

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Jacek Kwiatkowski, Magdalena Osińska*  
*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

### **Procesy zawierające stochastyczne pierwiastki jednostkowe – identyfikacja i zastosowanie**

#### **1. Wstęp**

Większość literatury związanej z analizą szeregów czasowych dotyczy procesów w których stopień integracji jest stały. Powszechnie znany w literaturze przedmiotu model ARIMA (Box i Jenkins, 1983) przyjmuje, że niektóre pierwiastki wielomianu charakterystycznego leżą na kole jednostkowym. Zakłada się również, że wszystkie pierwiastki przyjmują stałe wartości, czyli nie podlegają zmianom w czasie. Najprostszym przykładem takiego procesu jest model błędzenia przypadkowego określany jako proces zintegrowany stopnia pierwszego, zawierający jeden pierwiastek jednostkowy. Okazuje się jednak, że istnieje potrzeba (Granger i Swanson, 1997; Sollis i in., 2000) analizy procesów o zmiennym stopniu integracji, w których pierwiastki wielomianu charakterystycznego oscylują w czasie wokół jedynki i przyjmują czasem wartości znajdujące się na kole jednostkowym, a czasem poza nim. Modele te określa się jako modele ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym (ang. stochastic unit root processes; STUR). W modelach tych zakłada się zmienność parametrów w czasie, a tym samym zmienność pierwiastków wielomianu charakterystycznego. Badana klasa procesów, była po raz pierwszy rozważana w literaturze w połowie lat 90-tych (por. Leybourne, McCabe i Mills, 1996; Leybourne, McCabe i Tremayne, 1996; Granger i Swanson, 1997). Z uwagi na rozpatrywaną tu w ujęciu dynamicznym losowość parametrów, modele ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym można również traktować jako szczególny przypadek znanych już w wcześniejszej literaturze modeli ze zmiennym parametrem; por. Judge i in. (1985).

## 2. Postać modelu i estymacja MNW

Procesy typu STUR (*stochastic unit roots*) można zapisać w postaci ogólnej jako:

$$y_t = \alpha_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_0 + \delta_t, \\ \delta_0 &= 0, \\ \delta_t &= \rho \delta_{t-1} + \eta_t, \end{aligned} \quad (2)$$

przy czym  $|\rho| \leq 1$ . Ponadto  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  i  $\eta_t \sim N(0, \omega^2)$  są od siebie niezależne.

Dla  $\alpha_0 = 1$  i  $\omega^2 = 0$ ,  $y_t$  jest procesem błędzenia losowego. Jeśli  $\alpha_0 = 1$  i  $\omega^2 > 0$  to mamy do czynienia z procesem, którego średnia zawiera pierwiastek jednostkowy, i który jest nazywany procesem ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym.

Analizowana w dalszej części pracy postać modelu ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym ma postać:

$$\Delta y_t = \delta_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

$$\delta_t = \rho \delta_{t-1} + \eta_t, \quad (4)$$

gdzie  $y_t$  oznacza obserwowany proces w czasie  $t$ , natomiast  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  oznaczają tak jak poprzednio niezależne względem siebie gaussowskie białe szumy o średniej zero i wariancji równej  $\sigma^2$  i  $\omega^2$ . Równanie (3) można przedstawić w równoważnej formie, mianowicie

$$y_t = (1 + \delta_t) y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (5)$$

Gdy  $\rho = 0$  i  $\omega^2 = 0$  to parametr  $\delta_t$  dla wszystkich  $t$  przyjmuje wartości równe zero i otrzymujemy proces błędzenia przypadkowego.

