

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Mateusz Pipień

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

Wykorzystanie rozkładów predyktywnych w prognozie VaR i rezerw kapitałowych związanych z ryzykiem rynkowym

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest prezentacja rezultatów zastosowania wnioskowania bayesowskiego w prognozie wartości narażonej na ryzyko (ang. Value at Risk; *VaR*). Prezentujemy wykorzystanie rozkładów predyktywnych do prognozy *VaR* oraz porównanie jakości prognoz wygenerowanych z różnych modeli zmienności. Zastosowane zostaną bayesowskie modele AR-GARCH(1,1) z asymetriami o warunkowym skośnym- t lub α -stabilnym rozkładzie prawdopodobieństwa; por. Osiewalski i Pipień (2003) oraz Pipień (2005a i b). Rozważamy także modele stanowiące – na gruncie bayesowskim – reinterpretację metod szacowania Value-at-Risk, które wykorzystuje się najczęściej w praktyce; por. Rachev i Mittnik (2002), Jajuga, Kuziak, Papla i Rokita (2001). Celem badań jest sprawdzenie, czy rozkłady predyktywne dostarczają adekwatnych i użytecznych prognoz *VaR*.

Jednym z podstawowych zastosowań Value-at-Risk jest określenie adekwatności kapitałowej, instytucji narażonych na ryzyko rynkowe, zgodnie z nowymi zaleceniami Bazylejskiego Komitetu do spraw Nadzoru Bankowego. W niniejszym opracowaniu prezentujemy rezultaty szacunku rezerw kapitałowych związanych z ryzykiem walutowym kursu PLN/USD, które zostały uzyskane z różnych modeli zmienności. W szczególności, ocenie zostaje poddana zdolność prognozowania rezerw przez modele GARCH oraz modele bayesowskie technik najczęściej stosowanych w praktyce.

2. Predyktywne ujęcie wartości narażonej na ryzyko

Przy zaobserwowaniu (do chwili t) wektora logarytmicznych stóp zmian rozważanego instrumentu $y^{(t)}=(y_1, \dots, y_t)$ oraz dla wektora stóp zmian podlegających w chwili t prognozie $y_t^f=(y_{t+1}, \dots, y_{t+n})$, założmy, że dysponujemy modelem próbkowym badanego zjawiska zmienności stóp y_j :

$$p(y^{(t)}, y_t^f | M_i, \theta, \eta_i) = \prod_{j=1}^{t+n} p(y_j | M_i, \psi_{j-1}, \theta, \eta_i).$$

Po przyjęciu rozkładu a priori parametrów – $p(\theta, \eta_i | M_i)$ – założmy, że niepewność o parametrach modelu (θ, η_i) , jak i wielkościach prognozowanych rozważanego zjawiska opisuje model bayesowski M_i :

$$p(y^{(t)}, y_t^f | M_i, \theta, \eta_i) \cdot p(\theta, \eta_i | M_i).$$

Z łącznego rozkładu wielkości obserwowalnych i parametrów możemy uzyskać rozkład y_{t+n} , warunkowy względem posiadanych w chwili t danych ($y^{(t)}$) oraz modelu M_i , a więc rozkład opisujący niepewność co do wartości stopy zmian w przyszłości, $p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_i)$. Jest to rozkład brzegowy z łącznego rozkładu predyktywnego wektora prognozowanych stóp zwrotu $y_t^f=(y_{t+1}, \dots, y_{t+n})$, danego formułą:

$$p(y_t^f | y^{(t)}, M_i) = \int p(y_t^f | M_i, y^{(t)}, \theta, \eta_i) p(\theta, \eta_i | y^{(t)}, M_i) d\theta d\eta_i. \quad (1)$$

Mając określony rozkład $p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_i)$ definiujemy $VaR_t(\alpha, n | M_i)$ jako minus kwantyl rzędu α :

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha, n | M_i)} p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_i) = \alpha \quad (2)$$

i nazywamy predyktywną wartością narażoną na ryzyko obliczoną w chwili t (warunkowo względem $y^{(t)}$) o poziomie istotności (tolerancji na stratę) α i horyzoncie czasowym prognozy n . Wielkość $VaR_t(\alpha, n | M_i)$ określa maksymalną stratę na wartości instrumentu o cenie x_j , która ma szansę zaistnieć po n okresach (od chwili t) z prawdopodobieństwem predyktywnym (w modelu M_i) równym α . Własności tak przyjętej definicji VaR opisuje Pipień (2005a i b).

