DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Władysław Milo, Maciej Malaczewski
Uniwersytet Łódzki

Stabilność punktu równowagi modelu Solowa

1. Wstęp. Problemy modelowania ekonomicznego w aspekcie stabilności rozwiązań

Od początku XIX wieku ekonomiści rozpoczęli próby przedstawiania zależności ekonomicznych za pomocą równań matematycznych. Do pierwszych wybitnych ekonomistów stosujących takie równania zaliczyć możemy m.in. Antoine'a Cournot, Leona Walras, należy też odnotować duży wpływ Johna Maynarda Keynesa[1] i Alfreda Marshalla[2] na ich zastosowanie w ekonomii. Początkowo były to proste równania. Z czasem zaczęto wzbogacać je o elementy stochastyczne. Próby uchwycenia „ruchu" układu gospodarczego doprowadziły do stosowania równań różniczkowych zwyczajnych[3]. Zwrócić jednak warto uwagę na fakt, iż w przeciwieństwie do fizyki, specyfika zjawisk ekonomicznych zniechęca do takiego podejścia.

Zauważmy, iż funkcje stanowiące niewiadome w równaniach różniczkowych muszą być ciągłymi funkcjami pewnej zmiennej. Niech tą zmienną będzie czas. Wprowadzenie czasu ciągłego ma swoje istotne zalety, sporo korzyści przy tym wynika z definicji układu dynamicznego i jego konsekwencji. Korzystanie z własności funkcji ciągłych i różniczkowalnych[4] ma wiele cennych zalet, koniecznym jest jednak wzięcie pod uwagę różnic pomiędzy rzeczywistością a modelem i rozpatrywanie kształtowania się zjawiska w przyszłości w odpowiednich przedziałach (czyli sztuczne przyjęcie jednostki czasu dla prognoz, np. jednego roku).

---

[1] Por. Keynes (1956).
[2] Por. Marshall (1925).
[3] Por. np. Tokarski (2003), Romer (2000).
[4] Por. np. Krasiński (2001).

Zajmijmy się teraz problemem, który stanowi podstawę naszych rozważań. Niech model ekonomiczny będzie postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych. Załóżmy też, iż znamy jego rozwiązanie analityczne oraz podstawowe własności tegoż rozwiązania. Przyjrzyjmy się sytuacji, w której rozwiązanie to nie jest rozwiązaniem stabilnym.

Przypomnijmy sobie wady, jakie mają wykorzystywane jako warunki początkowe dane dotyczące zjawisk ekonomicznych modelowanych za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych. Ze względu na niemożliwe do wyeliminowania błędy pomiarów, możemy być pewni, iż podane przez nas warunki początkowe różnią się od rzeczywistych. Rozwiązując układ i znajdując pewną funkcję, która spełnia podane przez nas, lecz odległe od prawdziwych wartości warunki początkowe, popełniamy błąd, którego wielkości na dodatek nie jesteśmy w stanie nawet oszacować. Odległość otrzymanej przez nas funkcji od prawdziwej trajektorii układu dążyć może do nieskończoności.

Badanie stabilności rozwiązań modeli ekonomii matematycznej formułowanych w języku równań różniczkowych zwyczajnych jest koniecznością. Wszelkie postulaty dotyczące sterowania układu gospodarczego bez pewności dotyczącej stabilności punktu równowagi pozostać muszą jedynie postulatami.

Podobnym problemem jest zagadnienie weryfikowalności empirycznej modeli teoretycznych. Jeżeli dane pozwalają na udane formułowanie pewnych hipotez statystycznych dotyczących modelu teoretycznego, a następnie testowanie ich, wówczas można w istocie mówić o istotnym wpływie teorii na praktykę gospodarczą. W każdym innym przypadku teoria pozostaje teorią.

Celem niniejszej pracy jest prezentacja wyliczeń punktu równowagi dla modelu Solowa przy ogólniejszych niż klasyczne założenia, oraz próba weryfikacji statystycznej stabilności tego rozwiązania dla gospodarki Polski. Dodatkowo przeprowadzona jest dyskusja dotycząca możliwości przeprowadzania takich weryfikacji oraz dalszego rozwijania teorii ogólnego modelu Solowa.

