

## DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Mateusz Pipień*

*Akademia Ekonomiczna w Krakowie*

### Wycena europejskiej opcji kupna w czasie rzeczywistym. Analiza bayesowska<sup>1</sup>

#### 1. Wstęp

Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego do zagadnienia wyceny instrumentów pochodnych – po raz pierwszy przedstawione w pracy Bauwensa i Lubrano (1997) – zostało rozwinięte w pracach Osiewalski i Pipień (2001) i Pipień (2003). Rezultatem przyjęcia tego typu wnioskowania jest naturalny, probabilistyczny opis niepewności statystycznej o badanych wielkościach. Wyniki uzyskane w pracach Bauwens i Lubrano (1997), Bos, Mahieu i Van Dijk (200) i innych wskazują, iż ujęcie bayesowskie może być szczególnie przydatne w zastosowaniach finansowych – a zwłaszcza – w wycenie instrumentów pochodnych.

Celem pracy jest zastosowanie procesów GARCH (ang. Generalised AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic; por. Bollerslev 1986, Nelson 1991) z asymetriami, które zaproponowali Osiewalski i Pipień (2001), do modelowania zmienności (ang. *volatility*) dziennych stóp zwrotu kursu walutowego i do wyceny europejskiej opcji kupna wystawianej na ten kurs; por. Black i Scholes (1973) oraz Garman i Kohlhagen (1983). Artykuł prezentuje bayesowską estymację wybranych wskaźników wrażliwości rozważanej opcji kupna. Uzyskane rozkłady *a posteriori* parametru *delta* opcji dostarczają informacji o niepewności *ex ante* związanej z tą wielkością oraz stanowią podstawę do pogłębionych badań nad rozważaną opcją. Rozkłady *a posteriori*

---

<sup>1</sup> Praca przygotowana w ramach badań statutowych Akademii Ekonomicznej w Krakowie w roku 2003.

parametru *delta* opcji to także – na gruncie bayesowskim – punkt wyjścia do analizy powszechnie stosowanej w praktyce strategii zabezpieczającej neutralnej względem *delty* (ang. *delta neutral hedge*; *DNH*). Jest to strategia, która umożliwia (przy braku arbitrażu) efektywne zabezpieczenie środków na transakcję opcyjną (w chwili realizacji opcji) jeśli dokonano sprzedaży opcji kupna.

Rozważania uzupełnione są przykładem empirycznym, w którym w okresie od 10.07.2001 do 31.12.2002 rozważono rezultaty modelowania zmienności stóp zwrotu dolara amerykańskiego z wykorzystaniem procesu GARCH z asymetriami. W dniach 10.07.2001 do 31.12.2002 (371 dni) dokonywano dziennej aktualizacji dostępnego szeregu czasowego stóp zmian, aby na jego podstawie wyznaczyć rozkłady *a posteriori* i predyktywne wielkości podlegających modelowaniu. W szczególności, dokonując bayesowskiej aktualizacji rozkładu *a posteriori* (ang. *bayesian updating*), w rozważanym okresie wyznaczono rozkłady predyktywne cen europejskiej opcji kupna wystawianej na kurs dolara amerykańskiego, rozkłady predyktywne parametru zmienności oraz wskaźnika wrażliwości *delta* opcji. Bayesowska estymacja i predykcja, stosowana jednocześnie z dzienną aktualizacją danych, ma na celu zbadanie wrażliwości położenia i rozproszenia rozkładów predyktywnych na napływające nowe obserwacje stóp zmian.

## 2. Proces GARCH(1,1) z asymetriami

Niech  $x_j$  oznacza wartość kursu walutowego w chwili  $j$  (w dniu  $j$ ). Osiewalski i Pipień (2001) proponują, aby szereg czasowy  $\{x_j, j=0,1,\dots,T,\dots\}$  opisywać poprzez proces AR(2) dla  $\ln x_j$ , ze składnikiem losowym będącym procesem GARCH( $p,q$ ) z asymetriami. Niech  $y_j=100\ln(x_j/x_{j-1})$ . Zaproponowany i szczegółowo opisywany w pracy Osiewalski i Pipień (2001) model, który oznaczymy jako  $M_1$ , ma postać:

$$y_j - \delta = \rho(y_{j-1} - \delta) + \delta_1 \ln x_{j-1} + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, T, \dots \quad (1)$$

gdzie  $\varepsilon_j = z_j (h_j)^{0.5}$ , niezależne zmienne losowe  $z_j$  mają identyczne skośne rozkłady *t*-Studenta (por. Fernández, Osiewalski i Steel (1995)) o nieznaney liczbie stopni swobody  $\nu > 2$ , modalnej  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ , jednostkowej precyzji i parametrze asymetrii  $\gamma > 0$ . Czynniki  $h_j$  – będący odwrotnością precyzji warunkowego rozkładu (względem całej przeszłości) składnika losowego  $\varepsilon_j$  – jest dany wzorem:

$$h_j = a_0 + a_1 \varepsilon_{j-1}^2 I(\varepsilon_{j-1} < 0) + a_1^+ \varepsilon_{j-1}^2 I(\varepsilon_{j-1} \geq 0) + b_1 h_{j-1}, j=1, \dots, T, \dots \quad (2)$$

