DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Daniel Papla
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Wykorzystanie funkcji powiązań w budowie optymalnego portfela na przykładzie wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie

1. Wstęp

Celem artykułu jest przedstawienie próby zastosowania nieklasycznego podejścia w analizie portfelowej. Klasyczne podejście Markowitza zakłada wielowymiarową normalność stóp zwrotu analizowanych papierów wartościowych. Zdecydowana większość badań empirycznych wskazuje jednak, że stopy te nie mają rozkładu normalnego, wyniki sugerują występowanie grubych ogonów i asymetrii. Z tego powodu portfele wyznaczone za pomocą klasycznego podejścia średnia-wariancja są nieefektywne, jeśli zastosujemy alternatywne miary ryzyka, takie, jak np. Conditional Value at Risk (*CVaR*). Jedną z metod pozwalających na poprawę wyników jest zastosowanie nieeliptycznych rozkładów stóp zwrotu, czemu mogą służyć funkcje powiązań. W artykule jako miarę ryzyka portfela zastosowano właśnie *CVaR*.

Artykuł składa się z trzech głównych części. Pierwsza zawiera omówienie metody optymalizacji składu portfela z wykorzystaniem *CVaR* jako miary ryzyka. W drugiej części przestawiono dane wykorzystane do badań emirycznych i omówiono metodologię tych badań. W ostatniej części zaprezentowano wyniki tych badań dla portfeli wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie, zarówno z wykorzystaniem funkcji powiązań i rozkładów α-stabilnych, jak i bardziej tradycyjnego podejścia wykorzystującego wielowymiarowy rozkład normalny.

2. CVaR jako miara ryzyka

Wartość zagrożona (*VaR*) jest jedną z szerzej stosowanych miar ryzyka, zwłaszcza w praktyce, co wynika po części z uregulowań prawnych. Jednakże nie jest ona pozbawiona pewnych wad, z których największą, z punktu widzenia osoby pragnącej zastosować *VaR* w analizie portfelowej, jest to, że *VaR* nie spełnia warunku subaddytywności. Oznacza to, iż *VaR* policzona dla zdywersyfikowanego portfela może być większa niż suma *VaR*-ów wyznaczonych dla instrumentów składowych. Innymi słowy *VaR* nie jest miarą koherentną w sensie Artznera i in. (1999). Miara nie spełniająca warunku subaddytywności nie może być podstawą optymalizacji portfela, której celem jest minimalizacja ryzyka – w wyniku dywersyfikacji zamiast spadku można otrzymać wzrost ryzyka mierzonego taką miarą.

Poza tym badania empiryczne (Rockafellar, Uryasev 2002) wskazują na inne wady *VaR* takie jak jej niestabilność. Ponadto w przypadku rozkładów dyskretnych *VaR* jest niegładką i niewypukłą funkcją wektora stóp zwrotu, często również jest to funkcja wielomodalna. W takim przypadku korzystanie z *VaR* przy optymalizacji portfela staje się niepraktyczne.

Jedną z miar wywodzących się z *VaR*, a posiadających cechy potrzebne w optymalizacji jest warunkowa wartość zagrożona (*conditional value-at-risk – CVaR*), którą można zdefiniować jako warunkową wartość oczekiwaną stóp zwrotu z portfela (lub pojedynczego instrumentu), pod warunkiem że stopy te są mniejsze od β-tego kwantyla rozkładu stóp zwrotu. Ponieważ kwantyl ten to *VaR* na poziomie β, *CVaR* można przedstawić wzorem jako:

$$CVaR_\beta = E\left[R_p \mid R_p \le -VaR_\beta\right]. \tag{1}$$

gdzie: R_p – stopa zwrotu z portfela,
VaR_β – *VaR* portfela na poziomie β,

$$VaR_\beta = -\min\left\{u \in R_p : F(\mathbf{x},u) \ge \beta\right\} = -F^{-1}(\mathbf{x},\beta)\,, \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{x}$ – wektor udziału poszczególnych składników w portfelu,
$F(\mathbf{x},u) = P\{R_p \le u\}$ – dystrybuanta rozkładu stóp zwrotu z portfela.

Ponieważ rozpatrujemy z reguły lewy ogon rozkładu stóp zwrotu, minus we wzorze na *VaR* oznacza, że uzyskujemy wartość dodatnią. Oczywiście większa wartość *VaR* oznacza większe ryzyko.