2. Charakterystyka modelu Solowa

Model wzrostu zaproponowany przez Solowa[5] w jego fundamentalnej pracy „*A Contribution to the Theory of Economic Growth*” został skonstruowany przy pewnych założeniach. Jak sam Solow pisze: „Założenia są właśnie tym, co czyni teorię teorią”[6]. Dokonamy wyprowadzenia ogólniejszej postaci modelu niż znana dzięki mniejszej ilości założeń. Na potrzeby uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenie:

$$\dot{X}(t) \equiv \frac{dX(t)}{dt}.$$

[5] Por. R. Solow (1956).

[6] Por. Solow (1956).

Solow rozważa równanie wzrostu względem czynnika produkcji, który nazywa kapitałem. Wobec braku jednoznaczności tego określenia[7] przypuszczać można, iż na myśli miał wartość środków trwałych. Równanie to teoria ekonomii określa następująco:

$$\dot{K} = I - \lambda \cdot K,$$

gdzie:
K – wartość kapitału w formie środków trwałych zaangażowanych w proces produkcyjny,
I – wielkość inwestycji w środki trwałe, oddanych do użytku,
λ – jest współczynnikiem deprecjacji kapitału, $\lambda \in (0;1)$.

Nadmienić należy, iż Solow w swoim modelu pomija efekt deprecjacji kapitału.

Poziom inwestycji uzależniony jest od wielkości produkcji oraz pewnego współczynnika zwanego przez Solowa stopą oszczędności poprzez relację następującej postaci:

$$I = s \cdot Y,$$

gdzie:
s – jest stopą oszczędności[8], $s \in (0;1)$,
Y – wielkość produkcji.

Relacja powyższa jest efektem założeń dotyczących równości oszczędności i inwestycji. Pomijając to założenie, będziemy dalej nazywać s stopą inwestycji.

Zauważmy, iż w powyższym przyjmujemy stałość współczynnika deprecjacji kapitału oraz stopy inwestycji. Założenie to jest zdaniem autorów zbyt upraszczające, przyjmijmy je jednak tymczasowo.

Poziom produkcji określony jest przez tzw. funkcję produkcji[9], która u Solowa jest funkcją dwuczynnikową. Od funkcji tej wymaga się klasy co najmniej C^2, dodatnich pochodnych pierwszego rzędu, spełniania warunków Inady oraz jednorodności stopnia pierwszego. Przyjmując te założenia, mamy:

$$Y = F(K, L),$$

gdzie:
Y – wielkość produkcji,
K – wartość środków trwałych zaangażowana w proces produkcyjny (kapitał),
L – wielkość zasobów sił pracy w gospodarce.

Zauważmy, iż pomijamy w tym miejscu kilka innych założeń o funkcji produkcji, m.in. ujemny znak drugich pochodnych cząstkowych, uwzględniania in-

[7] Por. Milo, Bieda, Leszczyk, Miler, Witkowska (2004).
[8] Por. Solow (1956), Tokarski (2003).
[9] Por. Żółtowska (1997).

nych czynników produkcji itp. Przyjęte założenia w zupełności wystarczą do dalszych rozważań, dając tym samym, zdaniem autorów, silniejsze tezy.

Konieczny jest w tym miejscu komentarz dotyczący zmiennej *L*. Określenie „zasoby sił pracy" jest niejednoznaczne. Trudno jest utożsamić tą zmienną z wielkością zatrudnienia, aktywnością zawodową, ilością przepracowanych roboczogodzin w gospodarce itp. Brak jest wciąż dostatecznie dobrego i wiarygodnego miernika pracy, stąd w naszych dalszych rozważaniach ujmować pod tą nazwą musimy abstrakcyjny czynnik produkcji, stanowiący „pracę". O jego abstrakcyjności świadczyć może fakt, iż często posługiwać się będziemy określeniem „jednostka pracy". W dalszej części będziemy zamiennie stosować określenia „zasoby sił pracy" i „wielkość zatrudnienia".

