DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Anna Pajor
Akademia Ekonomiczna w Krakowie

Modelowanie macierzy warunkowych kowariancji za pomocą procesów SV[1]

1. Wprowadzenie

W analizie zjawisk finansowych bardzo ważną rolę odgrywa łączne modelowanie zmienności kilku szeregów stóp zmian (zwrotu) aktywów finansowych. Dość powszechnie stosowane są procesy typu ARCH oraz GARCH, w których macierz warunkowych kowariancji jest zdeterminowane przeszłością procesu (zob. np. Bollerslev, Chou i Kroner (1992), Osiewalski i Pipień (2002, 2004)). Inne podejście do modelowania finansowych szeregów czasowych polega na traktowaniu kowariancji warunkowych jako zmiennych ukrytych. Definiuje się więc tzw. procesy zmienności (wariancji) stochastycznej (ang. *stochastic volatility process, stochastic variance process*, SV), w których, w odróżnieniu od procesów typu ARCH lub GARCH, wariancje i kowariancje warunkowe są procesami ukrytymi, niezdeterminowanymi przeszłością. Niniejszy artykuł jest kontynuacją prac związanych z bayesowskim porównaniem czterech różnych specyfikacji dwuwymiarowych modeli SV (SDF, BSV, JSV, TSV, zob. Pajor (2005b, 2005c)). Rozważane specyfikacje różniły się liczbą procesów ukrytych opisujących macierz warunkowej kowariancji oraz założeniami o współczynniku warunkowej korelacji. Otrzymane wyniki empiryczne dla kursów walutowych (PLN/DEM i PLN/USD, 6.02.1996 – 31.12.2001) wskazały na zdecydowaną przewagę modeli o zmiennym warunkowym współczynniku korelacji (czyli modeli TSV i JSV), przy czym model TSV, w którym do opisu dynamiki zarówno warunkowych wariancji jak i kowariancji użyto trzech procesów ukry-

[1] Praca wykonana w ramach badań statutowych finansowanych przez AE w Krakowie w roku 2005. Autorka dziękuje Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu za cenne uwagi, które przyczyniły się do powstania artykułu.

tych, uzyskał największe prawdopodobieństwo a posteriori. Natomiast modele o stałym warunkowym współczynniku korelacji zostały zdecydowane odrzucone przez dane.

Głównym celem niniejszej pracy jest rozszerzenie przedstawionej uprzednio klasy dwuwymiarowych modeli SV oraz bayesowskie porównanie mocy wyjaśniającej tych modeli w oparciu o czynniki Bayesa. W części drugiej pracy przedstawiono modele bayesowskie będące przedmiotem porównania. Ograniczono się do modeli, które uzyskały największe prawdopodobieństwo a posteriori w poprzedniej analizie (zob. Pajor (2005c)), oraz niektórych ich rozszerzeń. Przedstawione, w części trzeciej, ogólne zasady bayesowskiego porównywania modeli, zostaną wykorzystane do porównania mocy wyjaśniającej dwuwymiarowych modeli SV opisujących zmienność notowań dolara amerykańskiego, marki niemieckiej i euro (część 4). Część piąta zawiera uwagi końcowe i podsumowanie.

2. Dwuwymiarowe modele SV

Niech $\{x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})', t = 0, 1, ..., T\}$ oznacza szereg czasowy cen aktywów finansowych (w niniejszej pracy są to notowania kursów walutowych). Logarytmiczne stopy zmian $\{y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})', t = 1, 2, ..., T\}$, obliczone według formuły (por. Campbell, Lo i MacKinlay (1997)):

$$y_{i,t} = 100\ln(x_{i,t} / x_{i,t-1}), \quad t = 1,...,T, i = 1,2, \tag{1}$$

modelujemy przyjmując strukturę VAR(1):

$$y_t - \delta = R(y_{t-1} - \delta) + \xi_t, \quad t = , 1, ..., T \tag{2}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{bmatrix},$$

gdzie $\{\xi_t\}$ jest dwuwymiarowym procesem SV. Ograniczamy się do procesów SV o warunkowym rozkładzie normalnym, a więc $\xi_t \mid \Theta_t \sim N(0_{[2\times1]}, \Sigma_t)$, gdzie Θ_t jest wektorem zmiennych ukrytych. Przedstawione poniżej różne specyfikacje modelu SV będą różniły się założeniami o wektorze zmiennych ukrytych Θ_t oraz strukturą macierzy warunkowych kowariancji Σ_t.