Proces Asymmetric-GARCH(1,1) zdefiniowany przez (2) umożliwia badanie asymetrii reakcji  $h_j$  ma znak  $\varepsilon_{j-1}$ ; por. Glosten, Jagannathan i Runkle (1993), Bauwens i Lubrano (1997), Bauwens, Lubrano i Richard (1999). Asymetria ta jest niemożliwa do modelowania w ramach zwykłych procesów GARCH (por. Bollerslev (1986) oraz Nelson (1990)), które są jedynie szczególnym przypadkiem (2) (gdy  $a_1=a_1^+$ ).

W równaniu (2) wymagana jest (dla  $j=1$ ) znajomość odwrotności precyzji  $h_0$ . Wielkość tę traktujemy jako nieznaną parametr modelu próbkowego. Osiewalski i Pipień (2001) dowodzą, iż przyjęcie skośnego rozkładu  $t$ -Studenta dla  $z_j$  powoduje, że równanie (1) definiuje model GARCH-in-Mean (por. Engle, Lilien i Robins, 1987). Model  $M_1$  zakłada w konsekwencji dla  $y_j$  warunkowy (względem całej przeszłości) rozkład skośny  $t$ -Studenta o  $\nu > 2$  stopniach swobody, modalnej  $\mu_j$ ,

$$\mu_j = \delta + \rho(y_{j-1} - \delta) + \delta_1 \ln x_{j-1}, j=1, \dots, T, \dots$$

odwrotności precyzji  $h_j$  i parametrze asymetrii  $\gamma > 0$ , co oznaczamy w następujący sposób:

$$p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_1) = f_{sks}(y_j | \nu, \mu_j, h_j, \gamma) \quad j=1, \dots, T, \dots \quad (3)$$

Symbol  $\theta$  oznacza wektor wszystkich nieznanych parametrów rozważanego modelu a  $f_{sks}$  jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej o skośnym rozkładzie  $t$ -Studenta; por. Fernández, Osiewalski i Steel (1995). Przyjęcie restrykcji  $\nu > 2$  gwarantuje istnienie warunkowej (względem  $\psi_{j-1}$ ) wariancji stopy zmian  $y_j$ . Wielkość ta jest zadana następującą formułą:

$$\text{Var}(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_1) = h_j \left( \frac{(\gamma^3 + \gamma^{-3}) \nu}{(\gamma + \gamma^{-1})(\nu - 2)} - \tau^2(\gamma, \nu) \right) = h_j d(\gamma, \nu) \quad (4)$$

gdzie:

$$\tau(\gamma, \nu) = \frac{(\gamma^2 - \gamma^{-2}) 2 \nu \Gamma((\nu + 1)/2)}{(\gamma + \gamma^{-1})(\nu - 1) \Gamma(\nu/2) \sqrt{\pi \nu}}$$

W szczególności, jeśli  $\gamma=1$ , to  $\tau(\gamma, \nu)=0$  oraz  $d(\gamma, \nu)=\nu/(\nu-2)$ . Wtedy  $\text{Var}(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_1) = h_j \cdot \nu/(\nu-2)$ , co sprowadza (4) do znanej zależności pomiędzy wariancją i odwrotnością precyzji dla symetrycznych rozkładów  $t$ -Studenta o  $\nu > 2$  stopniach swobody (rozkłady te odpowiadają przyjęciu  $\gamma=1$ ).

Niech  $y^{(t)}=(y_1, \dots, y_t)$  oznacza dostępny w danej chwili  $t$  (zaobserwowany aż do dnia  $t$ ) fragment szeregu czasowego logarytmicznych stóp zmian. Przyjmijmy dodatkowo, że  $t \geq T$ . Przez  $y_f^{(t)}=(y_{t+1}, \dots, y_{t+s})$  oznaczmy fragment szeregu stóp zmian podlegający prognozie w chwili  $t$ . Z przyjętych założeń wynika, iż model próbkowy, czyli gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

wektora obserwacji w chwili  $t$  przy zadanych wartościach parametrów, ma postać:

$$p_t(y^{(t)}, y_f^{(t)} | \theta, M_1) = \prod_{j=1}^{t+s} p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_1) = \prod_{j=1}^{t+s} f_{sks}(y_j | v, \mu_j, h_j, \gamma) \quad (5)$$