Użytecznym narzędziem do estymacji parametrów modelu (3)-(4) jest metoda największej wiarygodności oparta o filtr Kalmana i związany z nim model przestrzeni stanów. Niech  $z_t$  oznacza  $(n \times 1)$  wymiarowy wektor obserwowanych zmiennych w czasie  $t$ . Model przestrzeni stanów można zapisać jako (Harvey, 1989; Hamilton, 1994; Górka, 1997):

$$z_t = H_t' \xi_t + w_t, \quad (6)$$

$$\xi_t = F \xi_{t-1} + v_t. \quad (7)$$

gdzie równanie (8) określa się jako wyjścia lub obserwacji, równanie (7) jest równaniem stanu,  $\xi_t$  oznacza  $(r \times 1)$  wymiarowy wektor stanu,  $F$  i  $H_t'$  są kolejno macierzami stanu oraz wyjścia o wymiarach  $(r \times r)$  i  $(n \times r)$ . Wektory  $w_t$  i  $v_t$  o wymiarach  $(n \times 1)$  oraz  $(r \times 1)$  są wektorami białych szumów, mianowicie

$$E(w_t w_t') = \begin{cases} R & \text{dla } t = \tau \\ 0 & \text{dla } t \neq \tau \end{cases} \quad \text{i} \quad E(v_t v_t') = \begin{cases} Q & \text{dla } t = \tau \\ 0 & \text{dla } t \neq \tau \end{cases},$$

gdzie  $R$  i  $Q$  są macierzami o wymiarach  $(n \times n)$  i  $(r \times r)$ . Dodatkowo zakłada się niezależność wektorów  $w_t$  i  $v_t$ .

Oznaczmy przez  $\hat{\xi}_{t-1}$  wektor stanu oszacowany w oparciu o informacje dostępne w chwili  $t-1$  oraz przez  $W_{t-1}$  wariancję tego oszacowania

$$W_{t-1} = E[(\hat{\xi}_{t-1} - \xi_{t-1})(\hat{\xi}_{t-1} - \xi_{t-1})']. \quad (8)$$

Założmy, że chcemy estymować  $\hat{\xi}_t$  w oparciu o  $\hat{\xi}_{t-1}$ . Korzystając z równania (7) prognozą  $\xi_t$  oznaczoną przez  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  jest

$$\hat{\xi}_{t|t-1} = F \hat{\xi}_{t-1}, \quad (9)$$

natomiast wariancja błędu predykcji wynosi:

$$W_{t|t-1} = E[(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1})(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1})'] = F W_{t-1} F' + Q. \quad (10)$$

Prognozę  $z_t$  przy danym  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  uzyskuje się z równania (6):

$$\hat{z}_{t|t-1} = H_t' \hat{\xi}_{t|t-1} \quad (11)$$

z błędem równym

$$u_t = z_t - \hat{z}_{t|t-1} \quad (12)$$

i jego wariancją

$$K_t = E(u_t u_t') = H_t' W_{t|t-1} H_t + R. \quad (13)$$

Korzystając z własności wielowymiarowego rozkładu normalnego, oczekiwaną wartość  $\xi_t$  przy danym  $z_t$  można uzyskać z równania

$$\hat{\xi}_t = \hat{\xi}_{t|t-1} + W_{t|t-1} H_t K_t^{-1} (z_t - H_t' \hat{\xi}_{t|t-1}), \quad (14)$$

z wariancją równą:

$$W_t = W_{t|t-1} - W_{t|t-1}' H_t K_t^{-1} H_t' W_{t|t-1}. \quad (15)$$

Filtr Kalmana oblicza zatem prognozę  $\xi_t$  w sposób rekurencyjny, przyjmując wartości początkowe dla  $W_0$  i  $\xi_0$ . Dalsze szczegóły na ten temat filtru Kalmana można znaleźć m.in. w pracy Hamiltona (1994).

Jeżeli początkowy wektor stanu  $\xi_t$  oraz  $w_t$  i  $v_t$  mają wielowymiarowe rozkłady normalne to warunkowy rozkład  $z_t$  względem wcześniejszych obserwacji  $Z_{t-1} = (z_{t-1}', z_{t-2}', \dots, z_1')$  i nieznanymi wartościami parametrów  $\theta$  znajdujących się w  $F$ ,  $Q$  i  $R$  jest również rozkładem normalnym ze średnią i wariancją daną odpowiednio w punkcie (11) i (13)

$$z_t | Z_{t-1}, \theta \sim N(H_t' \hat{\xi}_{t|t-1}, H_t' W_{t|t-1} H_t + R).$$