Aby rozważane modele były kompletne, konieczna jest specyfikacja rozkładów a priori dla parametrów tych modeli. Dla parametrów „wspólnych”, a więc wektora $\omega = (\delta_1, \delta_2, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22})' \in \mathrm{R}^6$ przyjęto standardowy rozkład normalny, ucięty restrykcją, że wektory własne macierzy R co do modułu są mniejsze od jeden: $\omega \sim N_6(0, I_6)I_C(R)$, gdzie C = $\{R$: wartości własne macierzy R co do modułu są mniejsze od 1$\}$. Symbol $N_p(a, A)$ oznacza p-wymiarowy rozkład normalny o wektorze średnich a i macierzy kowariancji A, $I_C(\cdot)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru C.

2.1. Model TSV

Definicja 1. Proces stochastyczny $\{\xi_t,\ t \in \mathsf{Z}\}$ jest dwuwymiarowym procesem TSV wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_t \mid \Theta_t \sim N(0_{[2\times1]}, \Sigma_t)$, $\Sigma_t = L_t\, G_t L_t'$,

$$L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21,t} & 1 \end{bmatrix},\ G_t = \begin{bmatrix} q_{11,t} & 0 \\ 0 & q_{22,t} \end{bmatrix},$$

$$\ln q_{11,t} - \gamma_{11} = \phi_{11}(\ln q_{11,t-1} - \gamma_{11}) + \sigma_{11}\eta_{11,t},$$

$$\ln q_{22,t} - \gamma_{22} = \phi_{22}(\ln q_{22,t-1} - \gamma_{22}) + \sigma_{22}\eta_{22,t},$$

$$q_{21,t} - \gamma_{21} = \phi_{21}(q_{21,t-1} - \gamma_{21}) + \sigma_{21}\eta_{21,t},$$

gdzie $\eta_t = (\eta_{11,t}, \eta_{22,t}, \eta_{21,t})'$, $\eta_t \sim iiN(0_{[3\times1]}, I_3)$, $\Theta_t = (q_{11,t}, q_{22,t}, q_{21,t})'$, $t \in \mathsf{Z}$, $\mathsf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

W definicji procesu TSV wykorzystano dekompozycje Choleskiego macierzy Σ_t (zob. Tsay (2002)). Dekompozycję ta gwarantuje dodatnią określoność macierzy Σ_t bez nakładania dodatkowych restrykcji na parametry lub zmienne ukryte. Wystarczyło przyjąć jedynie, że $\ln q_{ii,t}$, nie zaś bezpośrednio zmienna $q_{ii,t}$. ($i = 1, 2$), podlega procesowi autoregresyjnemu rzędu pierwszego. Macierz warunkowych kowariancji jest tutaj funkcją trzech zmiennych ukrytych $q_{11,t}$, $q_{22,t}$, $q_{21,t}$:

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{22,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11,t} & q_{11,t}q_{21,t} \\ q_{11,t}q_{21,t} & q_{11,t}q_{21,t}^2 + q_{22,t} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Zatem proces ten charakteryzuje się niezerową, zmienną w czasie, stochastyczną warunkową korelacją. W chwili t, podobnie jak wariancje warunkowe, jest zmienną losową, niezdeterminowaną przeszłością procesu:

$$\rho_{21,t} = \frac{q_{11,t}q_{21,t}}{\sqrt{(q_{11,t}q_{21,t}^2 + q_{22,t})q_{11,t}}}. \tag{4}$$

Dla parametrów „swoistych” modelu TSV przyjmujemy następujące niezależne rozkłady a priori (zob. Pajor (2005c)): $\beta_{(ij)} \sim N_2(0,\ 100I_2)I_{(-1,1)}(\phi_{ij})$, $\beta_{(ij)}=(\gamma_{ij}, \phi_{ij})'$, $\sigma_{ij}^2 \sim IG(1,\ 0{,}005)$, $\ln q_{ii,0} \sim N_1(0,\ 100)$, $i, j = 1, 2$, $i \geq j$, $q_{21,0} \sim N_1(0,\ 100)$.

