DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Katarzyna Kuziak
Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego we Wrocławiu

Ryzyko modelu w wycenie opcji indeksowych

1. Wprowadzenie

Celem artykułu zwrócenie uwagi na wykorzystanie modelu wyceny w ustalaniu wartości opcji indeksowych. W artykule przedstawiona zostanie istota ryzyka modelu, rodzaje i źródła jego powstawania. Pokazane zostaną przykłady empiryczne.

2. Ryzyko modelu

Ogólnie, w procesie budowy modelu (nie tylko w przypadku modelu wyceny opcji indeksowych) wyróżnia się następujące cztery podstawowe etapy:
1. Specyfikacja.
2. Określenie zbioru danych.
3. Estymacja parametrów.
4. Weryfikacja.

Na każdym z tych etapów może powstać ryzyko modelu, jednak jeśli chodzi o model wyceny opcji indeksowych, etapami najbardziej narażonym na powstanie ryzyka modelu jest etap estymacji parametrów i etap specyfikacji. W tym przypadku największym problemem jest oszacowanie parametru zmienności ceny indeksu podstawowego (indeksu giełdowego). Wykorzystując do wyceny opcji indeksowej klasyczny model Blacka-Scholesa-Mertona można uprościć wycenę do zagadnienia oszacowania parametru zmienności. Model Blacka-Scholesa-Mertona zakłada rozkład normalny stóp zwrotu indeksu, zatem parametr zmienności jest szacowany jako odchylenie standardowe. Jeśli jednak proces stopy zwrotu nie podlega rozkładowi normalnemu, a ma to często miejsce, wówczas wyznaczenie wartości opcji z tego modelu jest obarczone błędem.

Ryzyko modelu może być różnie definiowane – jest to potencjalna możliwość poniesienia straty w wyniku zastosowania złego modelu do wyceny instrumentu finansowego lub pomiaru ryzyka (zakładamy, że model wykorzystywany jest w sposób poprawny) (D. Gątarek, 2002). Bardziej ogólnie możemy stwierdzić, że pojawia się wówczas, gdy opisywany w sposób formalny i poprawny fragment rzeczywistości – model – oddala się od rzeczywistości generując straty. Dla potrzeb tego artykułu przyjmiemy, że ryzyko modelu będzie tym ryzykiem, które powstaje w procesie budowy modelu. Zatem elementarny błąd w wykorzystaniu modelu, będzie tzw. ryzykiem operacyjnym, a nie ryzykiem modelu.

Grupy źródeł ryzyka modelu można podzielić na:
1) finansowe,
2) techniczne,
3) statystyczne.

W grupie źródeł finansowych można wyróżnić brak płynności, nieuwzględnienie kosztów transakcyjnych, nieuwzględnienie bid-ask spredów, wybór ceny do analiz (cena zamknięcia, cena transakcji, średnia cena).
Natomiast wśród źródeł technicznych można wyróżnić niewystarczającą liczbę powtórzeń w symulacjach, błędy przybliżeń, ograniczone przedziały ważności rozwiązań.

W niniejszym artykule zwrócimy uwagę jedynie na statystyczne źródła ryzyka modelu. Do tych źródeł zaliczyć można przede wszystkim:
1) Błędy estymacji modelu pojawiające się wskutek, np.:
   - różnych technik estymacji,
   - błędów w estymacji parametrów,
   - błędów wynikających z dyskretyzacji,
   - istnienia obserwacji nietypowych,
   - nieodpowiedniej liczby obserwacji,
   - wykorzystania danych o nieodpowiedniej częstotliwości;
2) Błędną specyfikację modelu, będącą wynikiem, np.:
   - błędów w rozwiązaniu analitycznym,
   - błędnej specyfikacji procesu kształtującego stopę zwrotu (wartość) instrumentu finansowego,
   - pominięcia istotnego czynnika.

Na przykład błąd estymacji może dotyczyć przypadku szacowania parametru zmienności dlatego, że zmienność może zostać oszacowana:
- jako zmienność historyczna (np. modele z grupy GARCH),
- jako zmienność implikowana.

