

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Joanna Górka,

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Joanna Stempińska

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Kointegracja heteroskedastyczna

1. Wstęp

Heteroskedastyczność jest obecna w wielu makroekonomicznych i finansowych szeregach czasowych (Bollerslev, Chou, Kroner (1992), oraz Bera, Higgins (1993)). Założenie o stałości wariancji warunkowej w niestabilnych szeregach cen oraz wskaźników ekonomicznych jest nierealne oraz niepraktyczne. Badania prowadzone w latach osiemdziesiątych wykazały, że w wielu makromodelach opartych na szeregach czasowych wariancja składnika losowego jest znacznie mniej stabilna niż to zwykle zakładano (Welfe (1998)). Ma to miejsce najczęściej w przypadku modeli procesów finansowych, co można również uzasadnić odwołując się do teorii ekonomicznych tłumaczących kształtowanie się tych zjawisk. Problem zmiennej w czasie wariancji składnika losowego można rozwiązać za pomocą modelu ARCH lub modeli będących jego rozszerzeniem (modele klasy ARCH).

Pojęcie kointegracji zaproponowane przez Grangera (1981) a następnie rozwinięte przez Engle'a i Grangera (1987) popularność swą zyskało dzięki dwóm pozornie sprzecznym faktom: (1) w ekonomicznych szeregach pojawiają się pierwiastki jednostkowe, (2) teoria ekonomii często sugeruje występowanie równowagi lub relacji długookresowej pomiędzy zmiennymi. W klasycznym modelu kointegracji (model E-G) zakłada się, że procesy $y_t, x_t \sim I(1)$ zaś reszty z zależności długookresowej $u_t \sim I(0)$. Hansen (1992) zauważył, że model kointegracyjny sformułowany przez Engle'a i Grangera jest zbyt ogólny, aby obejmować wszystkie niestacjonarne szeregi ekonomiczne. Reszty regresji

modelu kointegracyjnego różnią się stochastycznie od regresorów, które mają ustaloną średnią i ograniczoną wariancję. Możemy spodziewać wzrostu wariancji resztowej pod wpływem wzrostu „rozmiaru”(wagi) regresorów, jak również zmian wariancji resztowej w czasie z powodu zmieniających się współczynników. Reasumując możemy spodziewać się niestacjonarności wariancji resztowej w czasie.

Pojęcie modelu heteroskedastycznej kointegracji (HCI) zaproponował Hansen (1992). Osłabił on założenia klasycznego modelu E-G. Jedynymi założeniami dotyczącymi równania kointegrującego są: (1) $x_t \sim I(1)$, (2) reszty równania (w_t) są procesem współzintegrowanym¹ (BI). Założenie (2) nie stoi w sprzeczności z klasycznym założeniem, gdyż proces BI jest procesem $I(0)$.

Hansen, w swojej pracy, podał dwa uzasadnienia dla modelu HCI:

1. Szeregi x_t i w_t charakteryzują się wariancją, która rośnie w tym samym tempie.
2. W badaniach ekonomicznych coraz częściej używa się modeli ze zmiennymi w czasie parametrami (TVP). Rozważmy dla przykładu regresję liniową ze zmiennym w czasie parametrem,

$$y_t = \beta_t x_t + u_t \quad (1)$$

$$\beta_t = \beta + v_t \quad (2)$$

Model opisany równaniami (1)-(2) można zapisać w równoważnej postaci

$$y_t = \beta x_t + v_t x_t + u_t \quad (3)$$

Jeżeli szereg $x_t \sim I(1)$, to wówczas model (3) staje się modelem HCI, gdzie $v_t x_t$ jest procesem BI. Model (3) sugeruje, że reszty będą proporcjonalne do regresora, tzn. duże zakłócenia będą występować częściej, gdy proces x_t będzie osiągał duże wartości.

Celem referatu jest przedstawienie własności procesu BI oraz prezentacja modelu heteroskedastycznej kointegracji.

2. Procesy współzintegrowane

Hansen (1992) w swojej pracy wprowadza pojęcie procesu współzintegrowanego.

Proces w_t generowany przez $w_t = \sigma_t u_t$, gdzie $\sigma_t \sim I(1)$ oraz $u_t \sim I(0)$ nazywamy procesem współzintegrowanym (*bi-integrated - BI*).

