, czy komplikowanie standardowej postaci modelu (wprowadzenie zmiennego w czasie parametru q i być może δ, zapewniające istotnie lepszy opis własności modeli szeregów stóp zwrotu z punktu widzenia testów ekonometrycznych) skutkuje (średnio) wymierną poprawą wyników ekonomicznych, stanowić będzie dalszy obszar zainteresowań autora.
Uzyskane wyniki i wnioski mogą być przydatne w prognozowaniu zmienności, wycenie opcji, czy pomiarze ryzyka metodą *Value at Risk.*

Literatura

Bollerslev, T., Engle, R., Nelson, D. (1994), ARCH models, [w:] Engle, MacFadden, *Handbook of econometrics*, North-Holland, Amsterdam.

Bond, S., (2001), A review of asymmetric conditional density functions in autoregressive conditional heteroscedasticity models, [w:] Knight, J., Satchell, S., *Return distributions in finance*, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Brooks, C., Burke, S., Persand, G., (2002), Autoregressive Conditional Kurtosis, ISMA Centre, Business Scholl for Financial Markets, www.ismacentre.rdg.ac.uk/pdf/discussion/DP2002-05.pdf.

Dark, J., (2005), Modelling the Conditional Density using a Hyperbolic Asymmetric Power ARCH model, Department of Econometrics and Business Statistics, Monash University, Australia, www.bus.qut.edu.au/schools/economics/whatson/Documents/JonathanDark.pdf.

Hansen, B., (1994), Autoregressive conditional density estimation, *International Economic Review*, vol. 35, no. 3, 705–730.

Harvey, C., Siddique, A., (1999), Autoregressive Conditional Skewness, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 34, s. 465–487.

Heinrich, J., (2004), A Guide to the Pearson Type IV Distribution, University of Pennsyl-vania, www-cdf.fnal.gov/publications/cdf6820_pearson4.pdf.

Jondeau, E., Rockinger, M. (2000), Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis: Existence and Persistence, Banque de France, www.banque-france.fr/gb/publi/telechar/1-77.htm.

Piontek, K., (2004), Zastosowanie modeli klasy ARCH do opisu własności szeregu stóp zwrotu indeksu WIG, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 1021, EKONOMETRIA, 14, Wrocław, 152–169.

Piontek, K., (2005a), Modelowanie własności szeregów stóp zwrotu – skośność rozkładów, Ekonometria, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, (w druku).

Piontek, K., (2005b), Pomiar i modelowanie skośności rozkładów stop zwrotu - rozkład Pearsona typu IV, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, TAKSONOMIA 12 (w druku).

Premaratne, G., Bera, A. (2001), Modelling Asymmetry and Excess Kurtosis in Stock Return Data, University of Illinois, papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=259009.