Na przykład błąd specyfikacji procesu kształtującego stopę zwrotu instrumentu finansowego w modelu Blacka-Scholesa-Mertona może pojawić się w przypad-

ku przyjęcia założenia dla procesu stopy zwrotu instrumentu podstawowego innego, niż geometryczny ruch Browna, np.:
- geometrycznego ruchu Browna ze składnikiem losowym o rozkładzie innym niż normalny,
- procesu Ornsteina-Uhlenbecka,
- procesu skoku-dyfuzji (jump-diffusion).

3. Przykłady ryzyka modelu

Ilustracja zagadnienia ryzyka modelu na przykładzie wyceny opcji indeksowej, której źródłem będzie zła specyfikacja procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu oraz źródło ryzyka modelu, jakim jest błąd estymacji modelu pojawiający się wskutek nieodpowiedniej liczby obserwacji zostanie przedstawione na przykładzie modelu wyceny opcji na indeks giełdowy WIG20.

W pierwszym przykładzie w modelu wyceny opcji na indeks WIG20 rozważone zostaną następujące procesy dla stóp zwrotu r_t indeksu w trzech modelach wyceny opcji indeksowej:

1) Model Blacka-Scholesa-Mertona (BSM):

$$r_t = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

gdzie: μ - oznacza oczekiwaną stopę zwrotu,
σ - zmienność (odchylenie standardowe stopy zwrotu).
Proces ten zakłada stałą zmienność w czasie.

2) Model *Constant Elasticity Variance* (CEV):

$$r_t = \mu\Delta t + \sigma S^{\alpha-1}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

gdzie: μ - oznacza oczekiwaną stopę zwrotu,
$\sigma S^{\alpha-1}$ – zmienność.
Proces ten zakłada stałą elastyczność wariancji, jest wykorzystywany do modelowania heteroskedastyczności.

3) Podejście zaprezentowane przez Duana z procesem AR(1)-GJR-GARCH(1,1)[1]:

$$r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$h_t = \omega + (\alpha + \alpha^{-}\mathrm{I}_{(\varepsilon_{t-1}<0)})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

[1] W dalszej części podejście zaproponowane przez Duana z procesem AR(1)-GJR-GARCH(1,1) oznaczone będzie skrótem GJR-GARCH.

$$V = \frac{\omega}{1-\overline{\alpha}-\beta} \times \frac{1}{1-\varphi^2}$$

gdzie: μ, φ, α, α^-, β, ω - parametry procesu stóp zwrotu,
h – warunkowa wariancja,
V – bezwarunkowa wariancja procesu (długoterminowa wariancja procesu).
Proces ten umożliwia uwzględnienie grubych ogonów rozkładów, skupiania zmienności, autokorelacji stóp zwrotu oraz efektu dźwigni (asymetrycznej reakcji inwestorów na dobre i złe wiadomości).

Parametry trzech wyróżnionych, ze względu na możliwości modelowania różnych efektów, procesów stóp zwrotu indeksu WIG20 (geometryczny ruch Browna – GBM, proces ze stałą elastycznością wariancji – CEV oraz warunkowej wariancji – AR(1)-GJR-GARCH(1,1)) zostały oszacowane, a wyniki estymacji zawiera tabela 1. Długoterminowa wariancja V procesu AR(1)-GJR-GARCH(1,1) indeksu WIG20 wynosi 0,3165.

Tabela 1. Oszacowania parametrów procesu dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20 z okresu 14.04.1994-31.01.2005

Model	Parametry
GBM	μ=0.0000 σ=0.3403
CEV	μ=0.0002 σ=10.8853 α=0.5166
GJR-GARCH	μ=0.00047 ϕ=0.0888 ω=0.00001 β=0.8727 α=0.08395 α^-=0.0390

Źródło: obliczenia własne.

Oszacowania parametrów wyróżnionych procesów zostały wykorzystane do wyceny opcji. W modelu BSM i CEV wyceny opcji znana jest postać analityczna modelu, natomiast w przypadku trzeciego modelu nie ma postaci analitycznej modelu (wartość opcji jest ustalana za pomocą symulacji Monte Carlo metodą zaproponowaną w pracy (Duan 1995)).