Najważniejszym współczesnym zastosowaniem koncepcji wartości narażonej na ryzyko jest kontrola adekwatności kapitałowej instytucji finansowej. Zasady określania rezerw kapitałowych, opracowane przez Komitet Bazylejski, umożliwiają instytucji finansowej posiadanie własnego narzędzia (modelu) prognozy wartości narażonej na ryzyko (ang. internal model approach; por Hendricks i Hirtle (1997), Rachev i Mittnik (2002)). Przepisy dostarczają jednej, znormalizowanej formuły na rezerwy kapitałowe, które w pełni bazują na prognozach VaR . Wykorzystując koncepcję predyktywnej wartości narażonej na ryzyko, w chwili t , rezerwy C_t są określone następującą formułą:

$$C_t = A_t \max \left\{ \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}(0.01, 10 | M_i), VaR_t(0.01, 10 | M_t) \right\}, \quad (3)$$

gdzie A_t jest słabo rosnącą funkcją o wartościach z przedziału $[3, 4]$ szczegółowo opisaną w pracach Hendricks i Hirtle (1997) oraz Pipień (2005a i b).

3. Ocena prognoz VaR

W badaniach empirycznych, w celu porównania jakości prognoz VaR, wykorzystujemy test Kupca, który jest oparty na następującej statystyce ilorazu wiarygodności:

$$LR = 2 \ln[(1 - \hat{\alpha})^{T'+1-S} \hat{\alpha}^S] - 2 \ln[(1 - \alpha)^{T'+1-S} \alpha^S], \quad S = \sum_{t=T}^{T+T'} \xi_t, \quad (4)$$

gdzie $\hat{\alpha}$ to ocena prawdopodobieństwa sukcesu,

$$\hat{\alpha} = \frac{S}{T'+1} = \frac{1}{T'+1} \sum_{t=T}^{T+T'} \xi_t, \quad (5)$$

następującej zmiennej losowej ξ_t :

$$\xi_t = \begin{cases} 0 & \text{gd}y \quad y_{t+n} \geq VaR_t(\alpha, n | M_t) \quad z \quad \text{prawd.} \quad 1 - \bar{\alpha} \\ 1 & \text{gd}y \quad y_{t+n} < VaR_t(\alpha, n | M_t) \quad z \quad \text{prawd.} \quad \bar{\alpha}. \end{cases}$$

Przy zadanym poziomie istotności $\alpha\%$, mówimy, że model M_i generuje „odpowiednie” prognozy Value-at-Risk (jest akceptowalnie odpowiedni; ang. acceptably accurate por. Kupiec 1995, Lopez 1999) jeśli brak jest podstaw do odrzucenia $H_0: \bar{\alpha} = \alpha$. Możliwość odrzucenia H_0 powoduje, iż – w ramach kryterium Kupca – model generujący prognozy Value-at-Risk jest „nieodpowiedni” (ang. inaccurate; por. Kupiec 1995, Lopez 1999). Z Centralnego Twierdzenia Granicznego zastosowanego dla ciągu zmiennych $\{\xi_t, t=T, T+1, \dots, T+T'\}$ uzyskujemy, iż:

$$\sqrt{T'+1} \left(\sum_{t=T}^{T+T'} (\xi_t - \bar{\alpha}) \right) \xrightarrow{T' \rightarrow +\infty} N(0, \bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha})). \quad (6)$$

A zatem małopróbkowa ocena wariancji asymptotycznego rozkładu estymatora (5) ma postać:

$$d^2(\hat{\alpha}) = \frac{(\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}))^2}{T'+1}, \quad (7)$$

co prowadzi do formuły na błąd średni szacunku parametru $\bar{\alpha}$:

$$d(\hat{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha})}{\sqrt{T'+1}}. \quad (8)$$

Druga, młodsza grupa metod ocen jakości prognoz VaR wykorzystuje ujęcie decyzyjne. Analiza ex post prognoz wartości narażonej na ryzyko może być przeprowadzona przez zdefiniowanie funkcji, która określa ex post stratę, związaną z przyjęciem w chwili t – za poziom wartości narażonej na ryzyko – wielkości $VaR_t(\alpha, n | M_t)$; por. Lopez (1999).

