DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 6–8 września 2005 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Krzysztof Jajuga
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Modelowanie stóp procentowych a narzędzia ekonometrii finansowej

1. Modelowanie stóp procentowych – wprowadzenie

W ostatnich dwudziestu latach obserwowany jest dynamiczny rozwój metod ekonometrii finansowej. Metody te znalazły zastosowanie w analizie wielu finansowych szeregów czasowych, przede wszystkim szeregów cen akcji i kursów walutowych. W ostatnim okresie można zaobserwować stopniowe „zbliżanie" się metod wypracowanych na gruncie klasycznej ekonometrii finansowej, przede wszystkim szeroko rozumianych modeli klasy ARIMA-GARCH – mającymi u podstaw procesy stochastyczne w czasie dyskretnym, z metodami wypracowanymi na gruncie matematyki finansowej – mającymi u podstaw procesy stochastyczne w czasie ciągłym. Niezależnie od tego, obie grupy metod w coraz większym stopniu odnoszą się do ekonomii finansowej, zawierającej teorie kształtowania się zjawisk finansowych, w tym również teorie dynamiki cen i stóp zwrotu cen na rynkach finansowych.

Spośród wszystkich cen finansowych, stopy procentowe są niewątpliwie najtrudniejsze w modelowaniu. Jedną z głównych przyczyn jest to, iż tak naprawdę modelowaniu podlega nie jedna stopa procentowa, lecz wiele powiązanych ze sobą stóp procentowych, dotyczących różnych okresów – jest to modelowanie tzw. struktury terminowej stóp procentowych (*term structure of interest rates*), zwane również zagadnieniem krzywej dochodowości lub krzywej stopy dochodu (*yield curve*). Struktura terminowa stóp procentowych jest to zależność stóp procentowych (w szczególności stóp dochodu dłużnych instrumentów finansowych) od terminu do wykupu, czyli od długości okresu inwestycji.

Zagadnienie to jest kluczowym problemem o charakterze teoretycznym i praktycznym. Teoretyczne znaczenie tego zagadnienia jest duże, gdyż, po pierwsze, nie zostało ono rozwiązane w sposób zadowalający, po drugie, modele struktury terminowej stóp procentowych są wykorzystywane w wielu innych zagadnieniach teoretycznych, np. w wycenie instrumentów dłużnych i instrumentów pochodnych na stopę procentową. Również w praktyce znajomość struktury terminowej stóp procentowych jest istotna, gdyż pozwala na podejmowanie efektywnych decyzji dotyczących inwestowania, finansowania i zarządzania ryzykiem stopy procentowej.

W teorii stóp procentowych modelowane są następujące stopy:

– stopa natychmiastowa (*spot rate*);
– stopa terminowa (*forward rate*);
– chwilowa stopa natychmiastowa (*instantaneous spot rate*), inaczej zwana stopą krótkoterminową (*short rate*);
– chwilowa stopa terminowa (*instantaneous forward rate*).

W praktyce właściwie większość powyższych stóp nie jest obserwowana bezpośrednio. Do określenia stóp *spot*, a następnie na ich podstawie stóp *forward*, wykorzystywane są stopy procentowe obserwowane bezpośrednio na rynku. Zaliczamy do nich:

– w przypadku okresów krótszych niż rok: stopy rynku międzybankowego (np. WIBOR, LIBOR, Euribor), stopy rentowności bonów skarbowych, stopy transakcji *repo* na rynku pieniężnym;
– w przypadku okresów dłuższych niż rok: stopy dochodu obligacji, czyli *Yield To Maturity* (YTM), stopy kontraktów *swap*.

Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych jest przeprowadzane najczęściej w odniesieniu do stóp dochodu dłużnych instrumentów skarbowych. Są to zatem stopy wolne od ryzyka. Oprócz tego krzywe dochodu można wyznaczać dla stóp dochodu innych instrumentów dłużnych. Są to stopy zawierające premię za ryzyko, np. za ryzyko kredytowe emitenta posiadającego kategorię ratingową BB. Jeśli dla dowolnego momentu wyznaczy się różnice między stopami dochodu instrumentów dłużnych emitenta kategorii BB a stopami dochodu wolnymi od ryzyka, wówczas otrzymujemy tzw. strukturę terminową *spreadu* kredytowego (*term structure of credit spread*).