Otrzymano cztery grupy wartości opcji – wynikającą z przyjęcia procesu AR(1)-GJR-GARCH(1,1), modelu BSM i modelu BSM* (w którym uwzględniono długoterminową zmienność V z modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)) oraz CEV. Wyniki wyceny dwóch rodzajów opcji kupna, wygasających 18.03.05 (OW20C5) i 17.06.05 (OW20F5) dla rożnych kursów wykonania na dzień 1.02.2005 przedstawione zostały w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości opcji o różnych cenach wykonania i dla różnych procesów stóp zwrotu

Opcja	GJR-GARCH	BSM	BSM*	CEV
OW20C5170	242.6110	258.3358	253.5658	236.5950
OW20C5180	160.9301	186.0766	179.5098	155.2345
OW20C5190	95.4889	127.4906	119.8645	90.8445
OW20C5200	49.8800	83.0491	75.3892	46.5712
OW20C5210	23.4785	51.4922	44.6983	20.6536
OW20F5180	248.4240	276.6995	264.8119	216.8410
OW20F5190	190.7926	223.2823	210.3420	157.5775
OW20F5200	143.2709	177.9820	164.5897	109.9640
OW20F5210	104.9796	140.2658	126.9940	73.5856

Źródło: obliczenia własne.

Największa różnica w wartościach opcji we wszystkich przypadkach jest widoczna między modelem BSM i modelem CEV. Wynika to z przyjęcia założenia stałej wariancji i wartości oczekiwanej stóp zwrotu w modelu BSM (tzn. stopy zwrotu w kolejnych dniach pochodzą z identycznych rozkładów), a w modelu CEV stałej elastyczności wariancji i wartości oczekiwanej stóp zwrotu (czyli w tym przypadku wariancja zależy od poziomu ceny).

Z oczywistych względów wartości opcji uzyskane z modelu BSM i BSM* (w którym przyjęto długoterminową zmienność V z procesu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)) są zbliżone. Zbliżone wartości są również między modelami GJR-GARCH i CEV. Wynika to z faktu, że oba modele opisują zmienną w czasie wariancję, uwzględniając w odmienny sposób efekt dźwigni. Dodatkowo w model GJR-GARCH modeluje efekt powrotu do średniego poziomu wariancji V, a wartość opcji zależy od chwilowej wariancji w dniu wyceny (która jest warunkiem początkowym podczas symulowania trajektorii procesu cen w metodzie Monte Carlo).

W drugim przykładzie zilustrowane zostanie ryzyko modelu pojawiające się wskutek złej specyfikacji procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu WIG20:
1) geometrycznego ruchu Browna,
2) CEV,
3) AR(1)-GJR-GARCH(1,1).

Na podstawie analizy dopasowania procesów do opisu kształtowania stopy zwrotu indeksu WIG20 wybrany został model AR(1)-GJR-GARCH(1,1). Następnie wysymulowany został proces stopy zwrotu indeksu WIG20 dla oszacowań parametrów z procesu GJR-GARCH i wycenione zostały opcje indeksowe za pomocą dwóch pozostałych modeli.

W wycenie hipotetycznej opcji kupna wystawionej na indeks WIG20 przyjęto następujące założenia: poziom indeksu WIG20 1800 pkt, stopa wolna od ryzyka 5%, długość do terminu wygaśnięcia 60 dni, średnia stopa dywidendy 0. Wykonano 500 000 powtórzeń w metodzie Monte Carlo dla różnych cen wykonania: 1700, 1750, 1800, 1850 i 1900. W tabeli 3 zostały podane wyniki wyceny – prawidłowej, tj. z modelu GJR-GARCH oraz nieprawidłowej, tj. na podstawie błędnie wyspecyfikowanego procesu stochastycznego stopy zwrotu w modelu BSM i zmodyfikowanego BSM*, w którym przyjęto długoterminową zmienność V z procesu GJR-GARCH oraz modelu CEV.

Tabela 3. Wartości opcji dla różnych cen wykonania i różnych procesów stóp zwrotu

	Ceny wykonania				
	1700	1750	1800	1850	1900
GJR-GARCH	*182.2399*	*151.4496*	*124.6958*	*101.3628*	*81.1037*
CEV	**182.0524**	**152.7487**	**126.7754**	**104.0842**	**84.5418**
BSM	184.4413	154.9181	128.7521	105.8929	86.2028
BSM*	186.0785	156.6768	130.5835	107.7463	88.0297

Źródło: obliczenia własne.

