DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Katarzyna Kuziak
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Zagadnienie prognozowania stóp procentowych w zarządzaniu ryzykiem

1. Wstęp

Jednym z podstawowych rodzajów ryzyka, na które narażone jest właściwie każde przedsiębiorstwie oraz każda instytucja finansowa jest ryzyko stopy procentowej (jest to jeden z rodzajów ryzyka rynkowego). Pojawia się ono wtedy, gdy wartość pozycji aktywów bądź zobowiązań (lub jedno i drugie) podmiotu uzależniona jest od stopy procentowej. Komitet Bazylejski definiuje ryzyko stopy procentowej jako niebezpieczeństwo negatywnego wpływu zmian stóp procentowych na sytuację finansową podmiotu. Im oprocentowane składniki bilansu podmiotu stanowią większy udział w sumie bilansowej, tym w większym stopniu podmioty narażone są na ten rodzaj ryzyka.

Ogólnie w procesie zarządzania ryzykiem (nie tylko stopy procentowej) wyróżnia się następujące etapy: identyfikację czynników ryzyka, pomiar ryzyka, monitorowanie i kontrolę ryzyka. W procesie zarządzania ryzykiem bardzo ważny jest etap drugi, tj. pomiar ryzyka. Modelowanie zmienności stopy procentowej pozwala bowiem na obliczenie VaR (*Value at Risk*), szerzej w (Jorion, 1997, Crouhy, Galai, Mark, 2001).

Efektem procesu zarządzania ryzykiem jest zabezpieczanie się przed skutkami ryzyka. Zabezpieczanie przed ryzykiem stopy procentowej polega na konstrukcji odpowiedniej strategii, która będzie neutralizować skutki zmian stopy procentowej. W pracy tej zajmiemy się jednym z elementów pomocnych w konstrukcji strategii zabezpieczającej – prognozowaniem stóp procentowych.

Zagadnienie prognozowania stóp procentowych, polega na zbudowaniu poprawnie dopasowanego do danych historycznych modelu i konstrukcji na jego podstawie prognozy. Do prognozowania stóp można wykorzystać również krzywą rentowności, a dokładnie tzw. terminową krzywą stopy dochodu (*forward yield curve*). Zagadnienie prognozowania stóp procentowych jest zagadnieniem bardzo trudnym. Istotnymi czynnikami w tym przypadku są bowiem czynniki makroekonomiczne i pewnym sensie czynniki polityczne, które bardzo trudno przewidzieć. Do tych czynników zalicza się:

- zjawiska gospodarcze takie, jak recesja,
- polityka monetarna Narodowego Banku Polskiego i Rady Polityki Pieniężnej (w tym również zmiana procedur),
- zmiany instytucjonalne systemu finansowego,
- polityka fiskalna

oraz

- poziom deficytu budżetowego,
- inflacja.

Modele strukturalne, wykorzystujące zmienne makroekonomiczne w przypadku stóp procentowych zawodzą. Przyczyn należy upatrywać w trudnościach określenia relacji miedzy czynnikami, niespójnymi obserwacjami zmiennych (obserwacje pojawiają się w różnych momentach, następują zmiany w konstrukcji zmiennej, co wymaga sprowadzania do porównywalności), identyfikacją wszystkich istotnych czynników.

Zagadnienie prognozowania przedstawione zostanie z wykorzystaniem modeli: ekonometrycznych, terminowej struktury stóp procentowych oraz teorii finansów.

2. Model (G)ARCH

Z uwagi na charakter danych finansowych (zależność między obserwacjami, skupianie danych) w modelowaniu wykorzystuje się często modele szeregów czasowych typu ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) oraz GARCH (*generalized* ARCH) szerzej w pracach (np. Mills 1993, Tsay 2002).

Model ARCH(m) ma postać (Engle 1982):

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t}\varepsilon_t ;$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu)^2 + \ldots + \alpha_m (r_{t-m} - \mu)^2 ;$$

gdzie: $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ i $r_t | \Psi_{t-1} \sim N(\mu, h_t)$;

r_t – stopa zwrotu z kursu w momencie t; r_{t-1} – stopa zwrotu z kursu w momencie t-1; μ – wartość oczekiwana stopy zwrotu (stała); Ψ_{t-1} – informacja dostępna do czasu t-1, h_t – warunkowa chwilowa wariancja procesu.