Oznaczając przez  $T$  liczbę obserwacji, logarytm funkcji wiarygodności można zapisać:

$$\ln L = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |K_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T u_t' K_t^{-1} u_t \quad (6)$$

Wykorzystując modele przestrzeni stanów, równanie (3) można traktować jako równanie obserwacji, natomiast równanie (4) jako równanie stanu. Oznaczmy przez  $\theta$  wektor parametrów w modelu (3)-(4), mianowicie  $\theta = (\rho, \sigma^2, \omega^2)$ . Nieznane wartości parametrów uzyskuje się więc poprzez maksymalizację funkcji wiarygodności; równanie (6).

### 3. Testowanie stochastycznych pierwiastków jednostkowych

Hipotezy w teście LMT (Leybourne, McCabe i Tremayne) dotyczą wariancji  $\omega^2$ , czyli modelu zmienności parametrów.  $H_0: \omega^2 = 0$  (oznacza błądzenie przypadkowe lub w uogólnionym przypadku ARIMA(p,1,0))  $H_1: \omega^2 > 0$ . Rozważa się przyjęcie różnych formuł testu zależnie od modelu będącego podstawą badania. W celu uniknięcia wpływu ewentualnego trendu deterministycznego, autorzy proponują rozszerzenie modelu o trend liniowy lub 2-go stopnia. Ponadto możliwe jest rozszerzenie specyfikacji równania poprzez włączenie do modelu opóźnionych wartości zmiennej endogenicznej. Procedura testowania przebiega w następujący sposób:

Niech

$$y_t^* = \alpha_t y_{t-1}^* + \varepsilon_t, \quad (17)$$

gdzie

$$y_t^* = y_t - P_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i}, \quad (18)$$

przy czym  $P_t$  jest składnikiem deterministycznym, np. trendem postaci

$P_{1t} = \beta + \gamma + \theta t(t+1)/2$  lub  $P_{2t} = \beta + \gamma$ , natomiast część autoregresyjna w (17) jest stacjonarna i pełni rolę podobną jak rozszerzenie w teście ADF (Augmented Dickey-Fuller). Jeżeli w  $H_1$   $|\rho| < 1$ , to statystykę  $Z$  oblicza się na podstawie następującej zależności, oszacowanej KMNK

$$\Delta y_t = \Delta P_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (19)$$

Statystyka  $Z$  ma postać:

$$Z = T^{-\frac{3}{2}} \sigma^{-2} \kappa^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \sum_{j=1}^{t-1} \varepsilon_j \right)^2 (\varepsilon_t^2 - \sigma^2), \quad (20)$$

gdzie:

$$\sigma^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \quad \text{oraz} \quad \kappa^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \sigma^2)^2.$$

Zależnie od wyboru postaci trendu  $P_{1t}$  lub  $P_{2t}$  oznacza się ją jako  $Z_1$  lub  $Z_2$ . Test jest odporny na transformację logarytmiczną oraz efekt ARCH, z wyjątkiem IGARCH (por. Granger i Swanson, 1997).

Wartości krytyczne generowane przy założeniu zerowej kowariancji pomiędzy  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_t^2$  dla wybranych poziomów istotności zostały przedstawione w tablicy 1.

Tablica 1. Wybrane wartości krytyczne testu LMT.

$T$	$p = 0,01$	$p = 0,05$	$p = 0,1$
50	0,349	0,215	0,161
100	0,320	0,192	0,142
250	0,289	0,168	0,122
500	0,278	0,161	0,114
1000	0,261	0,149	0,104

Źródło: Leybourne, McCabe i Tremayne (1996) oraz Granger i Swanson (1997).