Wszystkie powyżej przedstawione pojęcia dotyczą **poziomu** stóp procentowych. W modelach stóp procentowych (podobnie jak w modelach innych instrumentów finansowych, takich jak akcji czy walut) istotną rolę odgrywa również **zmienność** (*volatility*) tych stóp. W takiej sytuacji każda stopa procentowa traktowana jest jako zmienna losowa, zaś odchylenie standardowe tej zmiennej informuje o zmienności. Określając dla każdego momentu to odchylenie standardowe otrzymuje się nową konstrukcję, tzw. **strukturę terminową zmienności stóp procentowych** (*term structure of volatility of interest rates*). W ten sposób każdej krzywej stóp dochodu odpowiada krzywa zmienności tych stóp.

Obserwacje historycznych stóp procentowych występujących na rynkach finansowych doprowadziły do wyodrębnienia kilku prawidłowości dotyczących tych stóp. Są one następujące:
– stopy procentowe w długim okresie charakteryzują się efektem „powrotu do średniej", tzn. „powrotem" do pewnego przeciętnego długookresowego poziomu;
– zmiany stóp procentowych dotyczących różnych okresów nie są z sobą bardzo mocno skorelowane;
– zmienność stóp procentowych krótkoterminowych jest większa niż zmienność stóp procentowych długoterminowych;
– występuje skorelowanie między poziomem stóp procentowych i zmiennością stóp procentowych.

2. Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – klasyfikacja

Jak już wskazywaliśmy, powstało bardzo wiele modeli struktury terminowej stóp procentowych. Modele te mają różny rodowód, różny stopień skomplikowania, różne koncepcje u ich podstaw. Analiza modeli proponowanych w literaturze, a również tych stosowanych w praktyce, doprowadziła nas do wyróżnienia dwóch podstawowych klas modeli:

1. modele aproksymacji krzywej dochodowości.
2. modele dynamiki stóp procentowych.

Modele aproksymacji krzywej dochodowości polegają na wyznaczeniu pewnej funkcji, która przybliża dane empiryczne, tzn. stopy dochodu odpowiadające pewnym okresom. Otrzymana funkcja umożliwia określenie stóp dochodu dla dowolnych okresów. Można powiedzieć, że są to w pewnym sensie modele statyczne, wyjaśniające obecną strukturę terminową stóp procentowych.

Modele dynamiki stóp procentowych wychodzą od pewnego ogólnego modelu, opisującego dynamikę stóp procentowych, a następnie na podstawie danych empirycznych dokonuje się wyznaczenia parametrów. Są to modele dynamiczne, wyjaśniające zmiany struktury terminowej stóp procentowych.
Przejdziemy teraz do syntetycznej prezentacji modeli należących do tych dwóch klas.

W klasie **modeli estymacji krzywej dochodowości** wyróżnić można trzy podstawowe rodzaje modeli:
– modele bezpośrednie;
– modele aproksymacji segmentowej;
– modele aproksymacji całej krzywej dochodowości.

Modele bezpośrednie polegają na wyznaczeniu stóp *spot* na podstawie stóp dochodu obligacji z odsetkami.

Modele aproksymacji segmentowej polegają na podziale przedziału czasowego na kilka segmentów, a następnie konstrukcji krzywej dochodowości na podstawie danych empirycznych dla każdego segmentu. Przy tym najczęściej dzieli się przedział czasowy na trzy segmenty, odpowiadające odpowiednio: stopom krótkoterminowym (1 dzień – 1 rok), stopom średnioterminowym (1 rok – 10 lat), stopom długoterminowym (powyżej 10 lat). Jeśli zaś chodzi o funkcje aproksymujące, to najczęściej stosowane są wielomiany lub funkcje wykładnicze.

Modele aproksymacji całej krzywej dochodowości polegają na zastosowaniu pewnej funkcji opisującej wszystkie stopy procentowe, przy czym parametry tej funkcji mają klarowną z praktycznego punktu widzenia interpretację. Można tutaj wyróżnić wiele możliwych modeli, jednym z najbardziej popularnych jest model Nelsona-Siegela (Nelson, Siegel (1987)), dany wzorem:

$$r_m = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{1-\exp(-m/\delta_1)}{m/\delta_1}\right) + \beta_2 \exp\left(\frac{1-\exp(-m/\delta_1)}{m/\delta_1} - \exp(m/\delta_1\right) + u$$

gdzie u jest to składnik losowy, zaś poszczególne parametry mają następującą interpretację:

β_0 – długoterminowa stopa procentowa,

β_1 – *spread* między stopą długoterminową a stopą krótkoterminową,

β_2 – stopień krzywizny krzywej dochodowości,

δ_1 – prędkość, z jaką składnik krótkoterminowy i średnioterminowy krzywej zdążają do zera.

