

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Mariola Piłatowska*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

### **Efekty błędnej identyfikacji niestacjonarności procesów ekonomicznych dla wariancji błędu prognozy**

#### **1. Wprowadzenie**

W przypadku analizy zależności między niestacjonarnymi procesami ekonomicznymi szczególnego znaczenia nabiera problem określenia typu niestacjonarności, tj. w średniej czy w wariancji, ze względu na negatywne skutki dla estymacji i testowania modelu, jakie mogą pojawić się w przypadku błędnej identyfikacji procesów. Skutków tych można jednak uniknąć, jeżeli w budowie modelu wykorzystana zostanie informacja o wewnętrznej strukturze badanych procesów ekonomicznych, zapewniając w ten sposób pożądane (białosumowe) własności procesu resztowego<sup>1</sup>. Warunek ten spełniają wszystkie koncepcje dynamicznego modelowania realizujące postulat zgodności (w sensie Zielińskiego (1984) czy Grangera (1981)). Takie podejście, poprzez dopuszczenie możliwości współistnienia modeli o różnych specyfikacjach, tj. zarówno dla poziomów, jak i dla przyrostów procesów, łączy dotychczasowe podejścia dla modelowania, tzn. „zawsze brać poziomy”, polegające na specyfikacji modelu zawsze dla poziomów procesów, z „zawsze różnicować”, sprowadzającym się do specyfikacji modelu dla przyrostów procesów zawsze, gdy procesy są niestacjonarne. Należy jednak pamiętać, że interpretacja parametrów modeli dla poziomów i przyrostów jest odmienna, a także oceny tych parametrów w modelach dla poziomów i dla przyrostów procesów na ogół nie będą jednakowe. Modele te będą na ogół akceptowalne pod względem statystycznym, jednak różnić się będą specyfikacją, ekonomiczną interpretacją parametrów oraz zachowaniem w prognozowaniu.

---

<sup>1</sup> Są to skutki niepotrzebnego różnicowania (ang. *overdifferencing*) i skutki braku różnicowania (ang. *underdifferencing*). Por. Piłatowska (2003a), (2003b), (2004).

Celem artykułu jest ocena zachowania się w prognozowaniu modelu wyspecyfikowanego dla poziomów, tj. modeli TS (strategia „zawsze brać poziomy”), z stosunku do modeli wyspecyfikowanych dla przyrostów, tj. modeli DS i EC (strategia „zawsze różnicować”) w przypadku gdy, generowana zależność odnosi się do procesów niestacjonarnych w średniej oraz niestacjonarnych w wariancji (tj. procesów zintegrowanych). Ocena ta zostanie przeprowadzona za pomocą eksperymentów Monte Carlo.

## 2. Opis eksperymentu symulacyjnego

Scenariusz eksperymentu zakładającego zależność między procesami  $Y_t$  i  $X_t$ , niestacjonarnymi w średniej i w wariancji przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Scenariusz eksperymentu