#### 4. Próbkowe własności estymatora MNW

Badania własności próbkowych estymatorów przedstawionych w drugim punkcie dokonano za pomocą symulacji Monte Carlo. W tym celu wygenerowano 1000 realizacji procesu opisanego równaniami (3) – (4), a następnie estymowano jego parametry maksymalizując funkcję największej wiarygodności przedstawioną w punkcie drugim. Badane szeregi składały się ze 100, 250 i 500 obserwacji. W oparciu o uzyskane wyniki dla każdego parametru obliczono współczynnik zmienności, który jest ilorazem próbkowego odchylenia standardowego i średniej arytmetycznej badanego estymatora. Tablica 2 przedstawia obliczone na podstawie ocen parametrów współczynniki zmienności:  $D(\hat{\theta})/E(\hat{\theta})$ , dodatkowo w celu zbadania próbkowego obciążenia estymatorów obliczono iloraz próbkowej średniej arytmetycznej i prawdziwej wartości parametru  $[E(\hat{\theta})/\theta]-1$ , przy różnych wartościach  $\omega^2$ .

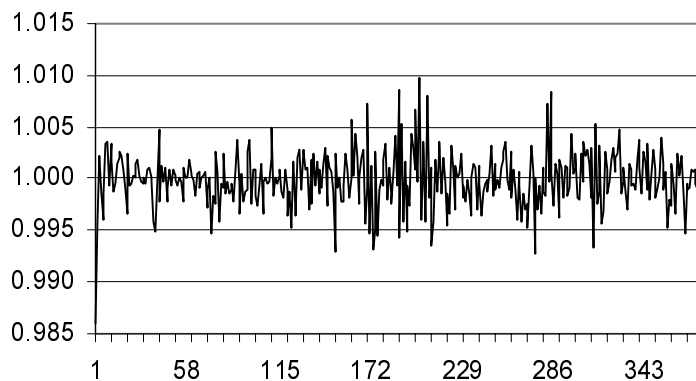
Analizując wyniki zamieszczone w tablicy 2 można stwierdzić, że metoda największej wiarygodności pozwala uzyskać stosunkowo dobre wyniki szczególnie dla dużej próby tj.  $T = 500$ . Najdokładniejsze wyniki uzyskano dla wariancji składnika losowego w równaniu obserwacji  $\sigma^2$ . W porównaniu z pozostałymi parametrami wydają się być najbardziej zbliżone do prawdziwych wartości, zarówno ze względu na relatywnie małą próbkową wariancję jak i obciążenie.

Najmniej dokładne wyniki otrzymano dla wariancji składnika losowego w równaniu stanu  $\omega^2$ . W przeważającej większości są znacznie gorsze niż dla pozostałych parametrów, szczególnie dla małej próby  $T = 100$ . Wartość wariancji składnika losowego  $\omega^2$  ma również zasadniczy wpływ na dokładność uzyskiwanych wyników dla pozostałych parametrów, mianowicie porównując wyniki otrzymane przy różnych wartościach  $\omega^2$  można stwierdzić, że dla

mniejszej wartości wariancji składnika losowego uzyskane wyniki dla wszystkich parametrów charakteryzują się większą wariancją i obciążeniem.

## 5. Analiza procesu STUR na przykładzie indeksu WIG20

W zakresie testowania i estymacji procesów ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym, analizie poddano tygodniowy kurs indeksu WIG20 od lipca 94 do końca marca 2002. Analizowany szereg składał się zatem z 380 obserwacji tygodniowych. Wartość statystyki  $Z$  dla tego szeregu wyniosła 0,219, co przy 5% procentowym poziomie istotności może wskazywać, że jest to proces, którego średnia zawiera pierwiastek jednostkowy. Wyniki ocen parametrów uzyskane w poparciu o przedstawioną wcześniej metodę największej wiarygodności dały następujące punktowe oceny parametrów:  $\rho = -0.08794$ ,  $\omega^2 = 1.51464E - 06$ ,  $\sigma^2 = 2.13929$ . Rysunek 1 przedstawia punktową ocenę parametru  $\alpha_t = 1 + \delta_t$ , którą uzyskano za pomocą filtru Kalmana. Otrzymane wyniki są zbieżne z wynikami publikowanymi w pracy Sollis i in. (2000) dla danych giełdowych.