Wektory $\beta_{(ij)}$ (i, j=1, 2; $i \geq j$) mają a priori rozkłady normalne ucięte na drugiej współrzędnej (aby proces TSV był stacjonarny). Parametry σ_{ij}^2 (i, j=1, 2; $i \geq j$) mają odwrócony rozkład gamma, którego zarówno wartości średnie, jak i wariancja nie istnieją (por. jednowymiarowy model SV: Pajor (2003)). Symbol $IG(a,\ b)$ oznacza bowiem gęstość odwróconego rozkładu gamma ze średnią $b/(a-1)$ (dla $a > 1$) i wariancją $b^2/[(a-1)^2(a-2)]$ (dla $a > 2$). Wartości początkowe procesów $\{\ln q_{ii,t}\}$ ($i = 1, 2$) oraz $\{q_{21,t}\}$, oznaczone odpowiednio przez $\ln q_{ii,0}$, $q_{21,0}$, traktowane są jako dodatkowe nieznane parametr modelu - przyjmujemy dla niech a priori rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji równej 100.

2.2. Model JSV(2)

Zauważmy, że w modelu TSV wariancje warunkowe nie są modelowane symetrycznie. Warunkowa wariancja drugiej składowej procesu zależy od warunkowej wariancji pierwszej składowej. Kolejność modelowanych szeregów czasowych może więc mieć wpływ na „moc wyjaśniającą" modelu oraz wnioskowanie o warunkowych wariancjach i kowariancji. W kolejnych rozważanych modelach wariancje warunkowe będą modelowane symetrycznie. Zakładamy teraz, że zmiennymi ukrytymi są wartości własne macierzy warunkowych kowariancji Σ_t, zob. Pajor (2005c). W definicji procesu JSV(2) wykorzystamy bowiem twierdzenie Jordana o zmianie bazy (twierdzenie o tzw. postaci jordanowskiej macierzy kwadratowej, zob. Gancarzewicz (1993)).

Definicja 2. Proces stochastyczny $\{\xi_t,\ t \in Z\}$ jest dwuwymiarowym procesem JSV(2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_t \mid \Theta_t \sim N(0_{[2\times1]}, \Sigma_t)$, $\Sigma_t = P\,\Lambda_t P^{-1}$,

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} \lambda_{1,t} & 0 \\ 0 & \lambda_{2,t} \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} w_{11} & \sqrt{1-w_{11}^2} \\ \sqrt{1-w_{11}^2} & -w_{11} \end{bmatrix},\ w_{11} \in (0,1],$$

ponadto

$$\ln\lambda_{1,t} - \gamma_{11} = \phi_{11}(\ln\lambda_{1,t-1} - \gamma_{11}) + \sigma_{11}\eta_{1,t},$$

$$\ln\lambda_{2,t} - \gamma_{22} = \phi_{22}(\ln\lambda_{2,t-1} - \gamma_{22}) + \sigma_{22}\eta_{2,t},$$

gdzie $\eta_t = (\eta_{1,t}, \eta_{2,t})'$, $\eta_t \sim iiN(0_{[2\times1]}, I_2)$, $\Theta_t = (\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t})'$.

Macierz Λ_t jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne macierzy Σ_t, natomiast macierz P jest tzw. macierzą przejścia z bazy kanonicznej[2] do bazy Jordana (inaczej macierzą sprowadzającą Σ_t do postaci diagonalnej). Jest to macierz nieosobliwa, zawierająca wektory własne Σ_t. Ponieważ macierz Σ_t jest symetryczna, dodatkowo założono, że macierz P jest ortogonalna tzn. $P'P=I_2$. Macierz warunkowych kowariancji jest teraz definiowana za pomocą dwóch procesów ukrytych i jednego parametru:

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \lambda_{1,t}w_{11}^2 + \lambda_{2,t}(1-w_{11}^2) & (\lambda_{1,t}-\lambda_{2,t})w_{11}\sqrt{1-w_{11}^2} \\ (\lambda_{1,t}-\lambda_{2,t})w_{11}\sqrt{1-w_{11}^2} & \lambda_{2,t}w_{11}^2 + \lambda_{1,t}(1-w_{11}^2) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Warunkowy współczynnik korelacji jest postaci:

$$\rho_{21,t} = \frac{(\lambda_{1,t}-\lambda_{2,t})w_{11}\sqrt{1-w_{11}^2}}{\sqrt{(\lambda_{1,t}-\lambda_{2,t})^2 w_{11}^2(1-w_{11}^2) + \lambda_{1,t}\lambda_{2,t}}}. \tag{6}$$

[2] Baza kanoniczna w R^2: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

Przyjmujemy następujące rozkłady a priori parametrów modelu JSV(2): $\beta_{(ii)} \sim N_2(0,\ 100\ I_2)\ I_{(-1,1)}(\phi_{ii})$, $\beta_{(ii)} = (\gamma_{ii},\ \phi_{ii})'$, $\sigma_{ii}^2 \sim IG(1,\ 0{,}005)$, $\ln\lambda_{i,0} \sim N_1(0,\ 100)$, $i = 1, 2$, $w_{11} \sim U(0,1)$ (tj. rozkład jednostajny na przedziale (0,1)).