Wykorzystując teraz jednorodność stopnia pierwszego funkcji F, dokonujemy podzielenia obu stron przez wielkość zatrudnienia. Mamy:

$$\frac{Y}{L} = \frac{1}{L} F(K, L) = F(k, 1),$$

gdzie $k = \frac{K}{L}$ jest wielkością technicznego uzbrojenia pracy, a więc ilością „kapitału" przypadającą na jednostkę pracy. Wielkość technicznego uzbrojenia pracy jest zmienną, którą będziemy dalej rozważać w naszej analizie. Definicyjnie jest to wielkość kapitału przypadająca na jednostkę nakładów pracy, jej trajektoria ruchu informuje nas o koniecznych proporcjach pomiędzy dwoma czynnikami produkcji.

Zauważmy, że:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}.$$

Po wstawieniu powyższych wzorów mamy:

$$\dot{k} = \frac{s \cdot F(K, L) - \lambda \cdot K}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} = s \cdot F(k, 1) - k \cdot \left(\lambda + \frac{\dot{L}}{L}\right).$$

Otrzymane równanie stanowi ogólną wersję równania Solowa. Ze względu na brak znajomości postaci funkcyjnej funkcji produkcji oraz stopy wzrostu zasobów pracy, nie jesteśmy w stanie podać jego ogólnego analitycznego rozwiązania. Aby znaleźć konkretne rozwiązanie globalne, należy przyjąć określoną postać funkcyjną dla funkcji produkcji oraz pewne założenia dotyczące stopy wzrostu zasobów pracy. Wówczas rozpatrywać możemy problemy związane ze stabilnością modelu Solowa oraz jego konkretnych punktów. Dowodzi się, iż równanie to jedynie przy założeniu ograniczenia pochodnej funkcji produkcji w badanym podzbiorze zawsze ma lokalne rozwiązanie.

Wróćmy do ogólnego równania Solowa. Zgodnie z teorią, poszukiwać należy teraz punktu stacjonarnego, tzn. punktu, po osiągnięciu którego układ samoistnie nie będzie miał skłonności do dalszego przemieszczania się. Z definicji jest to punkt, dla którego zachodzi warunek:

$$\dot{k} = 0 .$$

Korzystając z ogólnego równania, otrzymujemy, iż punktem stacjonarnym jest taki punkt k^*, dla którego spełnione jest równanie:

$$s \cdot F(k^*,1) - k^*(\lambda + \frac{\dot{L}}{L}) = 0 .$$

Badanie stabilności takiego punktu dokonujemy dzięki lokalnej linearyzacji równania ruchu w otoczeniu punktu stacjonarnego przy wykorzystaniu wzoru Taylora oraz sprawdzenie warunku stabilności za pomocą twierdzenia Lapunowa. Pamiętać tu należy o pewnych wadach takiego postępowania[10].

Oznaczmy:

$$H(k) = s \cdot F(k,1) - k(\lambda + \frac{\dot{L}}{L}) .$$

Wykorzystując wspomniane twierdzenia, dostajemy:

$$\frac{dH(k)}{dk}(k^*) = s \cdot \frac{dF(k,1)}{dk}(k^*,1) - (\lambda + \frac{\dot{L}}{L}) = s \cdot \frac{dF(K,L)}{dK}(k^*,1) - (\lambda + \frac{\dot{L}}{L}) .$$

Obliczony współczynnik stanowi linearyzację naszego równania. Celem sprawdzenia stabilności rozważmy:

$$s \cdot \frac{dF(K,L)}{dK}(k^*,1) - (\lambda + \frac{\dot{L}}{L}) < 0 ,$$

czyli:

$$\frac{dF(K,L)}{dK}(k^*,1) < \frac{(\lambda + \frac{\dot{L}}{L})}{s} .$$

Z drugiej strony mamy:

$$\frac{dF(K,L)}{dK}(k^*,1) > 0 .$$

Chcąc przeprowadzić analizę otrzymanej nierówności należy ustalić wartość czynnika produkcji związanego z pracą oraz wartość jego pochodnej oraz, dzięki założeniu o stałości współczynnika deprecjacji kapitału oraz stopy oszczędności, oszacować te dwie wartości. Wówczas ograniczenie górne nakładane przez powyższą nierówność oznacza, iż konieczne jest, aby wartość k^* w punkcie stacjonarnym nie była zbyt bliska zeru. W przeciwnym razie, wartość pochodnej (co znów wynika z warunków Inady) dąży do nieskończoności.