Proces u_t jest rozumiany jako „część stacjonarna” procesu w_t , natomiast proces σ_t (a dokładniej σ_t^2) – jako „część wariancyjną”.

¹ Ang. *bi-integrated*. Nie należy tego tłumaczyć jako podwójnie zintegrowanego.

Niech

$$w_t = \sigma_t u_t, \quad (4)$$

gdzie $\sigma_t = \sigma_{t-1} + v_t$, zaś $u_t \sim NID(0, \delta_1)$, $v_t \sim NID(0, \delta_2)$, wówczas

$$E(w_t) = 0 \quad (5)$$

$$\text{var}(w_t) = E(\sigma_t^2 u_t^2) = \delta_1^2 \delta_2^2 (t+1), \text{ jeśli } \text{cov}(u_t, v_t) = 0 \quad (6)$$

$$\text{cov}(w_t, w_{t-s}) = E(\sigma_t u_t \sigma_{t-s} u_{t-s}) = 0 \quad (7)$$

Zatem wariancja procesu BI, podobnie jak wariancja procesu σ_t , jest funkcją czasu, zaś autokorelacja nie występuje. Ponadto proces w_t charakteryzuje się tendencją do częstego przecinania swojej wartości średniej. Poszczególne wykresy realizacji procesu BI przypominają proces typu GARCH. Analiza funkcji autokorelacji (ACF), oraz funkcji autokorelacji cząstkowej (PACF) procesu BI oraz różnych procesów GARCH pozwoliła na sformułowanie następujących wniosków:

1. wartości współczynników ACF i PACF dla procesu BI są statystycznie nieistotne,
2. wartości współczynników ACF dla kwadratów realizacji są statystycznie istotne. Ponadto ich zanikanie następuje bardzo wolno (wolniej niż dla procesów typu GARCH, dla których ACF urywa się po kilku/kilkudziesięciu opóźnieniach w zależności od odległości sumy ocen parametrów od jedyńki), co świadczy o długiej pamięci wariancji procesu. Zatem procesy BI przypominają procesy IGARCH,
3. wartości współczynników PACF dla kwadratów obserwacji są statystycznie istotne. Ich zanikanie następuje, choć nie można stwierdzić, że wszystkie wartości współczynników po kilku/kilkudziesięciu opóźnieniach są statystycznie nieistotne,
4. w granicznych przypadkach odróżnienie procesu BI i GARCH z sumą parametrów bliską jedności za pomocą ACF i PACF jest niemożliwe.

Dla zilustrowania na rys. 1 przedstawiono przykładową realizację procesu BI, GARCH i ARCH. Proces generujący dane dla poszczególnych przypadków ma postać:

proces BI

$$w_t = \sigma_t u_t, \quad (8)$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + v_t, \quad u_t, v_t \sim NID(0, 1), \quad (9)$$

proces GARCH

$$\varepsilon_t | y_{t-1}, y_{t-2} \dots \sim N(0, h_t), \quad (10)$$

$$h_t = 0.1 + 0.89h_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-1}^2, \quad (11)$$