2.3. Model JSV(3)

Naturalnym uogólnieniem modelu JSV(2) jest uzmiennienie parametru w_{11}.

Definicja 3. Proces stochastyczny $\{\xi_t,\ t \in Z\}$ jest dwuwymiarowym procesem JSV(3) wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_t \mid \Theta_t \sim N(0_{[2\times1]}, \Sigma_t)$, $\Sigma_t = P_t\, \Lambda_t\, P_t^{-1}$,

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} \lambda_{1,t} & 0 \\ 0 & \lambda_{2,t} \end{bmatrix},\ P_t = \begin{bmatrix} w_{11,t} & \sqrt{1-w_{11,t}^2} \\ \sqrt{1-w_{11,t}^2} & -w_{11,t} \end{bmatrix},$$

ponadto

$$\ln\lambda_{1,t} - \gamma_{11} = \phi_{11}(\ln\lambda_{1,t-1} - \gamma_{11}) + \sigma_{11}\eta_{11,t},$$

$$\ln\lambda_{2,t} - \gamma_{22} = \phi_{22}(\ln\lambda_{2,t-1} - \gamma_{22}) + \sigma_{22}\eta_{22,t},$$

$$\ln[w_{11,t}/(1-w_{11,t})] - \gamma_{21} = \phi_{21}(\ln[w_{11,t-1}/(1-w_{11,t-1})] - \gamma_{21}) + \sigma_{21}\eta_{21,t},$$

$$\eta_t = (\eta_{11,t}, \eta_{22,t}, \eta_{21,t})',\ \eta_t \sim iiN(0_{[3\times1]}, I_3),\ \Theta_t = (\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}, w_{11,t})'.$$

Podobnie jak w modelu JSV(2) przyjmujemy następujące rozkłady a priori: $\beta_{(ij)} \sim N_2(0,\ 100\ I_2)\ I_{(-1,1)}(\phi_{ij})$, $\beta_{(ij)} = (\gamma_{ij},\ \phi_{ij})'$, $\sigma_{ij}^2 \sim IG(1,\ 0{,}005)$, $\ln\lambda_{i,0} \sim N_1(0,\ 100)$, $i, j = 1, 2$, $i \geq j$, $\ln[w_{11,0}/(1-w_{11,0})] \sim N_1(0,\ 100)$.

Liczba zmiennych ukrytych opisujących elementy macierzy warunkowych korelacji w modelu JSV(3) równa liczbie zmiennych ukrytych występujących w modelu TSV (a więc trzy elementy macierzy Σ_t są opisane trzema procesami ukrytymi). W przeciwieństwie do modelu TSV wariancje warunkowe są tutaj „traktowane” symetrycznie, a więc nie ma znaczenia kolejność modelowanych szeregów czasowych.

3. Bayesowskie porównanie modeli

Na gruncie bayesowskim podstawowym kryterium porównawczym modeli jest prawdopodobieństwo a posteriori modelu. Model, który uzyska największe prawdopodobieństwo a posteriori ma największą moc wyjaśniającą spośród rozważanych modeli bayesowskich (dane najsilniej „przemawiają” za tym modelem). Załóżmy, że $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ ($n \in N$) to kompletny zbiór modeli, parami wykluczających się. Niech $y = (y_1, y_2, \ldots, y_T)$ oznacza macierz obserwacji. Niech ponadto $p(M_1)$, $p(M_2)$, ... , $p(M_n)$ będą prawdopodobieństwami a priori tych modeli. Wówczas prawdopodobieństwa a posteriori są równe:

$$p(M_i \mid y) = p(M_i)p(y \mid M_i) / \sum_{j=1}^{n} p(M_j)p(y \mid M_j),\ i \in \{1, 2, ..., n\},$$

gdzie $p(y \mid M_i)$ jest brzegową gęstością macierzy obserwacji w modelu M_i.

Porównując modele parami wykorzystuje się tzw. czynnik Bayesa: $B_{ij} = p(y \mid M_i)/p(y \mid M_j)$, który przy jednakowych prawdopodobieństwach a priori modeli jest równy ilorazowi szans a posteriori: $p(M_i \mid y)/p(M_j \mid y)$. Do obliczenia wartość brzegowej gęstości macierzy obserwacji stosujemy metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa (MCMC). Mając próbę pseudolosową z rozkładu a posteriori, wartość brzegowej gęstości macierzy obserwacji jest aproksymowana stosowną średnią harmoniczną (zob. Newton i Raftery (1994), Pajor (2005c)).