W badaniach wykorzystano trzy funkcje strat. Jako najprostszy przykład Lopez (1999) proponuje funkcję przyjmującą wartości jedynie 0 lub 1 (ang. Binary Loss, *BL*), w zależności od tego, czy w chwili $t+n$ nastąpiło przekroczenie czy też nie:

$$f_t^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y_{t+n} \geq VaR_t(\alpha, n | M_i) \\ 1 & \text{gdy } y_{t+n} < VaR_t(\alpha, n | M_i). \end{cases} \quad (9)$$

Dodatkowo rozważamy funkcję strat z punktu widzenia instytucji nadzorującej (ang. Regulatory Loss, *RL*):

$$f_t^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y_{t+n} \geq VaR_t(\alpha, n | M_i) \\ 1 + (y_{t+n} - VaR_t(\alpha, n | M_i))^2 & \text{gdy } y_{t+n} < VaR_t(\alpha, n | M_i), \end{cases} \quad (10)$$

oraz funkcję strat firmy (ang. Firm's Loss);

$$f_t^{(i)} = \begin{cases} c \cdot VaR_t(\alpha, n | M_i) & \text{gdy } y_{t+n} \geq VaR_t(\alpha, n | M_i) \\ 1 + (y_{t+n} - VaR_t(\alpha, n | M_i))^2 & \text{gdy } y_{t+n} < VaR_t(\alpha, n | M_i), \end{cases} \quad (11)$$

gdzie parametr $c > 0$ mierzy koszty utraconych korzyści (ang. opportunity costs; por. Sarma, Thomas i Shah (2003)). Koszty te są związane z niewykorzystaniem tej części kapitału, którą należy zamrozić (na potrzeby zabezpieczenia przed ryzykiem rynkowym) zgodnie z przyjętą prognozą wartości narażonej na ryzyko. Całkowitą stratę $f_t^{(i)}$ definiujemy w każdym przypadku (9), (10) i (11) jako sumę $f_t^{(i)}$, dla $t=T, T+1, \dots, T+T'$.

4. Konkurujące modele zmienności

Wartość narażoną na ryzyko będziemy prognozować wykorzystując procesy GARCH z asymetriami o warunkowym skośnym rozkładzie t (M_1) lub rozkładzie α -stabilnym (model M_2), które szczegółowo opisuje Osiewalski i Pipień (2003) oraz Pipień (2004) i Pipień (2005a i b). A zatem jako pierwsze rozważone zostaną prognozy $VaR_t(\alpha, n | M_1)$ oraz $VaR_t(\alpha, n | M_2)$, gdzie:

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha, n | M_1)} p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_1) = \alpha,$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha, n | M_2)} p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_2) = \alpha.$$

Analizie poddane zostaną także prognozy wartości narażonej na ryzyko uzyskane w oparciu o modele M_3 i M_4 . Przyjęto w tych specyfikacjach, iż w chwili $t+n$ warunkowy (względem całej przeszłości) rozkład dziennych stóp zmian jest rozkładem normalnym o stałej i niezależnej od tej przeszłości wariancji σ . W modelu M_3 , do estymacji nieznanymi parametrów, używa się całej zaobserwowanej przeszłości ($y^{(t)}$), zaś w modelu M_4 wykorzystywany jest jedy-

nie fragment tego szeregu $y^{(t,k)}=(y_{t-k-1}, \dots, y_t)$, dla odpowiednio dobranego k . Uzyskane prognozy $VaR_t(\alpha, n|M_3)$ oraz $VaR_t(\alpha, n|M_4)$ takie, że:

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha, n|M_3)} p(y_{t+n} | y^{(t)}, M_3) = \alpha,$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha, n|M_4)} p(y_{t+n} | y^{(t,k)}, M_4) = \alpha,$$

dla pewnych wartości k , stanowią bayesowską reinterpretację powszechnie stosowanych w praktyce technik szacowania VaR, które opierają się na założeniu normalności rozkładu dziennych stóp zmian; por. Jorion (1996), Best (2000), Jajuga, Kuziak, Papla i Rokita (2001).

5. Rezultaty empiryczne

Jako zbiór danych rozważono szereg dziennych logarytmicznych stóp zmian kursu walutowego PLN/USD w dniach od 05.02.1996 do 04.09.02 ($T+T'=1657$ obserwacji). Dla badanego szeregu czasowego dokonano, w każdym z modeli, zadania dziennej bayesowskiej aktualizacji rozkładów a posteriori i predyktywnych. Startując z szeregu danych $y^{(t)}$, który zawierał jedynie $t=T=100$ obserwacji, dla każdego t od T do $t=T+T'=1657$ obliczono rozkłady a posteriori parametrów i rozkłady predyktywne $p(y_{t+n}|y^{(t)}, M_i)$ dla $n=1$ oraz $n=10$. Rozkłady te, zgodnie z (2), stanowiły źródło prognoz $VaR_t(\alpha, n|M_i)$ oraz umożliwiały w dalszej kolejności szacunki rezerw kapitałowych związanych z ryzykiem walutowym C_i ; por. (3).