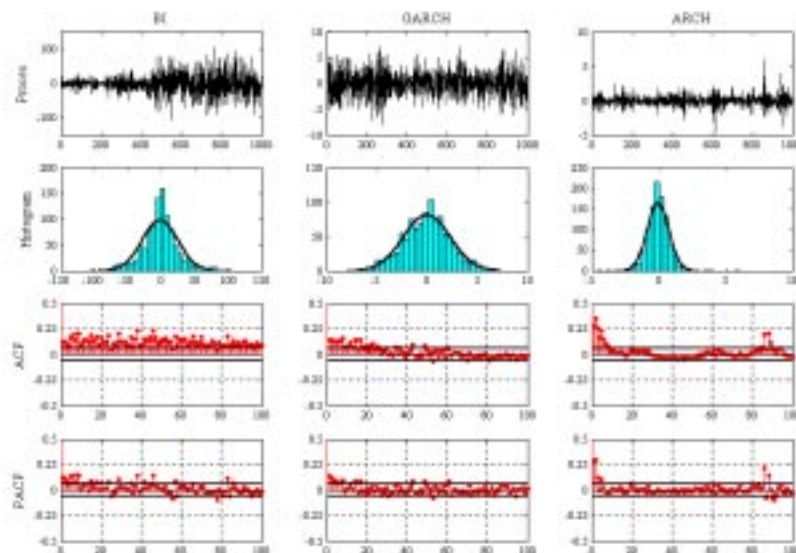
proces ARCH

$$\varepsilon_t | y_{t-1}, y_{t-2} \dots \sim N(0, h_t), \quad (12)$$

$$h_t = 0.1 + 0.4\varepsilon_{t-1}^2 + 0.3\varepsilon_{t-2}^2 + 0.2\varepsilon_{t-3}^2 + 0.05\varepsilon_{t-4}^2. \quad (13)$$

Na rysunku przedstawiono również odpowiednio histogramy jak i wartości współczynników ACF i PACF dla kwadratów realizacji.

Rys. 1. Przykładowe realizacje procesów BI, GARCH, ARCH i ich charakterystyki



Źródło: Opracowanie własne

Proces BI charakteryzuje się wybuchowością. Wynika to z wariacji procesu, która charakteryzuje się stabilną, niegasnącą funkcją autokorelacji cząstkowej. Rozkład tego procesu nie jest zbliżony do rozkładu normalnego.

Aby określić własności statystyczne procesu BI przeprowadzono eksperyment symulacyjny. Eksperyment ten polegał na generowaniu procesów: BI, ARCH, GARCH opisanych równaniami (8)-(13). Przeprowadzono 100 i 300 powtórzeń generowanych szeregów o długości: 1000 i 1300 obserwacji. Tablica pierwsza zawiera wyniki symulacji dla szeregu o długości 1000 obserwacji oraz 300 powtórzeń. Wnioski z symulacji dla szeregów o długości 1300 obserwacji (oraz 100 powtórzeń) nie odbiegają od wyników przedstawionych w tablicy 1.

Tablica 1. Własności statystyczne procesów: GARCH, ARCH, BI

	Średnia			Odchylenie Standardowe		
	min	max	śr	min	max	Śr
GARCH	-0,2840	0,4303	-0,0007	1,9665	6,3936	3,0704
ARCH	-0,2463	0,2772	-0,0015	0,6074	6,3549	1,1127
BI	-3,4503	2,4904	-0,0068	5,4636	72,7990	23,4574
	Skośność			Kurtoza		
	min	max	śr	min	max	Śr
GARCH	-1,0083	0,7226	0,0059	2,8884	14,5002	4,8383
ARCH	-11,7519	12,7833	-0,0073	4,2094	359,1711	23,3872
BI	-0,7728	0,7752	0,0010	2,8709	14,6710	5,8697

Źródło: Opracowanie własne

Wyniki symulacji wskazują na to, że średnia dla wszystkich procesów kształtuje się na poziomie zerowym, zaś wariancja dla procesu BI przyjmuje wysokie wartości (przyjmuje ona wartość wyższą niż wariancja dla procesów GARCH i ARCH). Proces BI okazał się procesem bardziej wysmukłym niż proces GARCH, natomiast mniej wysmukły niż proces ARCH (podwyższona kurtoza). Można także zauważyć występowanie grubych ogonów (patrz rys.1).

Oprócz wyników prezentowanych w powyższej tabelicy przebadano występowanie autokorelacji za pomocą testu Box'a-Liunga, efektu ARCH za pomocą testu Engle'a, pierwiastków jednostkowych za pomocą testu DF oraz badanie liniowości testem McLeoda-Li dla badanych procesów. Wyniki pokazały niemożność rozróżnienia tych procesów.

Analizując własności statystyczne nasuwa się pytanie o porównanie modeli współzintegrowanych z modelami dwuliniowymi (BL), które podobnie jak GARCH charakteryzują się skupianiem wariancji i w niektórych przypadkach (procesy poddiagonalne) mają podwyższoną kurtozę w stosunku do modeli GARCH (por. Bruzda (2003)). Ponieważ badanie autokorelacji kwadratów obserwacji² dla modelu BL i GARCH nie daje możliwości rozróżnienia pomiędzy nimi (por. Bruzda (2003)), podobnie jak dla modeli BI i GARCH, to należy wnioskować, że również dla modeli BL i BI badanie autokorelacji kwadratów obserwacji nie daje możliwości rozróżnienia.