4. Wyniki empiryczne

Przedmiotem rozważań są dwa badane wcześniej kursy walutowe PLN/USD i PLN/DEM (6.02.1996 – 31.12.2001, T = 1482) oraz PLN/USD i PLN/EUR (2.01.2002 – 31.12.2004, T = 758), a analiza ograniczona została do procesów dwuwymiarowych o zmiennym warunkowym współczynniku korelacji. W niniejszej pracy rozważamy cztery modele bayesowskie: TSV_{USD_DEM} (M_1) (odpowiednio TSV_{USD_EUR} w przypadku kursów PLN/USD i PLN/EUR) i TSV_{DEM_USD} (M_2) (odpowiednio TSV_{EUR_USD}), model JSV(2) (M_3) i model JSV(3) (M_4). Modele TSV_{USD_DEM} (odpowiednio TSV_{USD_EUR}) i TSV_{DEM_USD} (odpowiednio TSV_{EUR_USD}) różnią się kolejnością modelowanych szeregów czasowych. W modelu TSV_{USD_DEM} pierwsza składowa wektora y_t odpowiada notowaniom dolara amerykańskiego, zaś druga składowa notowaniom marki niemieckiej (tak jest również w modelach JSV(2) i JSV(3)). W modelu TSV_{DEM_USD} kolejność modelowanych szeregów jest odwrotna. Natomiast w modelu TSV_{USD_EUR} pierwsza składowa wektora y_t odpowiada notowaniom dolara amerykańskiego, zaś druga notowaniom euro.

Table 1. Logarytmy dziesiętne czynników Bayesa w stosunku do modelu JSV(3)

Model	Liczba procesów ukrytych	Liczba parametrów	$\text{Log}_{10}(B_{JSV(3)\,i})$ PLN/USD, PLN/DEM (6.02.1996 – 31.12.2001)	$\text{Log}_{10}(B_{JSV(3)\,i})$ PLN/USD, PLN/EUR (2.01.2002 – 31.12.2004)
TSV_{USD_DEM} (TSV_{USD_EUR})	3	18	5.326	0.400
TSV_{DEM_USD} (TSV_{EUR_USD})	3	18	24.303	0.263
JSV(2)	2	15	20.505	9.168
JSV(3)	3	18	0	0
SDF	1	12	97.370	21.078
BSV	2	14	128.487	47.711

Źródło: obliczenia własne

Tabela 1 przedstawia logarytmy dziesiętne czynników Bayesa w stosunku do modelu JSV(3)[3]. Dla porównania zamieściliśmy również modele, które były rozważane w naszych poprzednich pracach (SDF i BSV – o stałym lub zerowym warunkowym współczynniku korelacji). Uzyskane wyniki pokazują, że prawdopodobieństwo a posteriori modelu TSV zależy od kolejności modelowanych szeregów. Model TSV_{USD_DEM} uzyskał prawdopodobieństwo a posteriori o około 24 rzędy wielkości wyższe niż model TSV_{DEM_USD} (dla danych z okresu: 6.02.1996 – 31.12.2001). Prawdopodobnie jest to spowodowane tym, że zmienność wariancji warunkowej stóp zmian notowań marki niemieckiej (mierzona kwadratem współczynnika zmienności CV, zob. Pajor (2003)) była, w badanym okresie, wyższa niż warunkowej wariancji stóp zmian notowań dolara amerykańskiego. Model TSV, w którym szereg charakteryzujący się mniejszą zmiennością wariancji warunkowej traktowany jest jako realizacja pierwszej składowej procesu, może być lepiej „dopasowany" do danych. Ponadto model TSV $_{DEM\_USD}$ jest mniej prawdopodobny a posteriori niż model JSV(2) (model z dwoma procesami ukrytymi). Zatem nie tylko liczba procesów ukrytych wpływa na prawdopodobieństwo a posteriori modelu, ale również sposób modelowania macierzy warunkowych kowariancji. Najsłabiej wypadają modele o zerowym lub stałym warunkowym współczynniku korelacji. W przypadku rozważanych danych największą moc wyjaśniającą uzyskał model JSV(3), w którym, podobnie jak w przypadku modelu TSV, macierz warunkowych kowariancji opisana jest za pomocą trzech procesów ukrytych. W przeciwieństwie do modelu TSV wariancje warunkowe modelowane są symetrycznie (nie ma znaczenia kolejność modelowanych szeregów). Jednak uogólnienie modelu JSV(3) na przypadek wyżej niż dwuwymiarowy nie jest tak proste jak modelu TSV.