W pierwszej kolejności poddano ocenie ex post jednodniowe ($n=1$) prognozy Value-at-Risk wygenerowane przez rozważane modele zmienności. Tabela 1 prezentuje rezultaty porównania wszystkich modeli, przy wykorzystaniu kryteriów prezentowanych w części 3, dla $\alpha=0.01, 0.05$ i 0.1 . Uzyskane rezultaty informują, iż kryterium Kupca silnie odrzuca rozważane modele. Bardzo niskie wartości prawdopodobieństw testowych testu LR wykluczają w wielu przypadkach adekwatność prognoz Value-at-Risk przez rozważane modele. Jako wyjątek pojawia się relatywnie wysoka wartość p -value dla $M_4, k=30$ dla $\alpha=0.01$, dla M_3 ($\alpha=0.05$) oraz dla $M_4, k=5$ i M_3 ($\alpha=0.1$).

Zaprezentowane w tabeli 1 rezultaty analizy funkcji strat zdecydowanie wskazują na oryginalny (odrębny od testów Kupca i CTG) charakter kryteriów ocen prognoz VaR, które są oparte na analizie strat (BL, RL, FL). Duże rozproszenie i spłaszczenie jednodniowych rozkładów predyktywnych $p(y_{t+1}|y^{(t)}, M_2)$ jest zasadniczym powodem, dla którego M_2 generuje bardzo konserwatywne prognozy wartości narażonej na ryzyko. W rozważanym okresie model ten ma zaledwie $BL=3$ przekroczenia dla $\alpha=0.01$. Pozostałe modele generują, w rozważanym okresie prognozowania, wielokrotnie większą liczbę przekroczeń. Dla

każdego poziomu α najgorszym (pod względem strat BL) okazuje się model M_1 (AR-GARCH o warunkowym skośnym rozkładzie t -Studenta).

Funkcja strat RL dostarcza rankingu rozważanych specyfikacji, który nieznacznie zmienia się wraz ze zmianami wartości prawdopodobieństwa α . O ile nie ma wątpliwości, iż proces GARCH o warunkowym rozkładzie α -stabilnym generuje najniższą stratę RL w przypadku każdej z rozważanych wartości α , to pozycja pozostałych modeli w rankingu zmienia się (przy zmianach α). Z punktu widzenia instytucji nadzorującej (stosującej RL do oceny modeli wewnętrznych stosowanych w firmach do oceny ekspozycji na ryzyko) model M_2 jest zawsze oceniany najlepiej.

Funkcja strat FL , uwzględniająca koszty utraconych korzyści związane z prognozą VaR , dostarcza zupełnie innego rankingu rozważanych specyfikacji. Pod względem FL , pozycja każdego modelu jest odporna na zmiany w poziomie prawdopodobieństwa α . Sprawdzono dodatkowo, iż ranking ten jest także obojętny na zmiany w wartościach współczynnika $c > 0$, który określa koszty utraconych korzyści. Z punktu widzenia instytucji stosującej rozważane modele w prognozie VaR , najlepiej ocenianym jest model M_1 . Pomimo dużej (największej) liczby przekroczeń model ten, dla wszystkich rozważanych wartości α , generuje łącznie najniższe koszty utraconych korzyści i najniższe straty w sytuacji przekroczenia. Dodatkowo, funkcja strat FL silnie penalizuje konserwatywnym prognoz uzyskanych w modelu M_2 .

W każdym z modeli M_1, M_2, M_3, M_4 , dla $k=5$ i $k=30$, uzyskano prognozę $VaR_t(0.01, 10 | M_i)$ dla $t=350, \dots, 1567$. Na podstawie otrzymanych dziesięciodniowych ocen VaR określono rezerwy kapitałowe C_t , zgodnie z formułą (3). Tabele 2 oraz 3 zawierają wykresy wartości rezerw obowiązkowych C_t ($t=350, \dots, 1567$) oraz wykresy wartości współczynnika proporcjonalności A_t ; por. (3) ($t=350, \dots, 1567$) dla wszystkich rozważanych specyfikacji modelowych. Zamieszczone w ostatnim wierszu tabel wykresy zaobserwowanych dziennych stóp zmian umożliwiają ocenę stopnia wrażliwości C_t oraz A_t na napływ nowych obserwacji do zbiorów danych.