Typ niestacjonarności	Zależność składowych o niskich i wysokich częstościach dla generowanych procesów $Y_t$ i $X_t$	
	jednakowa	niejednakowa
niestacjonarność w średniej	<b><i>Eksperyment 1A</i></b> $Y_t = 3X_t + \mu_t + \varepsilon_t$ , $X_t = \gamma_{0x} + \gamma_x t + \eta_{x,t}$ , $\eta_{x,t} = \beta_x \eta_{x,t-1} + \varepsilon_{x,t}$	<b><i>Eksperyment 1B</i></b> $Y_t = 3\eta_{x,t}^{nisk} + 2\eta_{x,t}^{wys} + \gamma_{0y} + \gamma_y t + \varepsilon_t$ , $X_t = \gamma_{0x} + \gamma_x t + \eta_{x,t}$ , $\eta_{x,t} = \beta_x \eta_{x,t-1} + \varepsilon_{x,t}$
	Wartości parametrów przyjęte w eksperymentach: – $\beta_x = (0.6, 0.8, 0.9, 1)$ , $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$ , $\sigma = 1, 3$ , $n = 120, 60, 30$ , – poziom istotności w metodzie selekcji <i>a posteriori</i> : 0.01, 0.05, 0.1	
niestacjonarność w wariancji	<b><i>Eksperyment 2A</i></b> $Y_t = 3X_t + \varepsilon_t$ , $X_t = \sum_{s=0}^{t-1} X_{AR,t-s}$ , $X_{AR,t} = \beta_x X_{AR,t-1} + \varepsilon_{AR,t}$	<b><i>Eksperyment 2B</i></b> $Y_t = 3X_t^{nisk} + 2X_t^{wys} + \varepsilon_t$ , $X_t = \sum_{s=0}^{t-1} X_{AR,t-s}$ , $X_{AR,t} = \beta_x X_{AR,t-1} + \varepsilon_{AR,t}$
	Wartości parametrów przyjęte w eksperymentach: – $\beta_x = (0.6, 0.7, 0.8, 0.9)$ , $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$ , $\sigma = 1, 3$ , $n = 120, 60, 30$ , – poziom istotności w metodzie selekcji <i>a posteriori</i> : 0.01, 0.05, 0.1	

Składowe o niskich częstościach, tj.  $\eta_{x,t}^{nisk}$  w eksperymentcie 1B oraz  $X_t^{nisk}$  w eksperymentcie 2B zostały uzyskane w wyniki filtracji odpowiednio procesu  $\eta_{x,t}$  oraz procesu  $X_t$  za pomocą średniej ruchomej Spencera<sup>2</sup>, natomiast składowe o wysokich częstościach zostały otrzymane jako:  $\eta_{x,t}^{wys} = \eta_{x,t} - \eta_{x,t}^{nisk}$ ,  $X_t^{wys} = X_t - X_t^{nisk}$ .

<sup>2</sup> Średnia ruchoma Spencera o postaci  $1/350[5]^2[7][[-1, 0, 1, 1, 2, \dots]]$  eliminuje wysokie częstości (por. Yule, Kendall (1966)).

Wartości parametrów  $\gamma_{1x}$ ,  $\gamma_{1y}$  trendu deterministycznego były losowane z rozkładu symetrycznego o parametrach (0.05; 0.02), (0.075; 0.025) odpowiednio, a wartości parametrów  $\gamma_{0x} = \gamma_{0y} = 100$ .

We wszystkich eksperymentach, 1A, 1B, 2A, 2B, oszacowano, za pomocą metody najmniejszych kwadratów, model TS, jako w ramach podejścia „zawsze brać poziomy”, oraz modele DS i EC w ramach podejścia „zawsze różnicować”. Modele te miały postać:

– strategia „zawsze brać poziomy”:

$$\text{Model TS: } Y_t = \sum_{s=1}^{q_y} \beta_{ys} Y_{t-s} + \sum_{s=0}^{q_x} \beta_{xs} X_{t-s} + \delta_1 t + \delta_0 + \varepsilon_t, \quad (1)$$

– strategia „zawsze różnicować”:

$$\text{Model DS: } \Delta Y_t = \sum_{s=1}^{q_y} \beta_{ys} \Delta Y_{t-s} + \sum_{s=0}^{q_x} \beta_{xs} \Delta X_{t-s} + \mu + \eta_t, \quad (2)$$

$$\text{Model EC: } \Delta Y_t = \sum_{s=1}^{q_y} \beta_{ys} \Delta Y_{t-s} + \sum_{s=0}^{q_x} \beta_{xs} \Delta X_{t-s} + \theta EC_{t-1} + \mu + \eta_t. \quad (3)$$