W klasie **modeli dynamiki stóp procentowych** można wyróżnić:
- klasyczne modele ekonometrii finansowej;
- modele drzew dwumianowych z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych;
- modele stochastycznych równań różniczkowych z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych;
- modele drzew dwumianowych wynikające z koncepcji arbitrażu;
- modele stochastycznych równań różniczkowych wynikające z koncepcji arbitrażu.

Klasyczne modele ekonometrii finansowej są to znane modele klasy ARIMA-GARCH służące do modelowania finansowych szeregów czasowych rozpatrywanych w czasie dyskretnym. W zakresie modelowania poziomu są to modele warunkowej wartości oczekiwanej ARIMA oraz ich modyfikacje i uogólnienia. W zakresie modelowania zmienności są to modele warunkowej wariancji GARCH oraz ich modyfikacje i uogólnienia. W tym wypadku modelowana zmienna jest to oczywiście stopa procentowa.

Następne dwa rodzaje modeli charakteryzują się tzw. endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych. Oznacza to, że jest zadany pewien hipotetyczny model, zaś jego parametry szacowane są na podstawie danych empirycznych. W pierwszej grupie tego typu modeli dynamika stóp procentowych opisywana jest za pomocą drzew dwumianowych. Zakłada się, że na koniec każdego okresu należącego do rozpatrywanego przedziału czasowego stopa procentowa może przyjąć dwie wartości (każdą z jednakowym prawdopodobieństwem). Przy rozpatrywaniu wielu okresów dynamika stóp procentowych może być w sposób graficzny przedstawiona za pomocą drzewa, co wyjaśnia nazwę metody.

W drugiej grupie modeli z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych dynamika ta jest opisana modelem w postaci stochastycznego równania różniczkowego.

Z kolei dwa ostatnie rodzaje modeli charakteryzują się tym, iż wywodzą się z koncepcji braku arbitrażu. Koncepcja braku arbitrażu oznacza, iż dokonuje się wyceny instrumentów finansowych w taki sposób, aby nie był możliwy arbitraż, tzn. strategia, która nie wymaga nakładów, jest wolna od ryzyka i daje dodatni przychód. Przy tym otrzymany model jest zgodny z obserwowanymi rzeczywistymi stopami procentowymi, a nie wynika z endogenicznie określonej dynamiki stóp.

Również tutaj można wyróżnić dwa rodzaje modeli. Pierwszy rodzaj do opisu dynamiki wykorzystuje drzewa dwumianowe. Z kolei drugi rodzaj wynika ze stochastycznych równań różniczkowych.

3. Modele dynamiki stóp procentowych wynikające ze stochastycznych równań różniczkowych

Najbardziej zaawansowane modele struktury terminowej to te, w których dynamika stóp procentowych opisana jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego. Przedstawimy teraz trzy najczęściej w finansach stosowane typy modeli zapisanych w postaci stochastycznych równań różniczkowych. Przy tym oprócz klasycznej postaci modelu podamy również wersje dyskretną, w której zakłada się, że czas może się zmieniać o jednostkę. Podstawowe modele są następujące (dla uproszczenia nie wprowadza się w oznaczeniach osobnego indeksu dla okresu, którego dotyczy stopa, zaś indeks przy stopie procentowej oznacza dany moment czasowy):

1. Geometryczny ruch Browna, dany wzorem:

$$dr_t = \mu r_t dt + \sigma r_t dZ_t .$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} = (1+\mu)r_t + \sigma r_t \varepsilon_{t+1}.$$

2. Proces pierwiastkowy, dany wzorem:

$$dr_t = \mu r_t dt + \sigma \sqrt{r_t} dZ_t.$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} = (1+\mu)r_t + \sigma \sqrt{r_t} \varepsilon_{t+1}.$$

3. Proces Ornsteina-Uhlenbecka (charakteryzujący się właściwością powrotu do średniej), dany wzorem:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t.$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} = \kappa\theta + (1-\kappa)r_t + \sigma\varepsilon_{t+1}.$$

Jak wynika z ostatniego wzoru, proces Ornsteina-Uhlenbecka charakteryzuje się właściwością powrotu do średniej – stopa procentowa w danym momencie jest skorygowaną o składnik losowy ważoną średnią dwóch wielkości: długoterminowej stopy procentowej oraz stopy procentowej z poprzedniego momentu. Przy tym waga przyporządkowana długoterminowej stopie procentowej jest interpretowana jako prędkość powrotu do tej średniej długookresowej.