Prognozy obowiązkowych rezerw kapitałowych C_t są – w modelach M_1 i M_2 – w podobny sposób wrażliwe na napływ nowych obserwacji. Współczynnik korelacji pomiędzy szeregami C_t ; $t=350, \dots, 1567$ uzyskanymi w tych modelach wynosi 0.65. Zasadnicze różnice w mechanizmie generowania prognoz C_t przez M_1 oraz M_2 kryją się w przebiegu współczynnika proporcjonalności A_t . Wykresy A_t dla M_1 oraz M_2 zostały zamieszczone w drugiej kolumnie tabeli 2. Model M_2 , generując niezwykle konserwatywne prognozy $VaR_t(0.01, 10 | M_i)$, pozostaje przez cały okres $t=350, \dots, 1567$ w bezpiecznej strefie. Zatem współczynnik proporcjonalności A_t dla M_2 wynosi trzy w całym rozważanym okresie prognozy. Zdecydowanie inaczej zachowuje się model M_1 . Początkowo (dla $t=350$ do około 820) ilość przekroczeń jest w tym modelu tak duża, iż A_t , osiągając wartość 4, sytuuje tę specyfikację w strefie podwyższonego ryzyka (red zone). Dla t od 800 do około 1100 ilość przekroczeń w M_1 zdecydowanie spada.

Powoduje to, iż model ten na krótko trafia w bezpieczną strefę (green zone). Do końca rozważanego okresu prognozowania duża liczba przekroczeń powoduje zawyżenie współczynnika proporcjonalności A_t (względem niskiej wartości uzyskanej w modelu M_2).

W tabeli 3 zaprezentowano rezultaty prognoz rezerw kapitałowych, które uzyskano w modelach M_3 oraz M_4 . Rezultaty wyraźnie wskazują na poważne różnice w prognozowanych wartościach C_t w modelu z normalnym składnikiem losowym, ze względu na ilość obserwacji stanowiących bazę dla funkcji wiarygodności. Wrażliwość dynamiki C_t na napływ nowych obserwacji maleje wraz ze wzrostem k (w modelach M_4). Zamieszczone w tabeli 3 wykresy współczynnika proporcjonalności A_t informują, iż modele M_3 oraz M_4 zachowują się różnie pod względem ilości przekroczeń. Czynniki A_t – a tym samym ocena modelu w zakresie bezpieczeństwa stosowania jego prognoz VaR – jest najbardziej zmienny w modelu M_4 , dla $k=5$. W przypadku modelu M_4 , dla $k=30$, czynnik A_t jest mało zmienny i raczej przyjmuje wartości bliskie 3. Model M_3 osiąga strefę podwyższonego ryzyka (red zone) jedynie dla t od 620 do 900; por. Rysunek F w tabeli 3.

Literatura

- Hendricks, D., Hirtle, B. (1997) Bank Capital Requirements for Market Risk: The Internal Model Approach, *Federal Reserve Bank of New York Review*.
- Jajuga, K., Kuziak, K., Papla, D., Rokita, P. (2001) Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego, *Rynek Terminowy* 11, 133–140.
- Jorion, P. (1996) *Value-at-Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw Hill, New York.
- Kupiec, P. (1995) Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models, *Journal of Derivatives* 2, 173–184.
- Lopez, J. A. (1999) Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates, *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 3–17.
- Osiewalski, J., Pipień, M. (2003) Univariate GARCH processes with asymmetries and GARCH-In-Mean effects: Bayesian analysis and direct option pricing, *Przegląd Statystyczny* 50, 5–29
- Pipień, M. (2005a) Value at Risk Estimates and Capital Requirements for Market Risk Obtained From GARCH Predictive Densities, Proceedings of the 31-st Conference MACROMODELS'2004, Łódź (w recenzji).
- Pipień, M. (2005b) Application of Bayesian Inference in Value-at-Risk forecasting. The predictive assessment of the Capital Requirements for Market Risk, Materiały konferencji FindEcon'2005, Łódź. (w recenzji)
- Rachev, S., Mittnik, S. (2002) *Stable Paretian Models in Finance*, J. Wiley, New York.
- Sarma, M., Thomas, S., Shah, A. (2003) Selection of VaR Models, *Journal of Forecasting* 22, 337–358.