CVaR jest miarą koherentną w sensie Artznera i in. (1999), co oznacza, że jest również subaddytywna.

3. Minimalizacja *CVaR*

Załóżmy, że dysponujemy portfelem składającym się z n papierów wartościowych. Oznaczmy przez $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ stratę portfela. Jest to funkcja udziałów poszczególnych składników w portfelu **x** i wektora wartości losowych **y**. Wektor **y** reprezentuje niepewność, może to być na przykład wektor losowy stóp zwrotu, które wpływają na stratę portfela w ciągu danego okresu.

Dla każdego **x**, strata $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest jednowymiarową zmienną losową, której rozkład zależy wyłącznie od **y**. Przyjmujemy, że wektor **y** posiada funkcję gęstości, którą oznaczmy $p(\mathbf{y})$. Nie jest konieczne podanie analitycznej postaci tej funkcji, wystarczy jeśli dysponujemy procedurą pozwalającą na wygenerowanie scenariuszy Monte Carlo o rozkładzie $p(\mathbf{y})$. Prawdopodobieństwo, że strata f nie przekroczy pewnego poziomu γ jest zdefiniowane jako:

$$\varphi(\mathbf{x},\gamma)=\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\le\gamma} p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\,. \tag{3}$$

Dla ustalonego **x**, $\varphi(\mathbf{x},\gamma)$ jako funkcja γ, jest dystrybuantą straty związaną ze składem portfela **x**. W ogólności jest to niemalejąca funkcja γ, prawostronnie ciągła. Tu jednak zakładamy dodatkowo, że jest to funkcja obustronnie ciągła, bez skoków.

Korzystając z funkcji $\varphi(\mathbf{x},\gamma)$ *VaR* dla portfela o składzie **x** określony na poziomie β możemy zdefiniować jako

$$VaR_\beta(\mathbf{x})=\min\left\{\gamma\in R:\varphi(\mathbf{x},\gamma)\ge(1-\beta)\right\}. \tag{4}$$

Z kolei *CVaR* dla portfela o składzie **x** i poziomie β można zdefiniować z kolei wzorem:

$$CVaR_\beta(\mathbf{x})=\frac{1}{\beta}\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ge VaR_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\,. \tag{5}$$

Równanie to można przedstawić również w następującej postaci:

$$CVaR_\beta(\mathbf{x})=VaR_\beta(\mathbf{x})+\frac{1}{\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^m}\left[f(\mathbf{x},\mathbf{y})-VaR_\beta(\mathbf{x})\right]^+ p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\,, \tag{6}$$

gdzie $[t]^+ = t$ dla $t > 0$ i $[t]^+ = 0$ dla $t \le 0$.

Model wykorzystany w optymalizacji portfela wykorzystuje następujące liniowe przybliżenie równania (6):

$$F_\beta(\mathbf{x},\gamma)=\gamma+\frac{1}{\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^m}\left[f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\gamma\right]^+ p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\,. \tag{7}$$

W równaniu (7) γ to parametr numeryczny, który w ogólności nie jest równy *VaR*. Można pokazać (Rockafellar, Uryasev 1999), że (7) to wypukła funkcja udziału poszczególnych składników w portfelu **x**. Jest to szczególnie przydatne w rozwiązywaniu problemów optymalizacji w tym przypadku minimalizacji *CVaR*.

Można udowodnić, że (Clemente, Romano 2003):

$$CVaR_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\gamma \in R} F_\beta(\mathbf{x}, \gamma), \tag{8}$$

czyli minimalizując równanie (7) względem γ dla danego $\mathbf{x}$ otrzymujemy minimalną wartość *CVaR*. γ dla którego równanie (8) przyjmuje wartość minimalną jest wtedy równe minimalnemu *VaR* dla portfela o danym składzie $\mathbf{x}$. Innymi słowy minimalizując równanie (7) równocześnie pod względem $\mathbf{x}$, jak i γ otrzymujemy portfel o minimalnym ryzyku mierzonym *CVaR*.