W chwili  $t$  model bayesowski  $M_1$  to łączny rozkład prawdopodobieństwa wektorów obserwacji  $y^{(t)}$  i  $y_f^{(t)}$  i wektora nieznanymi parametrów  $\theta$ , o funkcji gęstości

$$p_t(y^{(t)}, y_f^{(t)}, \theta | M_1) = p_t(y^{(t)}, y_f^{(t)} | \theta, M_1) p(\theta | M_1). \quad (6)$$

Zakładamy (niezmienniczy względem  $t$ ) przyjęty w pracy Osiewalski i Pipień (2001) rozkład *a priori* parametrów o następującej gęstości:

$$p(\theta | M_1) = p(\zeta) p(v) p(\delta) p(\delta_1) p(\rho) p(\gamma) p(h_0) p(a_0) p(a_1) p(a_1^+) p(b_1). \quad (7)$$

Szczegółowy opis przyjętej struktury *a priori* można znaleźć w pracy Osiewalski i Pipień (2001)

Określony równaniem (6) model bayesowski umożliwia wyznaczenie rozkładu *a posteriori* parametrów w chwili  $t$ . Rozkład ten jest skonstruowany w oparciu o przyjętą (niezależnie od  $t$ ) gęstość rozkładu *a priori* oraz o dostępne dane –  $y^{(t)}$ . Dostarcza on niepewności statystycznej, która jest konfrontacją przyjętych założeń *a priori* z modelem próbkowym zbudowanym dla dostępnych w danej chwili obserwacji. Rozkład ten oznaczamy przez  $p_t(\theta | y^{(t)})$ :

$$p_t(\theta | y^{(t)}) = p_t(\theta | y_1, \dots, y_t) = \frac{p_t(y^{(t)} | \theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} p_t(y^{(t)} | \theta) p(\theta) d\theta}. \quad (8)$$

W chwili  $t$  dla stóp zmian podlegających prognozie –  $y_f^{(t)}$  – wyznaczyć można rozkład predykcyjny:

$$p_t(y_f^{(t)} | y) = \int_{\Theta} p_t(y_f^{(t)} | y^{(t)}, \theta) p_t(\theta | y^{(t)}) d\theta. \quad (9)$$

Rozkład ten stanowi punkt wyjścia w modelowaniu niepewności *ex ante* o przyszłych (względem  $t$ ) stopach zmian rozważanego instrumentu finansowego jak i o dowolnej funkcji przyszłych stóp zmian i parametrów, podlegającej zainteresowaniu badacza. Rozkład predykcyjny (9), ze szczególnym uwzględnieniem dziennej aktualizacji dostępnego szeregu czasowego stóp zmian, stanowi w modelu  $M_1$  podstawę w bayesowskiej wycenie opcji w czasie rzeczywistym.

### 3. Analiza europejskiej opcji kupna

W chwili  $t$  (w momencie wystawienia) cena europejskiej opcji kupna  $DV_{t/t+s}$  o terminie realizacji  $t+s$  oraz cenie realizacji  $K_t$ , wystawianej na kurs walutowy o wartości  $x_t$ , jest równa wartości oczekiwanej zdyskontowanej wypłaty skojarzonej z tą opcją; por. Ghysels, Harvey i Renault (1995):

$$DV_{t/t+s} = \exp(-(r_t^h - r_t^f) \cdot s) \cdot E[(x_{t+s} - K_t)^+]. \quad (10)$$

Formuła  $(x_{t+s} - K_t)^+ = \max\{0, x_{t+s} - K_t\}$  we wzorze (10) jest funkcją wypłaty opcji,  $x_{t+s}$  to zmienna losowa opisująca niepewność co do wartości kursu dolarowego w okresie realizacji opcji,  $r_t^h$  to znana w chwili  $t$  stopa procentowa związana z walutą kwotowaną (ang. *home interest rate*) a  $r_t^f$  to stopa procentowa waluty bazowej (ang. *foreign interest rate*). W praktyce, w celu przybliżonego obliczenia wartości rozważanej opcji walutowej stosuje się – na mocy założenia o braku arbitrażu – uogólniony wzór Blacka i Sholesa podany przez Mertona (por. Merton (1973)), zwany też formułą Garmana-Kohlhagena (por. Garman i Kohlhagen (1983)):

$$DV_{t/t+s} = x_t \cdot \exp(-r_t^f \cdot s) N(d_1) - K_t \cdot \exp(-r_t^h \cdot s) N(d_2), \quad (11)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(x_t / K_t) + (r_t^h - r_t^f) \cdot s + 0.5\sigma^2 \cdot s}{\sigma \sqrt{s}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{s}.$$

Symbol  $\sigma$  oznacza parametr zmienności (ang. *volatility*) i określa ryzyko związane z niepewnością co do stóp zmian kursu walutowego (liczonych jako  $0.01y_j = \ln(x_j/x_{j-1})$ ) w okresie realizacji opcji.