Tabela 1. Ocena ex post jakości prognoz $VaR_{\alpha}(1|y^{(t)}, M_i)$ dla $\alpha=0.01, 0.05$ i 0.1

	$\hat{\alpha}$	$d(\hat{\alpha})$	p-value I	BL	RL	FL (c=1)
$\alpha=0.01$						
M_1	0.0334	0.0046	1.40e-7	52	266.11	2010.88
M_2	0.0020	0.0011	1.81e-13	3	125.11	3481.88
$M_4; k=30$	0.0173	0.0033	0.0133	27	258.80	2442.11
$M_4; k=5$	0.0308	0.0044	1.00e-6	48	281.76	2339.58
M_3	0.0205	0.0040	0.0017	32	297.48	2120.62
$\alpha=0.05$						
M_1	0.0802	0.0069	5.60e-6	125	408.92	1573.55
M_2	0.0154	0.0031	<1e-18	24	250.36	2244.90
$M_4; k=30$	0.0353	0.0047	8.34e-4	55	294.70	1830.55
$M_4; k=5$	0.0629	0.0065	0.0180	98	344.42	1806.10
M_3	0.0539	0.0057	0.2469	84	436.02	1678.79
$\alpha=0.1$						
M_1	0.1444	0.0089	3.06e-7	225	509.71	1333.86
M_2	0.0424	0.0051	<1e-18	66	388.51	1813.80
$M_4; k=30$	0.0738	0.0066	3.86e-5	115	442.08	1602.86
$M_4; k=5$	0.0950	0.0074	0.0250	148	413.28	1549.46
M_3	0.9031	0.0074	0.1732	145	504.22	1430.73

Źródło: obliczenia własne.

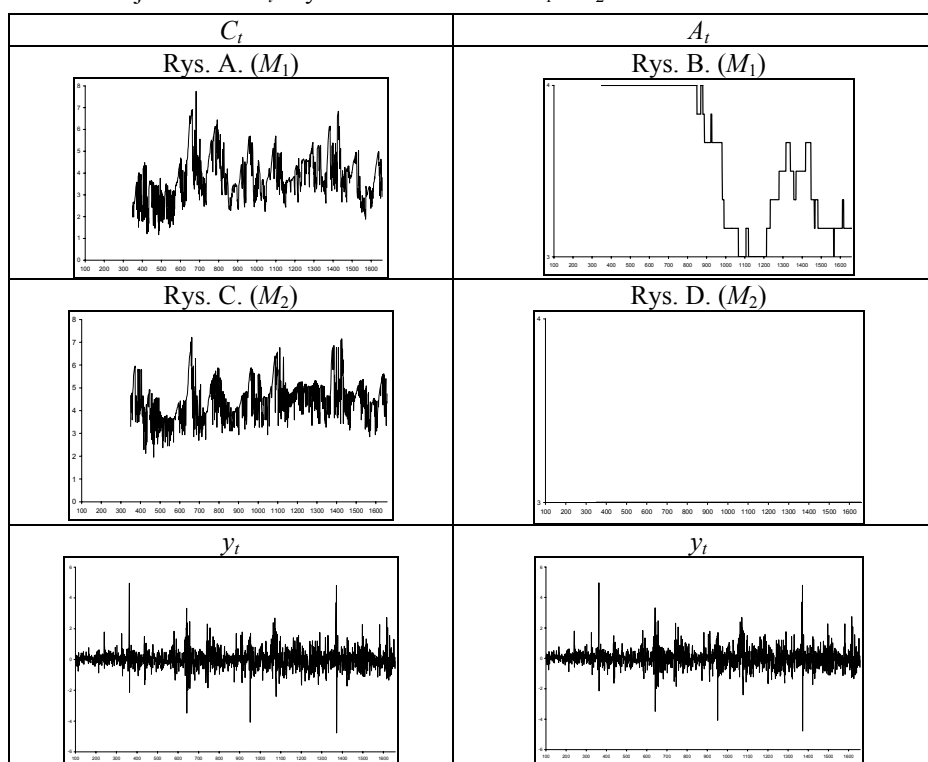
Tabela 2. Wymagane rezerwy kapitałowe C_t ($t=100, \dots, 1657$) oraz współczynnik proporcjonalności A_t uzyskane w modelach M_1 i M_2 

Tabela 3. Wymagane rezerwy kapitałowe C_t ($t=100, \dots, 1657$) oraz współczynnik proporcjonalności A_t uzyskane w modelach M_3 i M_4 