W przypadku modelowania zależności między procesami niestacjonarnymi w średniej (eksperyment 1A, 1B) prawidłowym podejściem jest budowa modelu (1), a modele opisujące zależności między przyrostami procesów  $\Delta Y_t$  i  $\Delta X_t$  (tj. modele (2) i (3)), są traktowane jako modele alternatywne w stosunku do modeli dla poziomów (model (1)). W modelu (3),  $EC_{t-1}$  oznacza korektę błędem, przy czym w eksperymencie 1A, zakładającym jednakowe natężenie zależności po częstościach, korekta ta jest równa:  $Y_{t-1} - \alpha X_{t-1}$ , a w eksperymencie 1B, zakładającym niejednakowe natężenie zależności po częstościach –  $Y_{t-1}^* - \alpha X_{t-1}^*$ , przy czym z procesów  $Y_{t-1}^*$  i  $X_{t-1}^*$  usunięto trend liniowy.

Natomiast w przypadku modelowania zależności między procesami zintegrowanymi, tj. niestacjonarnymi w wariancji (eksperyment 2A, 2B) – modele (2) i (3) reprezentują poprawne podejście, a model (1), dla poziomów procesów  $Y_t$  i  $X_t$ , jest traktowany jako model alternatywny. Należy zaznaczyć, że model generujący zależność między procesami niestacjonarnymi w wariancji (por. tabela 1, eksperyment 2A, 2B) zakłada występowanie kointegracji między procesami  $Y_t$  i  $X_t$ .

Wyniki przeprowadzonych symulacji Monte Carlo we wszystkich eksperymentach (1A, 1B, 2A, 2B) w odniesieniu do porównania: specyfikacji modeli TS, DS i EC, własności procesu resztowego z poszczególnych modeli, ocen parametru przy procesie  $X_t$  oraz  $\Delta X_t$ , odpowiednio w modelach dla poziomów i przyrostów procesów, rozkładów statystyk:  $t$ -Studenta, Durbina-Watsona i współczynnika determinacji  $R^2$  zawarte są w pracy Piłatowskiej (2003). Natomiast zachowanie się modeli TS, DS i EC w prognozowaniu przy założeniu

niejednakowego natężenia zależności po częstościach (eksperyment 1B, 2B) dla  $n = 60$  przedstawione są poniżej. Pozostałe wyniki dotyczące prognozowania (eksperyment 1A, 1B, 2A, 2B) znajdują się również w pracy Piłatowskiej (2003). Zredukowane do czynników istotnych poszczególne modele zostały wykorzystane do wyznaczenia prognoz (dynamicznych) o horyzoncie  $h = 1, 2, \dots, 15$  dla  $n = 60$  i  $h = 1, 2, \dots, 10$  dla  $n = 30$ , a także średnio kwadratowych błędów prognoz *ex post*, przy czym realizacje  $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+h}$  oraz  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+h}$  otrzymano na podstawie odpowiednich modeli generujących  $Y_t$  i  $X_t$ . Prognozy dla  $Y_t$  były liczone przy założeniu znanych wartości procesu objaśniającego  $X_t$ .