W analizowanych modelach przyjęto, że $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, można jednak rozważyć inne rozkłady takie jak t-Studenta, skośny t-Studenta, uogólniony rozkład błędu – GED czy hiperboliczny.

3. Model stopy terminowej

Stopy terminowe (*forward rates*) wyznacza się na podstawie natychmiastowych stóp dochodu (*spot rates*). Są to tzw. implikowane stopy terminowe (*implied forward rates*), gdyż wynikają one z pewnego modelu. Model ten opiera się na teorii oczekiwań, w której stopy dochodu obligacji są zdeterminowane oczekiwaniami inwestorów co do stóp terminowych. Oznacza to, że stopa dochodu długoterminowej obligacji może być kombinacją stóp dochodu obligacji krótkoterminowych, bowiem zarobione odsetki powinny być w obu przypadkach takie same (zakładając efektywność rynku). W ogólnej sytuacji dla terminowej stopy procentowej zachodzi:

$$F_{t,t+n,t+m+n} = \frac{1}{m} \times \left((m+n) \times R_{t,t+m+n} - n \times R_{t,t+n}\right) \qquad (1)$$

gdzie: $F_{t,t+n,t+m+n}$ – terminowa stopa w momencie t dla pożyczki (depozytu) rozpoczynającego się w momencie $t+n$, kończącego w momencie $t+n+m$; $R_{t,t+m+n}$ – stopa spot w momencie t dla pożyczki (depozytu) rozpoczynającego się w momencie t, kończącego w momencie $t+n+m$; $R_{t,t+n}$ – stopa spot w momencie t dla pożyczki (depozytu) rozpoczynającego się w momencie t, kończącego w momencie $t+n$.

Jest to przykład modelu terminowej struktury stóp procentowych, który wywodzi się z teorii oczekiwań.

4. Modele chwilowej stopy procentowej

Jako przykłady modeli teorii finansów, które mają u podstaw teorie procesów stochastycznych, z uwagi na ich przydatność aplikacyjną (por. Szczepaniak 2003), rozpatrzymy dwa jednoczynnikowe modele chwilowej stopy procentowej (*instantaneous interest rate*) – model Vasička oraz model Coxa, Ingersolla i Rossa.

W modelu Vasička zakłada się, że proces chwilowej stopy procentowej r_t opisany jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego (Vasiček, 1977):

$$\mathrm{dr_t} = \kappa(\mu - \mathrm{r_t})\mathrm{dt} + \sigma dW_t \qquad (2)$$

gdzie: $\mu > 0$ – długoterminowy poziom stopy spot; $\kappa > 0$ – szybkość z jaką stopa r w momencie t zmierza do μ; $\sigma > 0$ – współczynnik wpływający na zmienność procesu W.

W modelu CIR zakłada się, że proces chwilowej stopy procentowej r_t opisany jest za pomocą następującego stochastycznego równania różniczkowego (Cox, Ingersoll, Ross, 1985):

$$\mathrm{dr_t} = \kappa(\mu - \mathrm{r_t})\mathrm{dt} + \sigma\sqrt{\mathrm{r}_t}\, dW_t \qquad (3)$$

5. Badania empiryczne

Analizie poddano różne rodzaje modeli stóp procentowych dla stopy krótkoterminowej WIBID3M (3-miesięczna stopa depozytów na rynku międzybankowym). Wszystkie obliczenia wykonane zostały za pomocą programu Matlab.

Model (G)ARCH

Przeanalizowano modele ARCH, GARCH dla stopy WIBID3M z okresu 17.03.2000-31.03.2003. Dla każdej ze stóp analizowano:

– zmiany bezwzględne, (dzienne różnice bezwzględne Δ) liczone jako $\Delta = P_t - P_{t-1}$, gdzie: P_t jest stopą WIBID z momentu t; P_{t-1} jest stopą WIBID z momentu t-1;

– zmiany względne (tygodniowe logarytmiczne stopy zwrotu r), wyznaczone za pomocą $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$, gdzie: P_t jest stopą WIBID z momentu t; P_{t-1} jest stopą WIBID z momentu t-1.