W praktycznych zastosowaniach (11), obok problemu szacowania parametru  $\sigma$ , rozważa się także wskaźniki wrażliwości opcji. Współczynnik *delta* opcji informuje jak może zmienić się wartość opcji w zależności od zmian kursu walutowego  $x_j$ . Parametr ten może być obliczony w każdej chwili pomiędzy terminem wystawienia  $t$  a terminem realizacji kontraktu opcyjnego  $t+s$  i dany jest jako pochodna cząstkowa ceny opcji w chwili  $t+j$  względem  $x_{t+j}$ :

$$\delta_{t/t+j} = \frac{\partial DV_{t+j/t+j+s}}{\partial x_{t+j}}, \quad j=0,1,\dots,s. \quad (12)$$

Współczynnik (12) jest stosowany w strategii neutralnej względem *delty* (ang. *delta neutral hedge; DNH*), która pozwala zabezpieczyć środki na przyszłą transakcję opcyjną, jeśli wystawiono opcję kupna i dokonano jej sprzedaży. Rozważana strategia polega na tym, iż w chwili  $t+j$  od momentu sprzedania opcji kupna aż do terminu realizacji ( $j=0,1,\dots,s$ ) należy (na potrzeby przyszłej transakcji walutowej jaka może mieć miejsce w chwili  $t+s$ ) dysponować  $\delta_{t/t+j}$

waluty bazowej na każdą jednostkę tej waluty kupowanej przez posiadacza opcji w chwili  $t+s$ . Oznaczmy przez  $W$  wolumen rozważanej transakcji opcyjnej; na przykład  $W=10000$  oznacza, iż posiadacz opcji kupna ma prawo w chwili  $t+s$  kupić dziesięć tysięcy dolarów po kursie  $K_t$ . Zgodnie ze strategią *DNH* dla każdego  $j=0,1,\dots,s$  należy zabezpieczyć następującą ilość instrumentu podstawowego:

$$D_{t/t+j} = W \cdot \delta_{t/t+j}, \quad j=0,1,\dots,s. \quad (13)$$

Wiąże się to z zakupem waluty na rynku po kursie  $x_{t+j}$ . Koszt strategii neutralnej względem delty wynosi zatem w chwili  $t+j$ :

$$C_{t/t+j} = x_{t+j} \cdot D_{t/t+j} = x_{t+j} \cdot W \cdot \delta_{t/t+j}, \quad j=0,1,\dots,s. \quad (14)$$

Interesującym z punktu widzenia zastosowań jest koszt utrzymania w danej chwili  $t+j$  strategii neutralnej względem *delty*, jeśli w dniu poprzednim ( $t+j-1$ ) poniesiono (znane w chwili  $t+j$ ) pewne koszty związane z tą strategią. Załóżmy, że w chwili  $t+j-1$  poniesiono koszt, oznaczony jako  $C_{t+j-1}$ . W chwili  $t+j$  koszt utrzymania pozycji gwarantującej *delta*-neutralność ma postać:

$$CC_{t/t+j} = C_{t/t+j} - C_{t+j-1} = x_{t+j} \cdot W \cdot \delta_{t/t+j} - C_{t+j-1}. \quad (15)$$

W zależności od nakładów poniesionych w poprzednim dniu koszt (15) może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste – w tym i ujemne. Mniejsze od zera wartości zmiennej  $CC_{t/t+j}$  to przychód, wynikający ze sprzedaży na rynku odpowiedniej ilości instrumentu bazowego (zakupionego w chwili  $t+j-1$ ) tak, aby w chwili  $t+j$  być w posiadaniu jedynie  $W \cdot \delta_{t/t+j}$  jednostek tego instrumentu a nie jak wyjściowo  $W \cdot \delta_{t/t+j-1}$  jednostek.

#### 4. Prognoza zmienności w modelu AR(1)–GARCH(1,1) z asymetrami

Praktyczne wykorzystanie (11) wymaga modelowania i prognozowania (na podstawie dostępnego w danej chwili szeregu czasowego stóp zmian –  $y^{(t)}$ ) parametru zmienności stóp zwrotu kursu walutowego. Literatura z zakresu ekonometrycznych metod wyceny opcji wskazuje, iż procesy GARCH są szczególnie często używane w szacowaniu parametru  $\sigma$ ; por. Pagan i Schwert (1990), Noh, Engle i Kane (1994), Duan (1995), Bauwens i Lubrano (1997). W niniejszym artykule przyjęto w szczególności za parametr  $\sigma$  warunkowe odchylenie standardowe zmiennej  $0.01y_j$  w chwili realizacji opcji ( $j=t+s$ ) uzyskane z modelu  $M_1$ . Zgodnie z równaniem (4) oznacza to, iż:

$$\sigma = \sigma_{t+s} = 0.01 \sqrt{h_{t+s} d(\gamma, v)}, \quad (17)$$

gdzie  $h_{t+s}$  jest zadane przez formułę (2). Zbudowany na podstawie modelu  $M_1$  i dostępnych w chwili  $t$  danych –  $y^{(t)}$  – rozkład  $\sigma$ :

$$p_t(\sigma | y^{(t)}, M_1) = p_t(0.01\sqrt{h_{t+s}}d(\gamma, \nu) | y^{(t)}, M_1) \quad t=T, T+1, \dots, T+T' \quad (18)$$

dostarcza probabilistycznego opisu niepewności *ex ante* o parametrze zmienności, która wynika z założeń modelowych opartych o proces GARCH z asymetriami; por (5) i (7). Rozkłady (17) umożliwiają wyznaczenie rozkładów predykcyjnych ceny opcji, wystawianej w chwili  $t$ ; por. (11):

$$p_t(DV_{t/s} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1), \quad (19)$$

które dla  $t=T, T+1, \dots, T+T'$  stanowią (uzyskany z modelu  $M_1$ ) formalny opis niepewności *ex ante* o cenie rozważanej europejskiej opcji kupna. Wskaźnik wrażliwości kontraktu opcyjnego – *delta* opcji – także może podlegać wnioskowaniu. Wyznaczony rozkład predykcyjny tego parametru na podstawie modelu  $M_1$ :

$$p_t(\delta_{t/j} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1), \quad t=T, T+1, \dots, T+T', \quad j=0, 1, \dots, s, \quad (20)$$

stanowi punkt wyjścia do pogłębionej analizy strategii zabezpieczających wykorzystujących opcje. W szczególności ujęcie bayesowskie pozwala oszacować niepewność jaką niesie model  $M_1$  w zagadnieniu strategii zabezpieczenia neutralnej względem *delty*. Rozkłady predykcyjne wartości środków jaką w chwili  $t+j$  ( $j=0, 1, \dots, s$ ) należy (w myśl tej strategii) zabezpieczyć na transakcję opcyjną w chwili realizacji ( $D_{t/j}$ ) oraz koszt zastosowania tej strategii w chwili  $t+j$  ( $C_{t/j}$ ) – por (13) i (14):

$$p_t(D_{t/j} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1), \quad t=T, T+1, \dots, T+T', \quad j=0, 1, \dots, s, \quad (22)$$

$$p_t(C_{t/j} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1), \quad t=T, T+1, \dots, T+T', \quad j=0, 1, \dots, s, \quad (23)$$

mogą odgrywać kluczową rolę w prognozie rezultatów stosowania tej strategii.

## 5. Analiza empiryczna

Jako przykład empiryczny prezentujemy wycenę europejskiej opcji kupna (o terminie realizacji  $s=30$  dni) wystawianej na kurs terminowy dolara amerykańskiego. Rozważono szereg czasowy dziennych logarytmicznych stóp zmian złotowego kursu dolara w dniach 02.02.96 do 31.12.02 ( $T+T'=1740$  obserwacji). W okresie od 10.07.01 do 31.12.02 ( $T'+1=371$  dni) dokonywano dziennej aktualizacji dostępnego szeregu czasowego stóp zmian. Dla każdego  $t=1370, \dots, 1740$ , na podstawie szeregu  $y^{(t)}$ , wyznaczano rozkłady *a posteriori* parametrów modelu bayesowskiego  $M_1$ :

$$p_t(\theta | y^{(t)}, M_1), t=1370, \dots, 1740,$$

Model  $M_1$  stanowił podstawę do uzyskania (dla każdego  $t=1370, \dots, 1740$ ) rozkładów predykcyjnych parametru zmienności (17). Wyznaczono także – dla każdego  $t=1370, \dots, 1740$  – rozkłady predyktywne formuły Garmana-Kohlhagena na cenę opcji (por. (18)) oraz rozkłady *delta* opcji; por. (19). W formule (11) na cenę europejskiej opcji kupna na kurs walutowy jak i do obliczenia w chwili  $t$  kursu terminowego  $K_t$  wymagane są stopy procentowe  $r_t^f$  i  $r_t^h$  związane z instrumentem bazowym (USD) i kwotowanym (PLN). W badaniach przyjęto, dla instrumentu bazowego, 30-dniową dolarową stopę LIBOR (LIBUSD1/m), oraz – dla instrumentu kwotowanego – 30-dniową stopę WIBOR (WIBPLN1/m). Kurs wykonania rozważanych opcji wynosi w chwili  $t$ :