[10] Por. Milo, Malaczewski (2004).

3. Empiryczna weryfikacja stabilności punktu równowagi modelu Solowa

W trakcie empirycznej weryfikacji stabilności punktu równowagi modelu Solowa napotkać można kilka istotnych trudności. Pierwsze pytanie, na które badacz musi sobie odpowiedzieć, dotyczy zmiennych ekonomicznych, których użyje w procesie szacowania parametrów. Wobec wspomnianej już wcześniej niejednoznaczności niektórych pojęć, takich jak „kapitał" czy „praca", konieczne jest dokonanie rozsądnego wyboru. W naszym przypadku autorzy wybrali jako kapitał – kapitał fizyczny[11], a jako pracę – wielkość zatrudnienia. Mimo niedoskonałości tych mierników przyznać trzeba, że aktualnie trudno jest o lepsze.

Kolejnym problemem, charakterystycznym dla gospodarek Europy środkowo – wschodniej, jest problem długości szeregów czasowych, na podstawie których można dokonać szacowania parametrów. Gdy próbujemy opierać się na danych rocznych, skorzystać możemy co najwyżej z 10 obserwacji. Przejście na dane kwartalne nie zawsze jest możliwe, choć konieczne. Autorzy wykorzystali dane kwartalne odnośnie kapitału fizycznego wykorzystując oszacowania własne tego kapitału[12].

Następny kłopot pomiarowy dotyczy zmiennej inwestycje, używanej przez Solowa. Z równania przyrostu kapitału wywnioskować można, iż Solow na myśli miał inwestycje oddane do użytku, zwiększające faktycznie wartość środków trwałych. Takie dane nie są jednak publikowane dla gospodarki Polski, w związku z czym konieczne było przybliżenie ich sumą nakładów inwestycyjnych i inwestycji rozpoczętych.

Wspomniane problemy zmuszają do zadania pytania, czy w ogóle weryfikacja hipotez modelu Solowa dla gospodarki Polski ma sens, czy też nie należałoby pozostawić jej jedynie w zakresie teorii. Metody, którymi autorzy próbowali sobie z nimi poradzić, nie należą do idealnych, a wyniki w ten sposób uzyskane należy traktować z dużą ostrożnością.

Oszacowano wartości niezbędnych parametrów dla gospodarki Polski, korzystając z banku danych Katedry Ekonometrii UŁ. Wykorzystano 40 danych kwartalnych za okres od pierwszego kwartału 1994 do czwartego kwartału 2003. W przypadku niektórych oszacowań rozmiar próby zmieniał się w miarę dostępności danych. Do obliczeń użyty został pakiet komputerowy *E – views®*. Przyjęto oznaczenie:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}.$$

Parametry były szacowane przy wykorzystaniu następujących równań:

[11] Por. Milo, Bieda, Leszczyk, Miler, Witkowska (2004).
[12] Por. Milo, Bieda, Leszczyk, Miler, Witkowska (2004).

a) stopę wzrostu zasobów pracy oszacowano z równania postaci:

$$\Delta L_t = n \cdot L_t + \xi_{1t},$$

gdzie :
L_t – wielkość zasobów pracy w okresie *t.*
ξ_{1t} – składnik losowy.

b) krańcową skłonność do oszczędzania (inwestycji) oszacowano z równania postaci:

$$I_t = s \cdot Y_t + \xi_{2t},$$

gdzie :
I_t – wielkość realnych nakładów inwestycyjnych oraz inwestycji rozpoczętych w okresie *t.*
Y_t – wielkość produkcji (realnego PKB) w okresie *t.*
ξ_{2t} – składnik losowy.