Rysunek 1. Punktowa ocena parametru  $\alpha_t = 1 + \delta_t$  dla WIG20.

## Literatura

- Box, G.E.P., Jenkins, G.M. (1983), *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Cuthbertson, K., Hall, S.G., Taylor, M.P. (1992), *Applied Econometric Techniques*, Philip Allan.
- Górka, J., (1997), Reprezentacja ARMA i reprezentacja przestrzeni stanów szeregów czasowych, *materiały na V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe pt.: Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Granger, C.W.J., Swanson, N.R. (1997), An introduction to stochastic unit-root process. *Journal of Econometrics* 80.
- Granger, C.W.J., Terasvirta, T. (1993), *Modeling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press.
- Hamilton, J.D., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Harvey, A.C. (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- Judge, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C., Lütkepohl, H. and Lee, T.C. (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons.
- Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., Mills, T.C. (1996), Randomized unit root processes for modeling and forecasting financial time series: theory and applications, *Journal of Forecasting* 15.
- Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., Tremayne, A.R (1996), Can economic time series be differenced to stationarity?, *Journal of Business and Economic Statistics* 14.
- Maddala, G.S., Kim, I-M (2002), *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.
- Sollis, R., Leybourne, S.J., Newbold, P. (2000), Stochastic unit roots modeling of stock price indices, *Applied Financial Economics* 10.
- Taylor, A.M.R, van Dijk, D. (1999), Testing for Stochastic Unit Roots. Some Monte Carlo Evidence, *Econometric Institute Research Report EI-9922/A*.



Tablica 2. Wyniki estymacji MNW przeprowadzonej w oparciu o symulację Monte Carlo dla 1000 powtórzeń na szeregach o długości 100, 250 i 500. W tabeli zamieszczono obliczone na podstawie ocen parametrów współczynniki zmienności:  $D(\hat{\theta})/E(\hat{\theta})$ , (styl standardowy czcionki) oraz iloraz próbkowej średniej arytmetycznej i prawdziwej wartości parametru  $[E(\hat{\theta})/\theta] - 1$  (kursywa).

	<i>T = 100</i>	<i>T = 250</i>	<i>T = 500</i>		<i>T = 100</i>	<i>T = 250</i>	<i>T = 500</i>
$\rho = 0,2$	2.243; -0.085	1.332; -0.103	0.620; -0.063	$\rho = 0,2$	2.775; -0.056	2.635; -0.112	1.716; 0.021
$\omega^2 = 0,01$	0.835; 0.140	0.377; -0.024	0.200; -0.017	$\omega^2 = 0,001$	1.614; 4.972	1.395; 0.703	0.816; 0.086
$\sigma^2 = 1$	0.237; -0.049	0.155; 0.004	0.123; 0.028	$\sigma^2 = 1$	0.188; -0.137	0.130; -0.043	0.097; 0.012
$\rho = 0,6$	0.606; -0.109	0.283; -0.039	0.108; -0.026	$\rho = 0,6$	0.764; -0.115	0.616; -0.089	0.410; -0.045
$\omega^2 = 0,01$	0.791; 0.111	0.320; 0.019	0.174; 0.044	$\omega^2 = 0,001$	2.035; 3.917	1.229; 0.467	0.685; 0.066
$\sigma^2 = 1$	0.241; -0.077	0.168; -0.000	0.138; 0.015	$\sigma^2 = 1$	0.1869; -0.130	0.126; -0.042	0.095; -0.017
$\rho = 0,9$	0.222; -0.096	0.054; -0.044	0.031; -0.033	$\rho = 0,9$	0.321; -0.123	0.164; -0.049	0.063; -0.018
$\omega^2 = 0,01$	0.799; 0.319	0.461; 0.415	0.329; 0.512	$\omega^2 = 0,001$	2.191; 1.698	1.118; 0.250	0.293; 0.055
$\sigma^2 = 1$	0.335; -0.031	0.289; -0.012	0.213; -0.007	$\sigma^2 = 1$	0.198; -0.134	0.130; -0.050	0.109; -0.028

Źródło: obliczenia własne.