Dalsze uproszczenie wzoru (8) można otrzymać generując q scenariuszy Monte Carlo z rozkładu $p(\mathbf{y})$. Zbiór wygenerowanych scenariuszy zapisujemy jako zbiór q wektorów: $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_q$. Wykorzystując ten zapis wzór (7) można przekształcić do postaci:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x}, \gamma) = \gamma + \frac{1}{q\beta} \sum_{k=1}^{q} \left[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) - \gamma \right]^+ . \tag{9}$$

Równanie (9) jest liniową i wypukłą funkcją γ i jako takie może być optymalizowane numerycznie bez większych problemów. Można udowodnić (Rockafellar, Uryasev 1999), że minimalizacja równania (9) jest równoznaczna wyznaczeniu portfela o minimalnej wartości *CVaR*.

4. Dane i metodologia badań empirycznych

W badaniach empirycznych wykorzystano dzienne logarytmiczne stopy zwrotu dla wybranych spółek z GPW w Warszawie. Spółki te to: BPH, BZWBK, Cersanit, Compland, Dębica, Efekt, Kęty, KGHM, Orbis, PEKAO, Prokom, Softbank, Stalexport, Świecie, TP SA. Dane obejmowały okres od 18-11-1998 r. do 23-05-2005 r., 1630 obserwacji. Były to spółki wchodzące w skład indeksu WIG 20 o największej długość dostępnych szeregów danych.

Ze względu na ograniczenia spowodowane wybraną postacią funkcji powiązań oraz uproszczenie obliczeń portfele wykorzystane w badaniach były jedynie dwuskładnikowe. Oczywistym dalszym kierunkiem badań będzie zwiększenie liczby składników portfela, niestety w tym przypadku funkcje archimedesowskie tracą swoją przydatność. Portfeli tych było 10, ich skład zostanie podany w dalszej części artykułu.

Poziom *VaR* (β) przyjęty w obliczeniach równy jest 0,05.

Jako funkcję straty wykorzystano logarytmiczną stopę zwrotu z portfela przemnożoną przez -1:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(x_1 y_1 + x_2 y_2) = -\mathbf{x}^T \mathbf{y}, \tag{10}$$

gdzie $\mathbf{y}$ to wektor historycznych lub wygenerowanych z danego rozkładu metodą Monte Carlo stóp zwrotu.

Podstawiając (10) do (9) otrzymano funkcję dwóch zmiennych $\mathbf{x}$ i γ, którą optymalizowano dla portfela o zadanych składnikach, otrzymując w wyniku portfel o minimalnym ryzyku mierzonym *CVaR*.

W generowaniu scenariuszy Monte Carlo wykorzystano rozkład α-stabilny i normalny dla rozkładów brzegowych zaś dla rozkładu łącznego (w tym przypadku dwuwymiarowego) zastosowano funkcje powiązań. Omówienie zastosowania rozkładów α-stabilnych w finansach można znaleźć w pracy Mittnik, Rachev (2000).

Zastosowanie funkcji powiązań (copula) pozwala obejść najpoważniejszy problem związany z wykorzystaniem rozkładów wielowymiarowych, a mianowicie nieznajomość postaci analitycznej konkretnego rozkładu stóp zwrotu. Definicję funkcji powiązań oraz omówienie jej charakterystyk można znaleźć m.in. w pracy (Nelsen 1999). Znaczenie funkcji powiązań w analizie zależności wielowymiarowych wynika z twierdzenia Sklara, udowodnionego w pracy Sklara z 1959 r. Nieco prostszą postać Schweizer i Sklar przedstawili w pracy z 1974 r. Z twierdzenia tego wynika, że możemy przybliżać nieznany dwuwymiarowy rozkład łączny funkcją powiązań.

Jeden z pełniejszych przeglądów funkcji powiązań można znaleźć w pracy Nelsena (1999). Tu przedstawiona zostanie jedynie funkcja wykorzystana w badaniach empirycznych, która należy do tzw. funkcji archimedesowskich. Funkcje te można przedstawić przy pomocy ogólnego wzoru:

$$\begin{aligned} &C(u,v) = \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v)), \\ &\psi : [0;1] \to [0;\infty), \quad \psi(1) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

W badaniach empirycznych, których wyniki zamieszczono w dalszej części artykułu wykorzystano kilka funkcji powiązań z wspomnianego przeglądu zamieszczonego w pracy Nelsena (1999) .