c) współczynnik deprecjacji kapitału otrzymano z równania postaci:

$$\Delta K_t = I_t + (-\lambda) \cdot K_t + \xi_{3t},$$

gdzie :
K_t – wartość kapitału fizycznego w okresie *t.*
I_t – wielkość realnych nakładów inwestycyjnych oraz inwestycji rozpoczętych w okresie *t.*
ξ_{3t} – składnik losowy.

d) średnią wartość pochodnej funkcji produkcji względem pierwszego czynnika produkcji uzyskano z równania postaci:

$$\Delta Y_t = \alpha \cdot \Delta K_t + \xi_{4t},$$

gdzie :
K_t - wartość kapitału fizycznego w okresie *t.*
Y_t - wielkość produkcji (realnego PKB) w okresie *t.*
ξ_{4t} - składnik losowy.

Oszacowania dały następujące rezultaty:

Tabela 1. Wyniki estymacji

Model	Zakres próby	Wartość parametru	Wartość statystyki t	Poziom istotności
$\Delta L_t = n \cdot L_t + \xi_{1t}$	1994:2 2003:4	-0.003268	-1.354930	0.1834
$I_t = s \cdot Y_t + \xi_{2t}$	1994:1 2003:4	0.103379	16.18145	0.0000
$\Delta K_t = I_t + (-\lambda) \cdot K_t + \xi_{3t}$	1994:2 2000:4	-0.014905	-1.758359	0.0905
$\Delta Y_t = \alpha \cdot \Delta K_t + \xi_{4t}$	1994:2 2000:4	0.151716	1.551301	0.1329

Źródło: obliczenia własne.

Wartości oszacowań są zgodne z teorią ekonomii, wątpliwości może budzić istotność statystyczna oszacowanych parametrów. W związku z tym badanie stabilności punktu będącego rozwiązaniem dokonane zostało dwukrotnie – raz przyjmując oszacowane wartości, drugi raz – przyjmując wartości równe zero tam, gdzie na poziomie istotności 0,1 nie udało się odrzucić hipotezy zerowej.

Przy użyciu symboliki zastosowanej w oszacowaniach, testowana nierówność ma postać:

$$\alpha < \frac{\lambda + n}{s}.$$

W pierwszym przypadku:

$$0.152 < \frac{0.015 - 0.003}{0.103} = 0.117,$$

a w drugim:

$$0 < \frac{0.015}{0.103} = 0.146.$$

Jak widać, w pierwszym przypadku oszacowania wskazują na brak stabilności punktu będącego punktem równowagi modelu Solowa, w drugim natomiast taka stabilność występuje. Różnica pomiędzy podejściami w obu tych przypadkach jest jednak znacząca.

4. Możliwości dalszych rozszerzeń modelu Solowa

Wyprowadzone równanie modelu Solowa nie stanowi najogólniejszej możliwej jego wersji. W równaniu tym występują stopa inwestycji oraz współczynnik deprecjacji kapitału, traktowane jednak były w dotychczasowej analizie jako stałe w całym rozpatrywanym okresie, a nawet stałe aż do nieskończoności. Jest to założenie, zdaniem autorów, zbyt upraszczające. Potraktowanie ich jako ciągłych funkcji czasu nie zmienia jednak zbytnio naszej analizy, zupełnie inaczej jednak może wyglądać sytuacja, jeżeli obie te wielkości potraktujemy jako funkcje technicznego uzbrojenia pracy. Istnieją ekonomiczne przesłanki do takich twierdzeń, matematycznie powoduje to pojawienie się dodatkowych składników w momencie obliczania pochodnej prawej strony:

$$\frac{dH(k)}{dk} = s(k)\cdot\frac{dF(k,1)}{dk} + F(k,1)\cdot\frac{ds(k)}{dk} - (\lambda(k) + \frac{\dot{L}}{L}) - k\cdot\frac{d\lambda(k)}{dk}.$$

Konieczne jest teraz rozważenie, czy nowe elementy powyższego wyrażenia mogą mieć wpływ na znak całej prawej strony. Bez oszacowań odpowiednich funkcji i ich pochodnych nie jesteśmy jednak w stanie tego stwierdzić.