Zatem podstawową charakterystyką odróżniającą proces BI od procesów GARCH czy BL jest wartość wariancji i w mniejszym stopniu analiza ACF kwadratów realizacji. Model BI okazał się procesem charakteryzującym się bardzo dużą (znacznie większą niż GARCH czy BL) i częstą zmiennością. Może zatem służyć do opisu procesów względnie spokojnych, które w pewnym momencie „wybuchają” (których wariancja znacznie wzrasta; wariancja zależy od procesu $I(1)$ σ_t).

3. Heteroskedastyczna kointegracja

Hansen (1992) podaje następującą definicję modelu heteroskedastycznej kointegracji:

Rozważmy następujący model regresji liniowej:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1' x_t + w_t \quad (12)$$

gdzie $x_t \sim I(1)$ jest wektorem o wymiarach $n \times 1$

$$x_t = x_{t-1} + u_{3t} \quad (13)$$

Reszty w_t są procesem BI zdefiniowanym wcześniej.

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma_t u_{1t}, \\ \sigma_t &\sim I(1) - \text{proces skali} \end{aligned} \quad (14)$$

² Np. testem Engle'a czy McLeoda-Li.

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + u_{2t} \quad (15)$$

Wartości początkowe x_0 i σ_0 są zmiennymi losowymi o skończonej wartości oczekiwanej.

Model zapisany w postaci równań (12)–(15) nazywamy modelem hetroskedastycznej kointegracji (*heteroskedastic cointegration - HCI*).

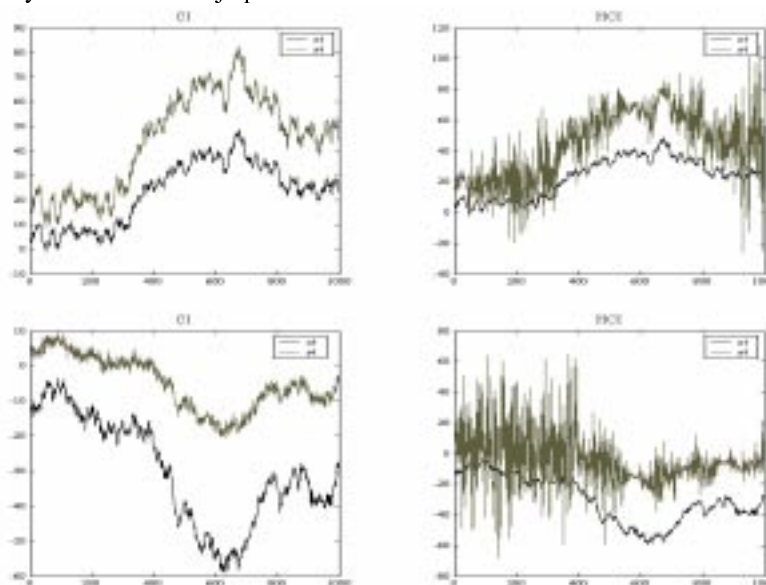
Zauważmy, że

$$\text{var}(x_t) \approx C_1 t, \quad 0 < C_1 < \infty,$$

$$\text{var}(w_t) \approx C_2 t, \quad 0 < C_2 < \infty.$$

Zatem x_t , w_t mają ten sam rząd wariancji (stochastic order). Model ten różni się od standardowego modelu E–G tym, że wariancja reszt jest zmienna w czasie. Pomimo tego, że szeregi te charakteryzują się takim samym rzędem wariancji resztowej, szeregi te zachowują się zupełnie inaczej. Proces x_t , nie wykazuje tendencji do powrotu do średniej ani kształtowania się wokół jakiejś szczególnej wartości, zaś proces w_t kształtuje się wokół swojej średniej, która wynosi zero (równanie (5)). Dla wizualnego rozróżnienia pomiędzy CI i HCI na rysunku 2 przedstawiono przykładowe realizacje procesów CI i HCI.

Rys. 2. Przykładowe realizacje procesów CI i HCI



Źródło: Opracowanie własne

Procesy CI mają taką samą ścieżkę rozwoju długookresowego natomiast procesy HCI posiadają tę samą cechę, ale w odniesieniu do wartości średniej. Osłabienie założeń modelu E-G pozwala na ustalenie długookresowej ścieżki

równowagi pomiędzy dwoma procesami charakteryzującymi się różną wielkością i częstotliwością zmienności.