Znacznie mniejsze różnice w logarytmach czynników Bayesa uzyskaliśmy dla notowań dolara amerykańskiego i euro (długość modelowanych szeregów jest w tym przypadku prawie o połowę krótsza, stąd dane słabiej „opowiadają się" za danym modelem). Zmienił się również ranking modeli – największą moc wyjaśniającą mają modele z trzema procesami ukrytymi.

5. Podsumowanie

Celem pracy była prezentacja i porównanie dwuwymiarowych procesów wariancji stochastycznej (SV) w analizie zmienności i korelacji warunkowej finansowych szeregów czasowych. Wyniki empiryczne, otrzymane w oparciu o szereg dziennych stóp zmian dolara amerykańskiego i marki niemieckiej (6.02.1996 – 31.12.2001) oraz dolara amerykańskiego i euro (2.01.2002 – 31.12.2004) pokazały, iż w modelowaniu zmienności dwóch szeregów czaso-

[3] Prezentowane wyniki otrzymano wykorzystując metody MCMC – algorytm Gibbsa, wewnątrz którego stosowano algorytm Metropolisa i Hastingsa – wykonano 550000 losowań (cykli Gibbsa), w tym 50000 cykli spalonych. Metody te są omówione w pracach: O'Hagan (1994), Gamerman (1997), Jacquier, Polson i Rossi (1999), Tsay (2002), Pajor (2003, 2005a).

wych bardzo ważne jest uwzględnienie niezerowego i zmiennego warunkowego współczynnika korelacji. Zależność między badanymi szeregami czasowymi najlepiej opisują modele, które uwzględniają zmienną w czasie korelację warunkową oraz modele o liczbie zmiennych ukrytych równej liczbie różnych elementów macierzy warunkowych kowariancji tj. model TSV (z właściwą kolejnością modelowanych szeregów), i JSV(3).

Literatura

Bollerslev, T., Chou, R.Y., Kroner, K.F. (1992), ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Emprical Evidence, *Journal of Econometrics*, vol. 52, 5–59.

Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Chichester.

Gamerman, D., (1997), *Markov Chain Monte Carlo. Statistic simulation for Bayesian inference*, Chapman and Hall, London.

Gancarzewicz, J., (1993), *Algebra liniowa z elementami geometrii*, Wydanie drugie poprawione, Skrypty uczelniane, nr 675, Drukarnia Uniwersytety Jagiellońskiego w Krakowie, Kraków.

Jacquier, E., Polson, N., Rossi, P. (1999), *Stochastic Volatility: Univariate and Multivariate Extensions*, Cahiers Cirano, Centre Interuniversitaire de Recherche en Analyse des Organisations, Montréal.

Newton, M.A., Raftery, A.E. (1994), Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 56, No. 1, 3–48.

O'Hagan, A. (1994), *Bayesian Inference*, Halsted Press, New York.

Osiewalski, J., Pipień, M. (2002), Multivariate ARCH – Type Models: A Bayesian Comparison, *Dynamic Econometric Models*, vol. 5, ed. Zieliński Z., Toruń.

Osiewalski, J., Pipień, M. (2004), Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland, *Journal of Econometrics,* vol. 123, 371–391.

Pajor, A. (2003), *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Monografie: Prace Doktorskie, Nr 2, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków.

Pajor, A. (2005a), Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Model and Portfolio Allocation*,* [w:] Issues in Modelling, Forecasting and Decision-Making in Financial Markets, (*Acta Universitatis Lodzensis – Folia Oeconomica*, Łódź (w druku).

Pajor, A. (2005b), Dwuwymiarowe procesy SV w bayesowskiej analizie portfelowej, *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych.* Piąte Warsztaty Doktorskie z Ekonometrii i Statystyki (red. A. Welfe), Wydawnictwo SGH w Warszawie (w druku).

Pajor, A. (2005c), Bayesian comparison of bivariate SV models for two related time series, *Acta Universitatis Lodziensis - Folia Oeconomica,* (referat wygłoszony na Thirty First International Conference Macromodels'2004, December 1–4, 2004, Bełchatów, Poland i przesłany do recenzji).

Tsay, R. S. (2002), *Analysis of Financial Time Series. Financial Econometrics*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, INC.