Kolejnym zagadnieniem jest stopa wzrostu czynnika produkcji związanego z pracą. Solow przyjmuje go na stałym poziomie, co prowadzi do prostego wniosku dotyczącego kształtu funkcji zasobów sił pracy. I znów jest to założenie, zdaniem autorów, zbyt upraszczające. Czynniki demograficzne, ekonomiczne i społeczne mają tak wielki wpływ na ludzką skłonność do poszukiwania pracy, aktywność zawodową oraz rozrodczość, iż, nawet w przypadku gospodarki zamkniętej, teza o wykładniczym wzroście zasobów sił pracy jest prawie niemożliwa do obronienia, tym bardziej mając na względzie problemy definicyjne zasobów sił pracy. Koniecznym jest tu rozważenie pewnej funkcji ograniczonej, o wartościach w przedziale [-1;1], być może okresowej.

Analogiczny problem występuje, gdy rozpoczniemy rozważanie stopy wzrostu zasobów sił pracy jako funkcji technicznego uzbrojenia pracy. Znów w trakcie liczenia pochodnej pojawiają się dodatkowe składniki, mające niewątpliwie wpływ na jej znak.

Te i inne sytuacje, które w modelach teoretycznych związanych z modelem Solowa można rozważyć, mają mniejszy bądź większy wpływ na stabilność punktu stacjonarnego. Istotnym jest spostrzeżenie, iż znajomość kształtu funkcji produkcji i wiedza o procesach kształtujących odpowiednie parametry gospodarki (jak stopa inwestycji, współczynnik deprecjacji kapitału) daje nam możliwość zbliżenia się do odpowiedzi na pytanie: czy gospodarka zmierzająca do punktu równowagi będzie miała skłonność do pozostawania w jego otoczeniu, czy też ów punkt jest punktem niestabilnym i szoki zewnętrzne „wypchną" ją z tego położenia bezpowrotnie. Sam Solow w swoim artykule podaje przykład, w którym istnieje rozwiązanie niestabilne. Fakt istnienia rozwiązania daje nam możliwość sterowania gospodarką, a istnienie punktu granicznego i jego własności – istotną informację o charakterze sytuacji gospodarczej, w kierunku której zmierzać powinna.

Problematyczna wydaje się tematyka empirycznej weryfikacji stabilności modelu Solowa. Zdaniem autorów problem leży tu nie tylko w danych, które wciąż jeszcze nie tylko mają zbyt krótkie szeregi, lecz także wiele wątpliwości pozostawia jakość i ilość publikowanych wielkości. Niedoskonałość polskiego systemu gospodarczego powoduje, iż model Solowa może być zbyt słabym narzędziem w próbie opisywania trajektorii zmiennych ekonomicznych dla naszego kraju. Być może konieczna jest przebudowa go przy uwzględnieniu odpowiednich warunków lub rozważanie jeszcze ogólniejszej jego postaci

Literatura

Keynes, J. M. (1956), *Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza,* PWN, Warszawa.
Krasiński, T. (2001), *Analiza matematyczna, funkcje jednej zmiennej,* WUŁ, Łódź.
Marshall, A. (1925), *Zasady ekonomiki,* Warszawa.
Milo, W., Bieda, D., Leszczyk, A., Miler, A., Witkowska, A. (2004), O kapitale fizycznym, *Wiadomości Statystyczne*, luty, 1–11.
Milo, W., Malaczewski, M. (2004), Warunki stabilności wybranych nieliniowych modeli wzrostu, opracowanie w KBN nr 2 H02B 02 52 3.
Romer, D. (2000), *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa.
Solow, R. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, luty 1956.
Tokarski, T. (2003), Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*,* *Ekonomista*, nr 3, 341–363
Żółtowska, E. (1997), *Funkcje produkcji – teoria, estymacja, zastosowania,* WUŁ, Łódź.