1) copula Claytona:

$$\begin{gathered} C(u,v) = \max\left[\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\right], \quad \theta \in [-1,\infty) \setminus 0, \\ \psi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta, \end{gathered} \tag{12}$$

2) copula nr 2:

$$\begin{gathered} C(u,v) = \max\left\{1 - \left[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - 1\right]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right\}, \ \theta \in [1,\infty), \\ \psi(t) = (1-t)^{\theta}, \end{gathered} \tag{13}$$

3) copula Ali-Mikhail-Haq:

$$\begin{gathered} C(u,v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \ \theta \in [-1;1], \\ \psi(t) = \ln\left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t}\right), \end{gathered} \tag{14}$$

4) copula Gumbela:

$$C(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\},\ \theta \in [1,\infty),$$
$$\psi(t) = (-\ln t)^{\theta}, \tag{15}$$

5) copula Franka:

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right),\ \theta \in (-\infty,\infty),$$
$$\psi(t) = -\ln\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}. \tag{16}$$

Należy tu zaznaczyć, że według badań przeprowadzonych m.in. przez autora (Jajuga, Papla 2005), funkcja powiązań Franka najlepiej dopasowywała się do danych finansowych. Chcąc jednak pokazać nieco szerszy obraz i umożliwić większą porównywalność wyników autor zdecydował się zamieścić wyniki również dla innych funkcji powiązań.

Obliczenia przeprowadzono dla:

- stóp historycznych – zbiór wektorów $\mathbf{y}_q$ składał się z 1630 dwuwymiarowych obserwacji historycznych,
- danych wygenerowanych metodą Monte Carlo, gdzie dane z rozkładów brzegowych generowano wykorzystując rozkłady α-stabilne o współczynnikach wyestymowanych z danych historycznych, dane dwuwymiarowe otrzymano stosując funkcję powiązań Franka,
- danych wygenerowanych metodą Monte Carlo, gdzie dane brzegowe pochodziły z rozkładów normalnych o współczynnikach wyestymowanych z danych historycznych, dane dwuwymiarowe otrzymano stosując 5 rodzajów funkcji powiązań,
- danych wygenerowanych metodą Monte Carlo z dwuwymiarowego rozkładu normalnego o współczynnikach wyestymowanych z danych historycznych.

Długość wygenerowanego przy pomocy metody Monte Carlo szeregu losowego wynosiła 10 000 obserwacji dwuwymiarowych dla każdego portfela i każdej funkcji.

5. Wyniki badań empirycznych i ich interpretacja

W tabeli 1 przedstawiono wyniki estymacji parametrów rozkładu α-stabilnego dla stóp zwrotu z poszczególnych akcji.

Tabela 1. Estymacja parametrów – rozkład α-stabilny

	BPH	BZWBK	Cersanit	Compland	Dębica	Efekt	Kęty	KGHM
α	1.7761	1.7934	1.3236	1.6626	1.7069	0.9508	1.6329	1.7956
σ	0.0123	0.0132	0.0095	0.0146	0.0099	0.0090	0.0102	0.0158
β	-0.0760	0.3217	0.1576	0.5035	0.1750	-0.1437	0.1402	0.0729
μ	0.0004	0.0010	0.0026	0.0018	0.0004	0.0181	0.0017	0.0003

	Orbis	PEKAO	Prokom	Softbank	Stalexport	Świecie	TP SA
α	1.7928	1.8202	1.7188	1.6383	1.3718	1.6364	1.7956
σ	0.0123	0.0126	0.0163	0.0171	0.0169	0.0111	0.0148
β	0.5046	0.3402	0.3378	0.2076	-0.0068	0.0965	0.3798
μ	0.0005	0.0010	0.0009	0.0009	-0.0035	0.0011	0.0005

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku każdej spółki wyestymowana wartość współczynnika kształtu α jest mniejsza od 2, co oznacza występowanie grubych ogonów. Jest to szczególnie wyraźnie widoczne w przypadku Efektu (gdzie α jest mniejsza od jedności) i Stalexportu. Wyniki te wskazują, że stosowanie rozkładu normalnego do przybliżania rzeczywistego rozkładu stóp zwrotu może prowadzić do obciążenia wyniku.

Jednakże stosowanie rozkładu α-stabilnego pociąga za sobą pewne trudności obliczeniowe, dlatego autor wykonał również obliczenia, w których rozkłady jednowymiarowe stóp zwrotu przybliżane są rozkładem normalnym. W tabeli przedstawiono wyniki estymacji parametrów rozkładu normalnego.