### 3. Zachowanie modeli TS, DS i EC w prognozowaniu

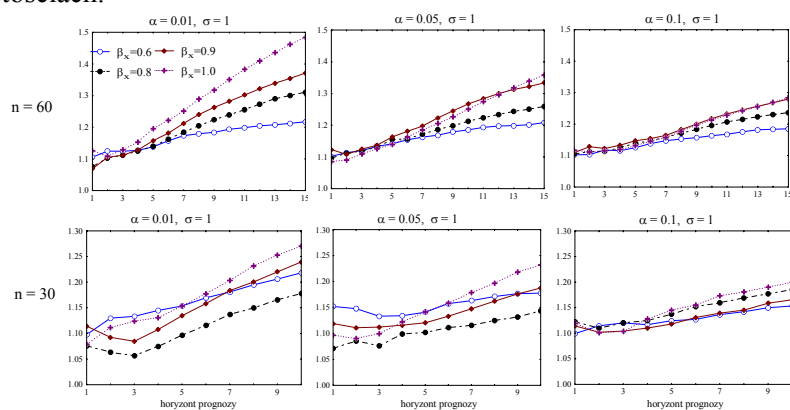
W związku z tym, że oceny parametrów, pochodzące ze zredukowanych modeli (1), (2) i (3), różnią się wyraźnie (por. Piłatowska (2003)), jako odzwierciedlenie odmiennej zależności po częstościach (eksperyment 1B), to można oczekiwać, że zachowanie się modelu TS (zredukowany model (1)) oraz modeli dla przyrostów (zredukowany model (2) i (3)) w prognozowaniu będzie odmienne. Wynika to z tego, że prognoza procesu  $Y_t$  na podstawie modelu dla poziomów i modelu dla przyrostów różni się zasadniczo. Pierwsza prognoza wyznaczona jest na podstawie modelu opisującego zależności dla całego pasma częstości, przy czym parametry są uśrednionymi parametrami po częstościach, uwzględnia zatem zależności w długim i krótkim okresie. Druga prognoza wyznaczona jest na podstawie modelu opisującego zależności dla częstości wysokich (po eliminacji częstości niskich poprzez obliczenie pierwszych przyrostów), czyli dotyczy zależności dla krótkich okresów. Porównanie własności prognostycznych tych modeli zostanie przeprowadzone za pomocą stosunków średnio kwadratowych błędów prognoz *ex post* (PMSE, ang. Prediction Mean Square Error) z poszczególnych modeli TS, DS, EC.

#### Stosunki błędów prognoz w eksperymencie 1B

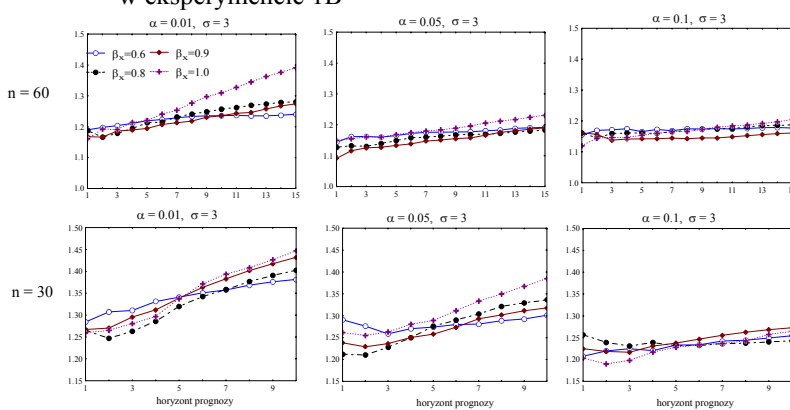
Na podstawie stosunków błędów  $PMSE(DS)/PMSE(TS)$  widać, że dla wszystkich wartości parametru  $\beta_x$ , poziomów istotności  $\alpha$ , wielkości zakłóceń  $\sigma$  oraz wielkości prób  $n$  przewagę w całym horyzoncie prognozy ma model TS, ponieważ stosunki błędów (por. wykres 1 i 2) są większe od jedności. W miarę jak horyzont prognozy zwiększa się oraz w miarę wzrostu parametru  $\beta_x$  dominacja modelu TS nad modelem DS jest coraz większa w całym horyzoncie prognozowania.

Z porównania zachowania się modeli TS i EC w prognozowaniu wynika, że model TS dawał na ogół lepsze prognozy niż model EC, ponieważ stosunki błędów  $PMSE(EC)/PMSE(TS)$ , por. wykresy 3 i 4, były większe od jedności. Jednak przewaga prognostyczna modelu TS nie była duża. Model EC dawał