$$K_t = x_t \cdot \exp((r_t^f - r_t^h) \cdot s / 360); t=1370, \dots, 1740.$$

Tabela 1 prezentuje rozkłady predyktywne formuły Garmana-Kohlhagena na cenę rozważanej opcji oraz parametru zmienności uzyskane dla  $t=1370, \dots, 1740$ . Rysunek 1 prezentuje przebieg median predykcyjnych (szare linie), kwartyli predykcyjnych (dwie czarne grube linie przebiegające nad i pod wykresami median) oraz kwantyle rzędu 0.05 i 0.95 (cienkie linie przebiegające pod wykresem kwartyli rzędu 0.25 i ponad wykresem kwartyli 0.75) rozkładów ceny opcji. Obserwuje się dużą wrażliwość na pojawiające się nowe obserwacje stóp zmian zarówno położenia, jak i rozproszenia rozkładów  $p_t(DV_{t/t+s} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1); t=1370, \dots, 1740$ . W okresach gwałtownych wybuchów zmienności (krótko po  $t=1370$  i w okolicach  $t=1500, 1590$  lub  $t=1620$ ) rozproszenie rozkładów ceny opcji uzyskane z modelu  $M_1$  gwałtownie wzrasta. Jednocześnie okresy niewielkich wahań dziennych stóp zmian powodują skupianie się tych rozkładów (por. Rys. 1  $t=1430-1470, t=1600, t=1670-1730$ ). Mediana predykcyjna ceny opcji nieznacznie wzrasta za każdym razem, gdy następuje wzrost zmienności pojawiających się nowych stóp zmian natomiast przyjmuje niższe wartości w okresach niewielkiego nasilenia wahań. Jedynie bardzo duże skoki w wartości kursu dolara, odzwierciedlone dużymi wahaniami stóp zmian (por. Rys. 1 dla  $t=1370$ ) mogą powodować duże zmiany w parametrze położenia rozkładu  $p_t(DV_{t/t+s} | y^{(t)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1)$ . Można stwierdzić zatem, iż proces GARCH z asymetriami (stanowiący podstawę specyfikacji  $M_1$ ) generuje prognozy parametru zmienności, które powodują, iż rozkład predykcyjny ceny opcji (wraz z napływem nowych danych) nie zmienia zbyt gwałtownie położenia. W modelu  $M_1$  bardzo wrażliwe na pojawiające się obserwacje jest natomiast rozproszenie rozkładu ceny opcji.

Rysunek 2 w Tabeli 1 prezentuje rozkłady predyktywne parametru zmienności. Model  $M_1$ , którego podstawą jest proces GARCH z asymetriami, generuje rozkłady predyktywne parametru  $\sigma$  bardzo wrażliwe na pojawiające się nowe obserwacje w szeregu  $y^{(t)}$ . Rysunek 2 wskazuje, iż wybuchy wrażliwości stóp zmian powodują zwiększanie rozproszenia rozkładów



$p_t(\sigma | y^{(t)}, M_1)$ . Nie obserwuje się natomiast dużych zmian położenia tych rozkładów. Mediana predykcyjna parametru zmienności pozostaje w tym samym obszarze wartości nawet w okresach nasilenia wahań stóp zmian (por. Rys. 2,  $t=1580$  lub  $1620$ ).

Dalsza analiza empiryczna dotyczy rezultatów stosowania strategii zabezpieczającej neutralnej względem *delta* (strategii *DNH*) dla opcji wystawionej na dzień 10.07.2001 ( $t=1370$ ), o terminie realizacji  $s=30$  dni. Kurs wykonania tego kontraktu opcyjnego wynosi  $K_t=4.3335$ . Tabela 2 przedstawia rozkłady predykcyjne parametru *delta* opcji wystawionej 10.07.2001 w czasie trwania kontraktu;  $p_{t+j}(\delta_{t/t+j} | y^{(t+j)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1)$ ,  $t=1370$  oraz  $j=1, \dots, 30$  (por. Rys. 3). Podobnie jak poprzednio na wykresie prezentujemy mediany, kwartyle rzędu 0.25 i 0.75 oraz kwantyle 0.05 i 0.95 rozważanych rozkładów. Drugi wiersz Tabeli 2 zawiera wykresy, na których odniesiono prawdziwy kurs dolara amerykańskiego w czasie trwania opcji –  $x_{t+j}$ ;  $t=1370$ ,  $j=1, \dots, 30$  (gruba linia) – do kursu wykonania opcji (pozioma cienka linia). W czasie trwania kontraktu opcyjnego rozkłady parametru  $\delta_{t/t+j}$  ( $t=1360$ ,  $j=1, \dots, 30$ ) zmieniają położenie jak i rozproszenie. Zgodnie z interpretacją tego parametru w kontekście strategii *DNH*, jeżeli obserwowany z danym dniem  $t+j$  kurs walutowy jest wyższy niż cena wykonania, to rozkłady *delta* są zlokalizowane w okolicach jedynki. Rozkłady  $p_{t+j}(\delta_{t/t+j} | y^{(t+j)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1)$  zwiększają rozproszenie zawsze wtedy, gdy kurs  $x_{t+j}$  oddala się od kursu wykonania  $K_t$  (por. Rys. 3;  $j=9$  do  $12$ ). Zbliżanie się prawdziwych wartości kursu walutowego do kursu wykonania opcji powoduje, iż rozkłady te ulegają silnemu skupieniu (por. Rys 3;  $j=8$ ,  $j=19$  lub  $j=29$ ).