W celu porównania modeli CI i HCI przeprowadzono symulację Monte Carlo. Proces generujący dane ma postać:

model HCI

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + w_t, \quad (16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + u_{3t}, \\ w_t &= \sigma_t u_{1t}, \\ \sigma_t &= \sigma_{t-1} + u_{2t}, \\ u_{1t}, u_{2t}, u_{3t} &\sim NID(0, 1), \end{aligned}$$

model CI

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_{1t}, \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + u_{2t}, \\ u_{1t}, u_{2t} &\sim NID(0, 1). \end{aligned}$$

W każdym przypadku wygenerowano 100 szeregów po 1000 obserwacji. Następnie szacowano parametry poszczególnych modeli za pomocą MNK³. W obydwu przypadkach oceny parametrów są statystycznie istotne. Współczynnik determinacji dla modelu CI przyjmuje wysokie wartości, zaś jego wielkość dla modelu HCI zależy od wartości oceny parametru β_1 (jego wartość rośnie wraz ze wzrostem β_1 - patrz tablica 2.).

Tablica 2. Wartości współczynnika determinacji dla modeli HCI i CI

β_1	β_1	HCI			CI		
		Min	max	Śr	min	max	Śr
10	0,5	0,0003	0,6596	0,1253	0,8033	0,9944	0,9596
10	1,0	0,0092	0,9307	0,3167	0,9491	0,9999	0,9885
10	1,5	0,0205	0,9096	0,4281	0,9816	0,9993	0,9953

Źródło: Opracowanie własne

Reszty modelu CI mają rozkład normalny, nie występuje autokorelacja ani efekt ARCH. Reszty z modelu HCI, podobnie jak w modelu CI, są zintegrowane w stopniu zerowym. Ponadto nie mają rozkładu normalnego, występuje efekt ARCH, czasami występuje autokorelacja (wyższych rzędów).

³ taką metodę estymacji do HCI używa Hansen w swojej pracy.

4. Podsumowanie

Modelowanie procesów ekonomicznych przy użyciu kointegracji jest użyteczne, ponieważ pozwala znajdować istotne związki pomiędzy niestacjonarnymi szeregami. Praca Hansena na temat heteroskedastycznej kointegracji pokazała, że teorię statystyczną rozwiniętą dla standardowego modelu kointegracji można również stosować w przypadku szerszej klasy modeli. W standardowym modelu kointegracji regresory różnią się stochastycznie od reszt z dwóch względów: (1) wariancja regresorów wzrasta liniowo w czasie, (2) regresory posiadają trend stochastyczny. W modelu heteroskedastycznej kointegracji regresory różnią się stochastycznie od reszt tylko z względu na własności trendu.

Model HCI pozwala na ustalenie ścieżki równowagi pomiędzy szeregami charakteryzującymi się różną zmiennością, rosnącą w czasie wariancją oraz niekoniecznie tymi samymi własnościami trendu.

Literatura

- Bruzda, J. (2003), Procesy dwuliniowe i procesy GARCH w modelowaniu finansowych szeregów czasowych, *Przegląd Statystyczny*, Zeszyt 2.
- Bera, A. K., Higgins, M. L. (1993), ARCH models: properties, estimation and testing, *Journal of Economic Surveys*, 7, s. 305-366.
- Charemza, W. W., Deadman, D. F. (1997), *Nowa ekonometria*, PWE. Warszawa.
- Engle, R. F., Granger, C. W. J. (1987), Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, *Econometrica*, vol. 55, s. 251 – 276.
- Hansen, B. E. (1992), *Heteroskedastic cointegration*, *Journal of Econometrics*, 54, s. 139 – 158.
- Hyżyk, S., Osińska, M. (2000), Zmienność wariancji warunkowej w modelowaniu i prognozowaniu kursów walutowych, AUNC, XXX, Wyd. UMK, Toruń.
- Maddala, G. S., Kim, In-Moo. (2002), *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge.
- Syczewska, E. M. (1999), *Analiza relacji długookresowych: Estymacja i weryfikacja*, Monografie i opracowania, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa.
- Welfe, A. (1998), *Ekonometria*, PWE, Warszawa.