Kierując się minimalizacją poziomu standardowych błędów prognoz (RMSE[1]) oraz minimalizacją poziomu prognoz zmienności odchyleń standardowych (Sigma Forecast[2]) zaproponowany został model ARCH(2) dla zmian względnych:

$$r_t = -0.0006782 + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

$$h_t = 0.000024233 + 0.39845(r_{t-1} + 0.0006782)^2 + 0.38178(r_{t-2} + 0.0006782)^2$$

gdzie: $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Tab.1 zawiera błędy i statystyki oszacowanego modelu, a tab. 2 prognozy uzyskane za jego wykorzystaniem. Oceny błędów są niskie, a parametry istotne. Model ten charakteryzuje się również niskimi błędami prognozy.

Tab. 1. Parametry modelu ARCH(2)

Parametr	Wartość	Błąd Standardowy	Statystyka t
μ	-0.0006782	0.00020576	-3.2961
ω	2.4233e-005	9.5503e-007	25.3740
α_1	0.39845	0.053092	7.5050
α_2	0.38178	0.046121	8.2777

Źródło: opracowanie własne.

[1] Mean RMSE – warunkowe odchylenie standardowe błędów prognozy (standardowy błąd prognozy), pierwiastek ze średniej kwadratów odchyleń.

[2] Sigma Forecast – pierwiastek ze średniej kwadratów błędów prognozy zmienności.

Tab. 2. Prognozy modelu ARCH(2)

SigmaForecast	MeanRMSE
0.0062	0.0062
0.0063	0.0063
0.0074	0.0074
0.0078	0.0078
0.0084	0.0084
0.0087	0.0087
0.0090	0.0090
0.0092	0.0092
0.0094	0.0094
0.0096	0.0096

Źródło: opracowanie własne

Model stopy terminowej

Model stopy terminowej dany równaniem (1) jest bardzo prostym przykładem modelu struktury terminowej. Na przykład stopa terminowa WIBID3M dla trzech miesięcy za trzy miesiące, z wykorzystaniem stopy spot dla WIBID3M oraz dla WIBID6M, będzie równa:

$$F_{t,t+3,t+6} = \frac{1}{3} \times \left(6 \times R_{t,t+6} - 3 \times R_{t,t+3}\right) = 2 \times R_{t,t+6} - R_{t,t+3}$$

Najpierw dla okresu 31.12.2002-15-01.2003 wyznaczone zostały za pomocą równania (1) stopy terminowe WIBID3M. Są to prognozy stóp spot WIBID3M dla okresu 31.05.2003-14.04.2003. Wyniki uzyskanych prognoz dla stopy WIBID3M są zestawione w tab. 3.

Tab. 3. Wyniki prognoz modelu stopy terminowej

Data	Stopy rzeczywiste (%)	Stopy prognozowane (%)
03-03-31	5,85	6,1
03-04-01	5,84	5,99
03-04-02	5,84	5,9
03-04-03	5,76	5,96
03-04-04	5,8	6,03
03-04-07	5,82	6,03
03-04-08	5,8	5,94
03-04-09	5,81	6
03-04-10	5,83	6
03-04-11	5,81	5,97
03-04-14	5,8	5,97

Źródło: opracowanie własne

Modele chwilowej stopy procentowej

W przypadku modeli chwilowej stopy procentowej prognozowanie przeprowadzone zostanie na podstawie realizacji historycznych, a nie implikowanych stóp terminowych (wyznaczonych na podstawie np. instrumentów takich, jak FRA, kontrakt cap, kontrakt swap czy swaption).

Na podstawie dziennych różnic bezwzględnych stopy WIBID3M od 02.01.2002 do 31.12.2002 wyestymowane zostały parametry modelu Vasička i CIR dwoma metodami. Wyniki estymacji parametrów otrzymane za pomocą regresji liniowej zestawione są w tab. 4. Parametry te posłużyły jako punkty startowe dla drugiej metody – metody momentów. Wyniki estymacji metodą momentów zawiera tab. 5 (por. Szczepaniak, 2003).