Dla opcji wystawionej 10.07.2001 rozważono koszty stosowania i utrzymania strategii neutralnej względem *delta*. Rysunek 4 w Tabeli 2 zawiera rozkłady predykcyjne kosztów  $C_{t/t+j}$  (por. (14)) dla  $t=1370$  i  $j=1, 2, \dots, 30$ . Na Rysunku 4 szarą linią naniesiono złotową wartość  $W=10000$  dolarów (wolumenu rozważanej transakcji opcyjnej), jeśli za kurs wymiany przyjmie się  $x_{t+j}$  ( $t=1370$ ,  $j=1, 2, \dots, 30$ ). Uzyskane rozkłady predykcyjne  $C_{t/t+j}$  pozwalają stwierdzić, iż – w myśl strategii *DNH* – należy zabezpieczyć (w chwili  $t+j$  na transakcję, która może mieć miejsce w chwili  $t+30$ ) znacznie mniej środków niż wynika to z wartości rynkowej  $W=10000$  dolarów. Dla  $t=1370$ , rozkład  $p_{t+j}(C_{t/t+j} | y^{(t+j)}, K_t, r_t^h, r_t^f, M_1)$  jest zlokalizowany w innych obszarach niż położenie wartości wolumenu transakcji. Rysunek 4 wyraźnie wskazuje, iż rozkłady kosztu  $C_{t/t+j}$  kumulują większość masy prawdopodobieństwa w rejonach znacznie niższych kosztów zabezpieczenia środków na transakcję opcyjną niż te, które wynikałyby z wartości  $W=10000$  dolarów w chwili  $t+j$ . Mediany rozkładów predykcyjnych kosztu  $C_{t/t+j}$  są uzależnione od położenia kursu  $x_{t+j}$  względem kursu wykonania opcji  $K_t$ . Jedynie dla  $j=1$  złotowy kurs dolara niespodziewanie podnosi się znacznie ponad kurs wykonania  $K_t$  i dlatego w tym dniu koszt utrzymania strategii *delta*-neutralnej niemal jest równy wartości rynkowej wolumenu transakcji. Kwantyle rzędu 0.05 rozkładów  $C_{t/t+j}$  leżą

poniżej wartości 25000 złotych, co wskazuje, iż prawdopodobieństwo *a posteriori* sytuacji, że koszt strategii *delta*-neutralnej wyniesie więcej niż 25000 jest niższe niż 0.05; por. Rys. 4;  $j=3,4,\dots,30$ .

## 6. Podsumowanie

Zasadniczym celem pracy było zastosowanie procesu GARCH z asymetriami (por. Osiewalski i Pipień (2001)) do modelowania zmienności stóp zwrotu kursu walutowego oraz do wyceny europejskiej opcji kupna tego kursu. W okresie od 10.07.2001 do 31.12.2002, dokonując – zgodnie z napływem nowych danych – bayesowskiej aktualizacji rozkładów *a posteriori*, uzyskano rozkłady predyktywne ceny opcji, parametrów zmienności, wskaźników wrażliwości *delta* opcji oraz kosztów stosowania strategii zabezpieczającej *delta*-neutralnej (DNH).

Zastosowanie podejścia bayesowskiego – w połączeniu z dzienną aktualizacją dostępnego szeregu czasowego danych – umożliwiło pogłębioną analizę rozważanej europejskiej opcji kupna. Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, iż model  $M_1$  (oparty o proces GARCH z asymetriami) generował rozkłady predyktywne bardzo wrażliwe na napływ nowych danych. Pojawiające się wybuchy wrażliwości stóp zmian powodowały wzrost rozproszenia rozkładów predyktywnych cen opcji, parametru zmienności i innych wielkości, podczas gdy okresy niewielkich wahań owocowały skupianiem się tych rozkładów.

W artykule poddano szczegółowej analizie pod względem stosowania strategii *delta*-neutralnej (DNH) opcję wystawioną 10.07.2001. Rozkłady predyktywne parametru *delta* opcji umożliwiają prognozę kosztów stosowania strategii *delta*-neutralnej. Bayesowskie ujęcie prognozy dostarczyło w postaci rozkładów predyktywnych kosztów strategii DNH wzorca niepewności *ex ante* o nakładach wymaganych do stosowania tej strategii.