Pogrubioną czcionką zaznaczone są wyniki najbliższe wartościom opcji z procesem GJR-GARCH. Widać, że wyniki z modelu CEV są najbliższe wynikom GJR-GARCH dla każdej wyróżnionej ceny wykonania (oba modele opisują efekt dźwigni). Jednak, jeżeli przyjmiemy nieprawidłowy proces stopy zwrotu (tutaj np. GBM) różnice w wynikach wartości opcji mogą być znaczące (są to różnice dla jednej opcji, a podmioty często posiadają portfele).

W **trzecim przykładzie** przeanalizowano różnice w wartościach opcji, gdy wysymulowany został proces stopy zwrotu indeksu WIG20 dla oszacowań parametrów z procesu GBM. W wycenie przyjęto te same założenia jak w przykładzie drugim. W tym przypadku jednak prawidłowym procesem jest GBM i wycena BSM stanowi punkt odniesienia. Wyniki zawiera tabela 4.

Tabela 4. Wartości opcji dla różnych cen wykonania i różnych procesów stóp zwrotu

	Ceny wykonania				
	1700	1750	1800	1850	1900
BSM	*184.775*	*154.6344*	*128.4566*	*105.5939*	*85.9082*
BSM*	183.9472	154.3867	128.1985	105.3327	85.6509
GJR-GARCH	185.1949	155.918	129.2542	106.1495	86.3743
CEV	161.7150	130.8521	104.0688	81.3426	62.4879

Źródło: obliczenia własne.

Teoretycznie wszystkie modele powinny dawać zbliżone wyniki, gdyż GMB zawiera się zarówno w modelu CEV, jak i GJR-GARCH. Różnice powinny wynikać jedynie z oszacowań parametrów.

Zgodnie z oczekiwaniami, najbliższe wyniki uzyskano z modelu BSM*, a w następnej kolejności GJR-GARCH. Model CEV jako najbardziej wrażliwy na błędy w oszacowaniach parametrów dał najbardziej różne wyniki zarówno w przykładzie drugim, jak i trzecim (przy czym w przykładzie drugim dodatkowo błędna była postać modelu).

4. Podsumowanie

Analizując modele matematyczne w wycenie opcji (lub ogólnie instrumentów pochodnych) należy wyróżnić dwie grupy opcji (instrumentów pochodnych) – te które są przedmiotem obrotu giełdowego i dla których ceny rynkowe są dostępne oraz te, które nie są notowane na giełdzie (np. są obecne na rynku międzybankowym) i dla których ceny rynkowe nie są dostępne. Pierwsza grupa opcji podlega wycenie rynkowej – popyt i podaż określa cenę instrumentu, wycena teoretyczna nie jest konieczna. Natomiast w przypadku drugiej grupy opcji, np. opcji egzotycznych, opcji zwykłych (ale których płynność jest niska) określenie wartości za pomocą modeli matematycznych jest niezbędne. Żeby zapewnić koherencję (w znaczeniu braku arbitrażu) między tymi dwoma grupami zasady wyceny powinny być zgodne z obserwowanymi (rynkowymi) cenami opcji na giełdzie.

Przykłady te wskazują ponadto, że pomocne w zarządzaniu ryzykiem modelu mogą być techniki analizy danych takie, jak:

- estymacja odporna,
- analiza szeregów czasowych,
- analiza rozkładów,
- prognozowanie.

Literatura

Allen, S. L. (2003), *Financial Risk Management: A Practitioners Guide to Managing Market and Credit Risk*, John Wiley & Sons, New York.

Cont, R. (2005), Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical Finance*.

Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R. (2001), *Risk Management*. McGraw-Hill, New York.

Derman, E. (1996), Model risk, *Risk* 9, 34–37, 1996.

Duan, J. (1995), The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance*, nr 5, 13–32.

Gontarek, D. (2002), Ryzyko modelu, *Rynek Terminowy* nr 4/02, s. 52–55.
Glosten, R. Jagannathan, D. Runkle, (1993), On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance* 48, 1179–1801.
Kato, T., Yoshiba T. (2000), Model risk and its control. *Monetary and Economic Studies*, Dec., 129–156.
Kuziak, K. (2005), Zagadnienie ryzyka modelu w zarządzaniu ryzykiem, *Prace Naukowe AE*, w druku.
Piontek, K. (2003), Wycena opcji w modelu uwzględniającym efekt AR-GARCH, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 990*, 331–336.
Rebonato, R. *Theory and practice of model risk management*.