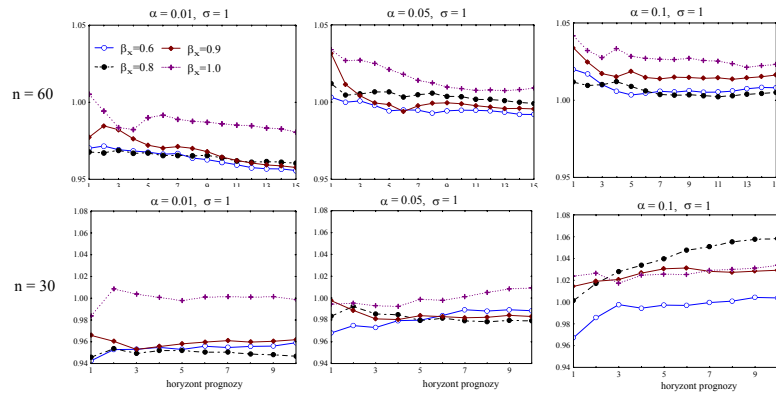
mniejsze błędy prognozy przy  $\alpha = 0.01$  dla zakłócenia  $\sigma = 1$  i  $3$ . Są to sytuacje, w których na skutek silnej eliminacji nieistotnych procesów, wynikającej z poziomu istotności  $\alpha = 0.01$ , zbyt oszczędna specyfikacja modelu TS – czyli specyfikacja bez dodatkowych elementów, tj.  $x_{t-1}$ ,  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$ , pełniących rolę uzgadniania struktury harmoniczej lewej i prawej strony modelu – nie wystarcza do opisu zmian  $Y_t$  w przypadku różnej zależności po częstościach. Natomiast przy poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  i  $0.1$  nieznaczną przewagę ma w całym horyzoncie prognozowania (z wyjątkiem krótkiego horyzontu) model TS, który w miarę zwiększania poziomu istotności zawiera częściej dodatkowe elementy,  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$ ,  $x_{t-1}$ ,  $t$ , uzgadniające strukturę modelu niż przy  $\alpha = 0.01$ . Również dla  $n = 30$  prognozy o mniejszych błędach dawał model TS w całym horyzoncie prognozy i dla wszystkich wartości poziomu istotności  $\alpha$ , mimo że specyfikacje modeli TS w tym przypadku były najczęściej oszczędne, tj. ' $x_t$ ' i ' $x_t, t$ '. Oznacza to, że w małej próbie i przy dużym zakłóceniu specyfikacje te stanowią dobrą aproksymację modelu generującego, zakładającego niejednakową zależność po częstościach.



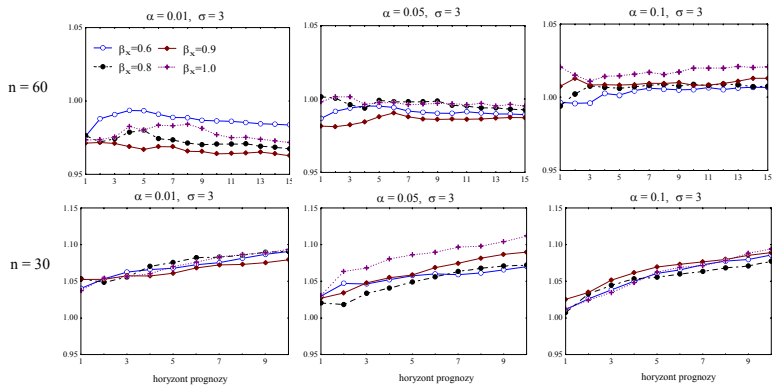
Wykres 1. Stosunki błędów PMSE(DS)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  i zakłócenia  $\sigma = 1$  w eksperymencie 1B



Wykres 2. Stosunki błędów PMSE(DS)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 3$  w eksperymencie 1B



Wykres 3. Stosunki błędów PMSE(EC)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 1$  w eksperymencie 1B