Powyżej przedstawione modele znalazły swoje poczesne miejsce w konkretnych wersjach modele stóp procentowych z endogenicznie określoną dynamiką. Modeli tych jest wiele, a dzieli się je zazwyczaj w zależności od liczby czynników, które są modelowane. W szczególności w najwcześniej zaproponowanych modelach jednoczynnikowych jedynym czynnikiem jest tzw. krótkoterminowa stopa procentowa, czyli chwilowa stopa *spot*. Jeśli modelowanych czynników jest więcej, wówczas pod uwagę bierze się na przykład zmienność krótkoterminowej stopy procentowej i średnią stopę długookresową.

Przedstawimy teraz kilka najbardziej popularnych modeli, wskazując na modelowane czynniki.

1. Modele jednoczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa:

– model Vasicka (Vasicek (1977)):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t.$$

– model Coxa-Ingersolla-Rossa (Cox, Ingersoll, Ross (1985)):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dZ_t.$$

2. Modele dwuczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa i zmienność tej stopy:

– model Fonga i Vasicka (Fong, Vasicek (1991)):

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa(\theta - r_t)dt + \sqrt{v_t}\, dZ_{1t} \\ dv_t &= \gamma(\vartheta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}\, dZ_{2t} \end{aligned}.$$

3. Modele trójczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa, zmienność tej stopy oraz średnia długoterminowa:

– model Chena (Chen (1996)):

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{r_t}\, dZ_{1t} \\ dv_t &= \gamma(\vartheta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}\, dZ_{2t} \\ d\theta_t &= \varphi(\lambda - \theta_t)dt + \eta\sqrt{\theta_t}\, dZ_{3t} \end{aligned}.$$

Jak widać, we wszystkich powyżej przedstawionych modelach rozpatrywane procesy są to kombinacje procesów Ornsteina-Uhlenbecka z procesami pierwiastkowymi.

Pewną wadą przedstawionych modeli jest jednak to, iż dynamika stóp procentowych jest określana endogenicznie, co oznacza, że nawet w przypadku wieloczynnikowych modeli obecna struktura terminowa stóp procentowych, dana w postaci stóp dochodu obligacji, niekoniecznie musi być odzwierciedlona w sposób dokładny.

Z tą niedogodnością próbują sobie radzić modele arbitrażowe. Jak już wskazywaliśmy, są dwie grupy takich modeli. Jedna grupa wykorzystuje wspomnianą już koncepcję drzew dwumianowych. Pierwszy i najbardziej znany model tej klasy został zaproponowany przez Ho i Lee (Ho, Lee (1986)).

Druga grupa modeli arbitrażowych wykorzystuje stochastyczne równania różniczkowe. Pierwszym i najbardziej znanym modelem tej klasy jest model Heatha-Jarrowa-Mortona (Heath, Jarrow, Morton (1992)). W modelu tym przedmiotem zainteresowania jest chwilowa stopa terminowa, a zatem tak naprawdę modelowana jest jednocześnie cała struktura terminowa stóp procentowych. Okazuje się przy tym, że wiele modeli powstałych wcześniej może być potraktowanych jako szczególne przypadki modelu Heatha-Jarrowa-Mortona.

W najbardziej ogólnej wersji model ten można zapisać następująco:

$$dr_{t,T} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dZ_t.$$

Jak widać, w tym modelu zmiany chwilowej stopy *forward* są funkcją chwilowego dryfu i chwilowej zmienności tej stopy.

Przedstawione powyżej modele muszą być wyznaczone w praktyce, tzn. estymowane i/lub kalibrowane na podstawie danych obecnych i historycznych. Prowadzi to do konkretnych wyzwań pod adresem ekonometrii. To właśnie ekonometria dostarcza przecież narzędzi służących do weryfikacji hipotez stawianych przez teorię ekonomii – w tym wypadku modeli stóp procentowych zaproponowanych przez matematykę finansową i ekonomię finansową.

Literatura

Chen, L. (1996), Stochastic mean and stochastic volatility – a three factor model of the term structure of interest rates and its applications in derivatives pricing and risk management, *Financial Markets, Institutions and Instruments,* vol. 5, 1–87.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A. (1985), A theory of term structure of interest rates, *Econometrica*, vol. 53, 385–407.

Fong, H. G., Vasicek, O. A. (1991), Fixed-income volatility management, *Journal of Portfolio Management*, vol. 17, 41–46.

Heath, D., Jarrow, R. A., Morton, A. (1992), Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuations, *Econometrica*, vol. 60, 77–105.

Ho, T. S. Y., Lee, S. B. (1986), Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, vol. 41, 1011–1029.

Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987), Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, vol. 60, 473–489.

Vasicek, O. A. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, vol. 5, 177–188.