Tabela 2. Estymacja parametrów – rozkład normalny

	BPH	BZWBK	Cersanit	Compland	Dębica	Efekt	Kęty	KGHM
μ_n	0.0005	0.0006	0.0013	0.0005	0.0002	-0.0001	0.0009	0.0005
σ_n	0.0208	0.0219	0.0242	0.0278	0.0176	0.0291	0.0195	0.0266

	Orbis	PEKAO	Prokom	Softbank	Stalexport	Świecie	TP SA
μ_n	-0.0001	0.0007	-0.0002	-0.0003	-0.0015	0.0010	0.0001
σ_n	0.0204	0.0206	0.0292	0.0328	0.0419	0.0236	0.0244

Źródło: obliczenia własne.

Aby wygenerować dane potrzebne do wyznaczenia minimalnego *CVaR* dla każdego z portfeli metodą Monte Carlo z wykorzystaniem funkcji powiązań należało wyestymować parametr θ odpowiedniej funkcji wykorzystując do tego wartości dystrybuant odpowiednich rozkładów brzegowych. W przypadku copula Franka były to dystrybuanty rozkładów α-stabilnego i normalnego, w przypadku pozostałych funkcji powiązań jedynie rozkładu normalnego. Tabela 3 przedstawia otrzymane wyniki.

Porównując wyniki dla funkcji powiązań Franka dla rozkładów brzegowych α-stabilnego i normalnego widać, że zastosowanie tego pierwszego pociąga za sobą niższą wartość estymatora parametru θ. Jeśli przyjmiemy, że rozkład α-stabilny lepiej modeluje rozkład stóp zwrotu, wtedy ten wynik może oznaczać, że większa wartość współczynnika θ dla rozkładu normalnego, czyli większy stopień zależności może wynikać z gorszego dopasowania. Można również uznać, że w takim przypadku jest to zależność pozorna. Ważny jest jednakże fakt, że niezależnie od rozkładu brzegowego i funkcji powiązań te same pary spółek są najbardziej lub najmniej zależne. Według większości metod największa zależność występuje między parami Compland-KGHM i Orbis-TP SA (pogrubione) a najmniejsza między Efekt-TP SA i Efekt-Kęty.

Tabela 3. Estymacja parametru θ funkcji powiązań

Rozkład brzegowy	α-stabilny	normalny				
Copula	Frank	Frank	Clayton	Nelsen nr 2	Ali-Mikhail-Haq	Gumbel
Portfel						
BPH-Cersanit	0.8275	1.3091	0.0993	2.2032	0.5573	1.0706
BZWBK-Dębica	1.9479	2.4160	0.3936	2.2988	0.8163	1.2047
Compland-KGHM	**2.8985**	**3.5993**	**0.4939**	**2.3690**	**0.8796**	**1.2724**
Efekt-Kęty	0.6742	1.0456	0.0520	2.1857	0.4150	1.0251
Orbis-TP SA	**2.6758**	**3.0864**	**0.4770**	**2.3882**	**0.8450**	**1.2890**
PEKAO-Softbank	2.1998	2.7046	0.2198	2.3506	0.7689	1.2178
Prokom-Świecie	2.0416	2.8904	0.1564	2.3457	0.8261	1.1892
BZWBK-Stalexport	1.3918	1.8913	0.1523	2.1541	0.6897	1.0620
Efekt-TP SA	0.5220	0.6898	0.0429	2.1009	0.3055	1.0000
Cersanit-Prokom	1.3016	2.1091	0.1336	2.2236	0.7245	1.1027

Źródło: obliczenia własne.

Dalsze tabele pokazują wyniki właściwej minimalizacji *CVaR* dla poszczególnych portfeli i dla poszczególnych metod przedstawionych w poprzednim podpunkcie. W tabelach tych w kolumnach *CVaR* i *VaR* zamieszczono minimalne wartości odpowiednich miar ryzyka, zaś w kolumnie z nagłówkiem x_1 zamieszczono udział w portfelu pierwszego składnika (udział drugiego to oczywiście $1 - x_1$). Porównując wartości uzyskane dla stóp istorycznych i dla poszczególnych metod symulacji widać, że najbardziej zbliżone wyniki daje metoda Monte Carlo wykorzystująca funkcję powiązań do symulacji rozkładu dwuwymiarowego. Najmniejsze odchylenia uzyskano dla funkcji powiązań Franka i Claytona, dla normalnego rozkładu brzegowego. Co ciekawe, wykorzystanie rozkładu α-stabilnego nawet nieco pogarsza wyniki, zwłaszcza jeśli chodzi o dopasowanie kompozycji portfela do danych historycznych.