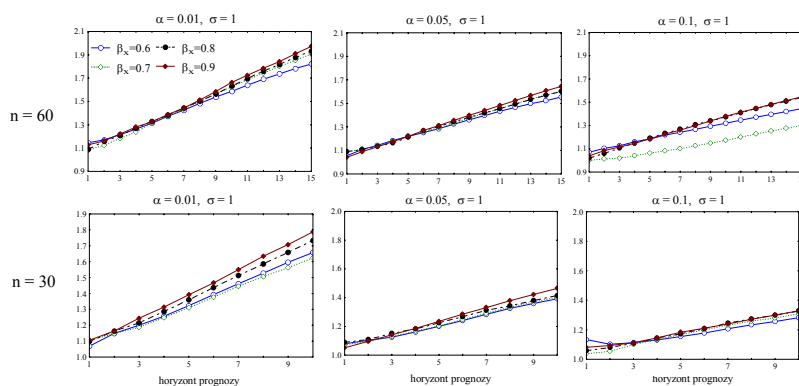


Wykres 4. Stosunki błędów PMSE(EC)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 3$  w eksperymencie 1B

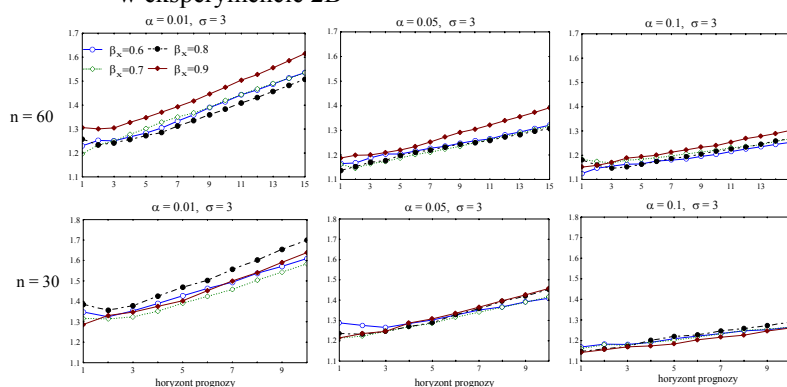
#### Stosunki błędów prognoz w eksperymencie 2B

W przypadku eksperymentu 2B, czyli przy założeniu niejednakowego natężenia zależności po częstościach, stosunki błędów PMSE(DS)/PMSE(TS) wskazały, że dla wszystkich wartości parametru  $\beta_x$ , poziomów istotności  $\alpha$ , wielkości zakłóceń  $\sigma$  oraz wielkości prób  $n$  przewagę w całym horyzoncie prognozy ma model TS, ponieważ stosunki błędów są większe od jedności. W miarę jak horyzont prognozy zwiększa się oraz w miarę wzrostu parametru  $\beta_x$  dominacja modelu TS nad modelem DS jest coraz większa w całym horyzoncie prognozowania (por. wykresy 5, 6).

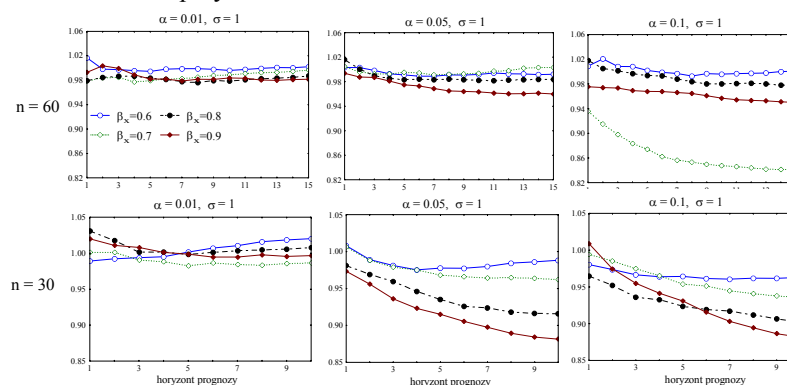
Na podstawie stosunków błędów PMSE(EC)/PMSE(TS) można zauważyć odmienne zachowanie modeli TS i EC w zależności od wielkości zakłócenia  $\sigma$ . Przy niewielkim zakłóceniu ( $\sigma = 1$ ) przewagę w prognozowaniu dla wszystkich wielkości prób  $n$ , poziomów istotności  $\alpha$  i wartości parametru  $\beta_x$  w całym horyzoncie prognozy (z wyjątkiem prognoz dla  $\beta_x = 0.6, 0.8$  przy  $\alpha = 0.01$  w prawie całym horyzoncie prognozowania) ma model EC, ponieważ stosunki błędów są