## Literatura

- Bauwens, L., Lubrano, M. (1997), Bayesian Option Pricing using Asymmetric GARCH, *CORE Discussion Paper No. 9759 Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve*.
- Bauwens, L., Lubrano, M., Richard, J-F. (1999), *Bayesian Inference in Dynamic Econometric Models*, Oxford University Press, Oxford.
- Black, F., Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Bollerslev, T. (1986), Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

- Bos, Ch., S., Mahieu, R. J., Van Dijk, H. K. (2000), Daily exchange rate behaviour and hedging of currency risk, *Journal of Applied Econometrics* 15, 671-696.
- Duan, J-Ch. (1995), The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance* 5, 13-32.
- Engle, R.F., Lilien, D.M., Robins, R.P. (1987), Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, *Econometrica* 55, 391-407.
- Fernández, C., Osiewalski, J., Steel, M.F.J. (1995), Modelling and inference with v-spherical distributions, *Journal of the American Statistical Association* 90, 1331-1340.
- Garman, M. B., Kohlhagen, S.W., (1983), Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, 2, 231-237
- Ghysels, E., Harvey, A., Renault, E. (1995), *Stochastic Volatility*, [w:] *Handbook of Statistics*, Vol 14: Statistical Methods in Finance, pod red. G.S. Maddali and C.R. Rao, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. (1993), On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- Merton, R. C. (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- Mielus, P. (2002) *Rynek Opcji walutowych w Polsce*, Liber, Warszawa.
- Nelson, D. (1990), Stationarity and Persistence in GARCH(1,1) Model, *Econometric Theory* 6, 318-334.
- Noh, J., Engle, R.F., Kane, A. (1994), Forecasting Volatility and Option Prices of the S & P 500 index, *Journal of Derivatives* 2, 17-30.
- Osiewalski, J., Pipień, M. (2001), Univariate GARCH processes with asymmetries and GARCH-In-Mean effects: Bayesian analysis and direct option pricing, *Przegląd Statystyczny* 2003 (w druku).
- Pagan, A., Schwert, G. (1990), Alternative Models for Conditional Stock Volatility, *Journal of Econometrics* 45, 267-290.
- Pipień, M. (2003), Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego do wyceny opcji, *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie* nr 628 (w druku).

Tabela 1. Rozkłady predyktywne ceny opcji (Rys.1) oraz zmienności (Rys.2)

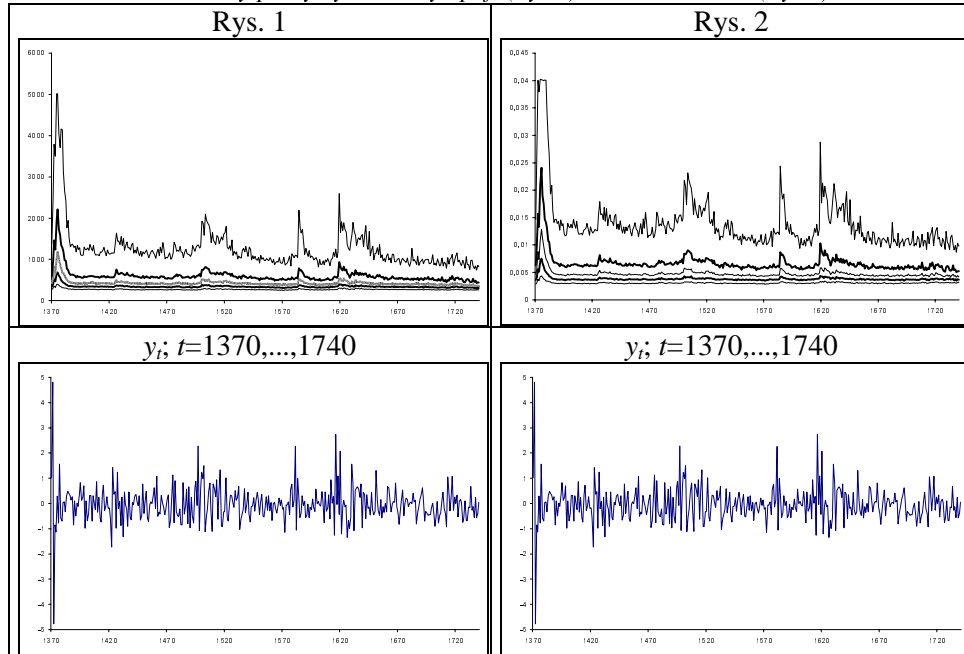


Tabela 2. Rozkłady predyktywne parametru delta opcji wystawionej 10.07.2001 (Rys.3) oraz towarzyszących kosztów stosowania strategii DNH (Rys.4)