Tabela 4. Portfel o minimalnej wartości *CVaR*

Dane historyczne				Monte Carlo – rozkład α-stabilny i copula Franka			
Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*	Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*
BPH-Cersanit	0.0451	0.6134	0.0539	BPH-Cersanit	0.0396	0.7832	0.0678
BZWBK-Dębica	0.0384	0.3848	0.0489	BZWBK-Dębica	0.0332	0.4545	0.0473
Compland-KGHM	0.0474	0.5223	0.0627	Compland-KGHM	0.0453	0.6000	0.0630
Efekt-Kęty	0.0376	0.3304	0.0557	Efekt-Kęty	0.0199	0.0086	0.0874
Orbis-TP SA	0.0427	0.5523	0.0522	Orbis-TP SA	0.0365	0.7500	0.0500
PEKAO-Softbank	0.0455	0.8182	0.0590	PEKAO-Softbank	0.0390	0.8750	0.0585
Prokom-Świecie	0.0447	0.3869	0.0615	Prokom-Świecie	0.0412	0.4525	0.0672
BZWBK-Stalexport	0.0531	0.8362	0.0624	BZWBK-Stalexport	0.0442	0.9322	0.0615
Efekt-TP SA	0.0510	0.2778	0.0588	Efekt-TP SA	0.0500	0.0364	0.0703
Cersanit-Prokom	0.0377	0.5121	0.0687	Cersanit-Prokom	0.0423	0.3647	0.0771

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5. Portfel o minimalnej wartości *CVaR*

Monte Carlo – dwuwymiarowy rozkład normalny				Monte Carlo – rozkład normalny i copula Franka			
Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*	Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*
BPH-Cersanit	0.0150	0.6871	0.0707	BPH-Cersanit	0.0407	0.5461	0.0465
BZWBK-Dębica	0.0128	0.3232	0.1009	BZWBK-Dębica	0.0355	0.3919	0.0434
Compland-KGHM	0.0115	0.3040	0.1846	Compland-KGHM	0.0547	0.4743	0.0605
Efekt-Kęty	0.0099	0.4225	0.1052	Efekt-Kęty	0.0428	0.2494	0.0479
Orbis-TP SA	0.0128	0.6535	0.1025	Orbis-TP SA	0.0445	0.5671	0.0497
PEKAO-Softbank	0.0119	0.7760	0.1587	PEKAO-Softbank	0.0471	0.7690	0.0526
Prokom-Świecie	0.0109	0.4068	0.1288	Prokom-Świecie	0.0493	0.2894	0.0567
BZWBK-Stalexport	0.0059	0.8764	0.1233	BZWBK-Stalexport	0.0504	0.9213	0.0575
Efekt-TP SA	0.0080	0.5843	0.1319	Efekt-TP SA	0.0480	0.3657	0.0565
Cersanit-Prokom	0.0086	0.6159	0.1268	Cersanit-Prokom	0.0477	0.5875	0.0573

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6. Portfel o minimalnej wartości *CVaR*

Monte Carlo – rozkład normalny i copula Claytona				Monte Carlo – rozkład normalny i copula nr 2 Nelsen			
Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*	Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*
BPH-Cersanit	0.0391	0.6183	0.0477	BPH-Cersanit	0.0162	0.5400	0.0171
BZWBK-Dębica	0.0429	0.2562	0.0477	BZWBK-Dębica	0.0518	0.9148	0.0581
Compland-KGHM	0.0551	0.4563	0.0672	Compland-KGHM	0.0649	0.9733	0.0788
Efekt-Kęty	0.0441	0.3196	0.0493	Efekt-Kęty	0.0693	0.7857	0.0765
Orbis-TP SA	0.0464	0.7556	0.0551	Orbis-TP SA	0.0188	0.5450	0.0193
PEKAO-Softbank	0.0469	0.8766	0.0545	PEKAO-Softbank	0.0482	0.9849	0.0592
Prokom-Świecie	0.0487	0.3489	0.0577	Prokom-Świecie	0.0210	0.4428	0.0220
BZWBK-Stalexport	0.0489	0.8591	0.0593	BZWBK-Stalexport	0.0557	0.9727	0.0636
Efekt-TP SA	0.0488	0.3546	0.0543	Efekt-TP SA	0.0694	0.9783	0.0821
Cersanit-Prokom	0.0508	0.6508	0.0584	Cersanit-Prokom	0.0200	0.5435	0.0207