Wykres 5. Stosunki błędów PMSE(DS)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 1$  w eksperymencie 2B

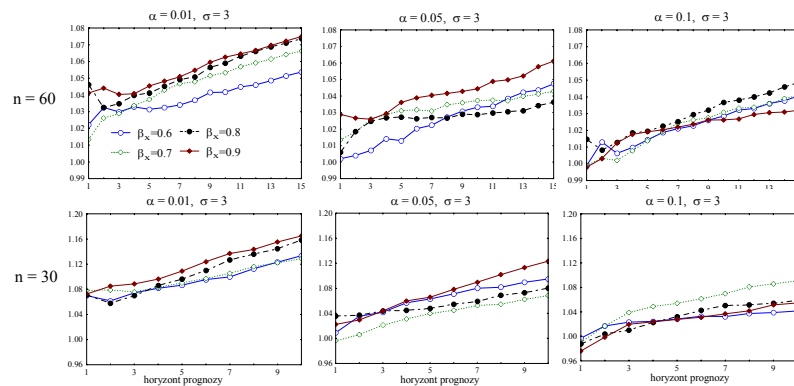


Wykres 6. Stosunki błędów PMSE(DS)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 3$  w eksperymencie 2B



Wykres 7. Stosunki błędów PMSE(EC)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 1$  w eksperymencie 2B

mniejsze od jedności (por. wykresy 7, 8). Natomiast przy dużym zakłóceniu ( $\sigma = 3$ ) mniejsze błędy prognoz daje model TS, ponieważ stosunki błędów są nieznacznie większe od jedności.



Wykres 8. Stosunki błędów PMSE(EC)/PMSE(TS) dla  $n = 60, 30$  oraz zakłócenia  $\sigma = 3$  w eksperymencie 2B

#### 4. Wnioski

Porównanie podejścia „zawsze brać poziomy” z podejściem „zawsze różnicować” wskazało, że żadne z tych podejść nie ma pełnej przewagi w prognozowaniu. Inaczej mówiąc, modele dla poziomów (modele TS) i modele dla przyrostów procesów (modele EC) mogą ze sobą konkurować nawet w sytuacji błędnej identyfikacji procesów niestacjonarnych w średniej czy w wariancji. Sugeruje to przydatność w praktycznych zastosowaniach zarówno modeli dla poziomów, jak i modeli dla przyrostów niezależnie od tego, czy procesy są niestacjonarne w średniej czy w wariancji, pod warunkiem jednak, że modele te realizują postulat zgodności. Może to stanowić praktyczną wskazówkę, aby budować modele jednocześnie dla poziomów i przyrostów procesów, a następnie wybierać model o lepszych własnościach statystycznych oraz większym uzasadnieniu ekonomicznym. Natomiast z punktu widzenia prognozowania oba modele mogą stanowić podstawę wyznaczenia prognoz, a te z kolei mogą być wykorzystane do konstrukcji prognoz kombinowanych.

#### Literatura

- Granger, C. W. J. (1981), Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121–130.
- Piłatowska, M. (2003a), Skutki nadmiernego i niewystarczającego różnicowania procesów ekonomicznych. Analiza symulacyjna, *Przegląd Statystyczny*, z. 1, 59–74.
- Piłatowska, M. (2003b), *Modelowanie niestacjonarnych procesów ekonomicznych. Studium metodologiczne*, Wyd. UMK, Toruń.
- Piłatowska, M. (2004), Realizacja postulatu zgodności jako metoda uniknięcia skutków pozornej zależności, *Przegląd Statystyczny*, z. 1, 13–22.
- Yule, G. U., Kendall, M. G. (1966), *Wstęp do statystyki*, PWN, Warszawa.
- Zieliński, Z. (1984), Zmienność w czasie strukturalnych parametrów modelu ekonometrycznego, *Przegląd Statystyczny*, z. 1/2, 135–148.