Tab. 4. Wyniki regresji

Model	$\hat{\kappa}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Vasička	1.214465528	0.047399037	0.011250533
CIR	1.093977019	0.043068515	0.037212215

Źródło: opracowanie własne

Tab. 5. Estymatory metody momentów i wartość funkcji minimalizowanej J

Model	$\hat{\kappa}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	G[3]	J(a,b,s,g)
Vasička	1.33935008	0.00166528	0.05139437	0	0.00000523189
CIR	1.31529261	0.00011061	0.03797949	0.499930498	0.0000206959

Źródło: opracowanie własne

Oszacowany metodą momentów model Vasička dany równaniem (2) ma postać:

$$\mathrm{dr_t} = 1.339501(0.0016653 - \mathrm{r_t})\mathrm{dt} + 0.05139437 dW_t$$

a model CIR dany równaniem (3) następującą:

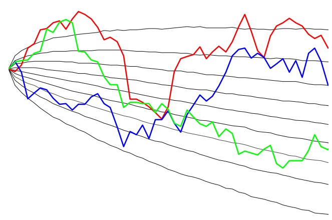
$$\mathrm{dr_t} = 1.31529261(0.00011061 - \mathrm{r_t})\mathrm{dt} + 0.03797949\sqrt{\mathrm{r}_t}\, dW_t$$

Dla parametrów z tab. 4 wykreślone zostały linie kwantylowe dopasowanych modeli Vasička i CIR na podstawie 10 000 realizacji uzyskanych metodą Monte Carlo. Na Rys 2 – 5 zamieszczone zostały trzy przykładowe trajektorie dla dwóch omawianych modeli. Na Rys. 2 oraz Rys. 4 zamieszczone są prognozy 50-dniowe, a na Rys. 3 oraz Rys. 5 250-dniowe.

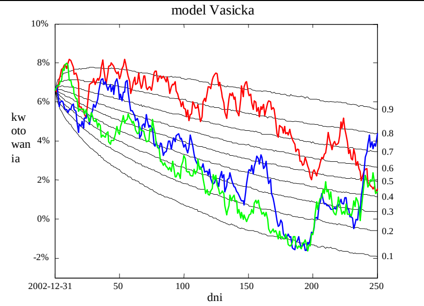
Analiza wyników dla modelu Vasička: stopa WIBID3M kwotowana na poziomie 6,6% w dniu 31.12.2002 będzie się znajdować w przedziale [6%, 8%] za 10 dni z prawdopodobieństwem ok. 0,7, a po 100 dniach prawdopodobieństwo to spadnie do ok. 0,25.

Analiza wyników dla modelu CIR: stopa WIBID3M kwotowana na poziomie 6,6% w dniu 31.12.2002 będzie się znajdować w przedziale [6%, 6.7%] za 10 dni z prawdopodobieństwem ok. 0,9, a po 100 dniach prawdopodobieństwo to spadnie do mniej niż 0,1.

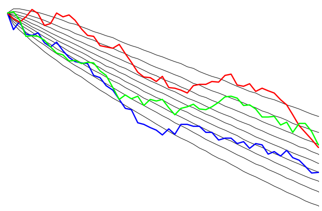
[3] Parametr *g* dla modelu Vasička wynosi 0, a dla modelu CIR 0,5.



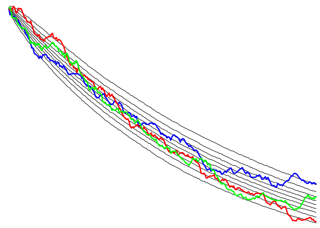
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

6. Podsumowanie

Z powyższych rozważań wynika, że w zagadnieniu prognozowania na krótki termin stopy WIBID3M w analizowanym okresie mógłby zostać wykorzystany model ARCH oraz model chwilowej stopy procentowej. Natomiast przedstawiony model stopy terminowej, z uwagi na prostotę, może być jedynie uwzględniony w bieżącym zarządzaniu pozycjami wrażliwymi na zmiany stopy procentowej.

Literatura

Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S. (1985), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53 (2), s. 385-467.

Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (2001), *Risk Management*, McGraw-Hill, New York.

Engle, R. (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation, *Econometrica* 50, s. 987-1008.

Jorion, P. (1997), *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York.

Mills, T. C. (1993), *The econometric modeling of financial time series*, Cambridge University Press, New York.

Szczepaniak, W. (2003), Modele stopy spot na rynku polskim, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego*, Łódź (w druku).

Tsay, R. S. (2002), *Analysis of financial time series*, John Wiley & Sons New York.

Vasiček, O. A. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* 5, s. 177-188.