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 7. Portfel o minimalnej wartości *CVaR*

Monte Carlo – rozkład normalny i copula Ali-Mikhail-Haq				Monte Carlo – rozkład normalny i copula Gumbela			
Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*	Portfel	*VaR*	x_1	*CVaR*
BPH-Cersanit	0.0411	0.5985	0.0459	BPH-Cersanit	0.0384	0.5696	0.0454
BZWBK-Dębica	0.0391	0.3154	0.0445	BZWBK-Dębica	0.0371	0.4054	0.0413
Compland-KGHM	0.0556	0.4867	0.0638	Compland-KGHM	0.0556	0.4321	0.0610
Efekt-Kęty	0.0406	0.2774	0.0471	Efekt-Kęty	0.0383	0.2920	0.0454
Orbis-TP SA	0.0465	0.6656	0.0521	Orbis-TP SA	0.0410	0.6515	0.0492
PEKAO-Softbank	0.0465	0.8250	0.0550	PEKAO-Softbank	0.0451	0.7523	0.0510
Prokom-Świecie	0.0510	0.3518	0.0588	Prokom-Świecie	0.0484	0.4044	0.0556
BZWBK-Stalexport	0.0501	0.9090	0.0591	BZWBK-Stalexport	0.0471	0.8341	0.0556
Efekt-TP SA	0.0479	0.4312	0.0556	Efekt-TP SA	0.0451	0.4137	0.0534
Cersanit-Prokom	0.0504	0.6388	0.0585	Cersanit-Prokom	0.0467	0.5986	0.0536

Źródło: obliczenia własne.

Jednakże jeśli porównujemy wyniki uzyskane za pomocą dwuwymiarowego rozkładu normalnego i funkcji powiązań wyraźnie widać, że te drugie dają wyniki bardziej zbliżone do uzyskanych z wykorzystaniem danych historycznych. Może to świadczyć o tym, że faktyczny wielowymiarowy (w tym przypadku dwuwymiarowy) rozkład stóp zwrotu z akcji na polskiej giełdzie jest nieeliptyczny. Usprawiedliwiałoby to wtedy wykorzystanie *CVaR* jako miary ryzyka.

Charakter przeprowadzonych badań nie pozwala na wyciągnięcie dalej idących wniosków. Jednakże już te przykłady zdają się wskazywać na zasadność dalszej analizy problemu. Celem przyszłych badań autora będzie przede wszystkim powtórzenie analizy dla rozkładów wielowymiarowych, jak również zbadanie innych miar ryzyka, również na danych symulowanych.

Literatura

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999), Coherent Measures of Risk, *Math. Fin.* 9 (3).

Borak, S., Härdle, W., Weron, R. (2004), *Stable Distributions in Finance*, [w:] P. Cìzek, W. Härdle, R. Weron (red.), *Statistical Tools in Finance and Insurance*, Springer Verlag, Berlin.

Di Clemente, A., Romano, C. (2003), Beyond Markovitz: Building Optimal Portfolio Using Non-Elliptical Asset Return Distribution, *Research Paper*, University of Rome.

Jajuga, K., Papla, D. (2005), *Extreme Value Analysis and Copulas*, [w:] P. Cìzek, W. Härdle, R. Weron (red.), *Statistical Tools in Finance and Insurance*. Springer Verlag, Berlin.

Mittnik, S., Rachev, S.T. (2000), *Stable Paretian Models in Finance*, John Wiley & Sons, New York.

Nelsen, R.B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag, New York.

Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (1999), Optimization and Conditional Value-at-Risk, *Research Report* 99-4, Center for Applied Optimization, University of Florida.

Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002), Optimization and Conditional Value-at-Risk for General Distributions, *Journal of Banking and Finance* 26 (7).

Schweizer, B., Sklar, A. (1974), Operations on Distributions Functions not Derivable from Operations on Random Variables, *Studia Mathematica* 52, 43–52.

Sklar, A. (1959), Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris* 8, 229–231.