DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Piotr Fiszeder
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Dynamiczne zabezpieczanie portfela przed ryzykiem - zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH

1. Wstęp

Rynki transakcji futures powstały w odpowiedzi na zapotrzebowanie ze strony producentów i pośredników narażonych na ryzyko związane z fluktuacją cen. Również obecnie zabezpieczanie przed ryzykiem należy do podstawowych obszarów zastosowań instrumentów pochodnych. W strategiach zabezpieczających można wykorzystywać różne instrumenty pochodne. Niniejszy artykuł dotyczy wyłącznie kontraktów futures. W pracy analizowana jest strategia zabezpieczająca polegająca na minimalizowaniu wariancji stopy zwrotu portfela składającego się z pozycji zajętej w kontraktach futures i pozycji zabezpieczanej. Tradycyjnie stosowane metody estymacji współczynnika zabezpieczenia nie uwzględniają jednej z podstawowych własności procesów finansowych czyli zmieniających się w czasie warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Z tego względu w ostatnich kilkunastu latach powstało wiele prac, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się modele GARCH.

Dotychczasowe wyniki badań są niejednoznaczne, jednakże w większości wskazują na przewagę strategii zabezpieczających wykorzystujących wielorównaniowe modele GARCH. W niniejszym artykule po pierwsze, zbadano skuteczność takiej strategii wykorzystując kontrakty futures na indeks WIG20 notowane na GPW w Warszawie. Po drugie, porównano skuteczność dla różnych modeli GARCH. W dotychczasowych badaniach przyjmuje się najczęściej wybraną postać modelu GARCH. Po trzecie, zbadano jaki wpływ na efektywność strategii zabezpieczających ma uwzględnienie w modelu występowania kointegracji pomiędzy procesem cen terminowych a procesem cen gotówkowych. Po czwarte, uzyskane wyniki porównano ze strategią zabezpieczającą polegającą na wykorzystaniu do estymacji współczynnika zabezpieczenia metod estymacji wariancji i kowariancji stosowanych przez praktyków rynku finansowego.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono zastosowane w badaniu metody estymacji współczynnika zabezpieczenia. W części trzeciej dokonano oceny skuteczności zaprezentowanych strategii zabezpieczających na przykładzie indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20 notowanych na GPW w Warszawie. Część czwarta zawiera wnioski.

2. Metody estymacji współczynnika zabezpieczenia

Współczynnik zabezpieczenia jest ilorazem wielkości pozycji zajętej w kontraktach futures do wielkości pozycji zabezpieczanej (patrz Hull, 1997). Stopa zwrotu portfela składającego się z pozycji zabezpieczanej i krótkiej pozycji zajętej w kontraktach futures wynosi:

$$x_{t+1} = s_{t+1} - b_t f_{t+1}, \tag{1}$$

gdzie $s_{t+1} = \ln S_{t+1} - \ln S_t$, $f_{t+1} = \ln F_{t+1} - \ln F_t$, S_t to cena gotówkowa, F_t - cena terminowa, b_t -współczynnik zabezpieczenia.
Optymalna wartość współczynnika zabezpieczenia minimalizująca wariancję stopy zwrotu (1) dana jest formułą:

$$b_t = \frac{Cov(s_{t+1}, f_{t+1} | \psi_t)}{Var(f_{t+1} | \psi_t)}, \tag{2}$$

gdzie ψ_t oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w okresie t.
Jeżeli warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu są stałe w czasie to współczynnik zabezpieczenia można wyznaczyć szacując metodą najmniejszych kwadratów równanie regresji:

$$s_t = \alpha + \beta f_t + \varepsilon_t. \tag{3}$$

Optymalna wartość współczynnika zabezpieczenia jest wówczas równa szacunkowi parametru β. Taki sposób zabezpieczenia jest określany w literaturze jako zabezpieczenie MNK (OLS hedging). Liczne badania empiryczne pokazują jednakże, że warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu procesów finansowych zmieniają się w czasie (patrz np. Bollerslev, Chou i Kroner, 1992, Bollerslev, Engle i Nelson, 1994, Fiszeder, 2003). Z tego względu w ostatnich kilkunastu latach powstało wiele prac, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się modele GARCH. Zmieniający się w czasie współczynnik zabezpieczenia dany jest formułą:

$$b_t = \frac{h_{sf,\,t+1}}{h_{f,\,t+1}}, \tag{4}$$

gdzie $h_{sf,\,t+1}$ i $h_{f,\,t+1}$ oznaczają prognozy odpowiednio warunkowej kowariancji stóp zwrotu instrumentu bazowego i kontraktu futures oraz warunkowej wariancji stopy zwrotu kontraktu futures wyznaczone na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH.

W przypadku analizy kilku szeregów czasowych jedną z najczęściej stosowanych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest model BEKK (patrz Engle i Kroner, 1995):

$$H_t = CC' + \sum_{i=1}^{q} D_i\, \varepsilon_{t-i}\varepsilon'_{t-i}\, D_i' + \sum_{j=1}^{p} E_j H_{t-j} E_j', \tag{5}$$

gdzie H_t jest symetryczną macierzą warunkowych kowariancji o wymiarach $N\times N$, ε_t jest wektorem składników losowych o wymiarach $N\times 1$, C, D_i oraz E_j są macierzami parametrów o wymiarach $N\times N$.

Rozważano różne specyfikacje równań dla średnich. Najprostsza postać zakłada stałość stóp zwrotu cen gotówkowych i terminowych:

$$s_t = \alpha_{s0} + \varepsilon_{s,\,t}, \tag{6}$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \varepsilon_{f,\,t}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_t \mid \psi_t \sim N(0, H_t), \tag{8}$$

gdzie $\varepsilon_t = (\varepsilon_{s,\,t}, \varepsilon_{f,\,t})'$, a H_t opisane jest równaniem (5).

Aby uwzględnić występujące pomiędzy stopami zwrotu instrumentu bazowego i kontraktu futures krótkoterminowe zależności szacowano model VAR-BEKK:

$$s_t = \alpha_{s0} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{si} s_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{si} f_{t-i} + \varepsilon_{s,\,t}, \tag{9}$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{fi} s_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{fi} f_{t-i} + \varepsilon_{f,\,t}, \tag{10}$$

$$\varepsilon_t \mid \psi_t \sim N(0, H_t), \tag{11}$$

gdzie H_t opisane jest równaniem (5).
Rozważano również model wektorowej korekty błędem (VECM):

$$s_t = \alpha_{s0} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{si} s_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{si} f_{t-i} + \gamma_s (S_{t-1} - \gamma F_{t-1}) + \varepsilon_{s,t}, \tag{12}$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{fi} s_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{fi} f_{t-i} + \gamma_f (S_{t-1} - \gamma F_{t-1}) + \varepsilon_{f,t}, \tag{13}$$

$$\varepsilon_t | \psi_t \sim N(0, H_t), \tag{14}$$

gdzie H_t opisane jest równaniem (5).
Analizy empiryczne wskazują, że warunkowa normalność procesu (założona w (8), (11) i (14)) nie jest w stanie wyjaśnić zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych procesów finansowych. Z tego względu w równaniu (8) przyjęto dodatkowo dwuwymiarowy rozkład t-Studenta z v stopniami swobody.

Na skuteczność strategii zabezpieczających może mieć również wpływ zastosowana postać wielorównaniowego modelu GARCH. Dlatego rozważano również inne specyfikacje macierzy warunkowych kowariancji H_t w (8). W celu ograniczenia liczby parametrów w modelu można przyjąć, że D_i oraz E_j w równaniu (5) są macierzami diagonalnymi.

Bollerslev (1990) wprowadził model stałych warunkowych współczynników korelacji:

$$H_t = D_t \Gamma D_t, \tag{15}$$

gdzie D_t oznacza diagonalną macierz warunkowych odchyleń standardowych o wymiarach $N \times N$, a Γ jest macierzą stałych współczynników korelacji.

Do prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu w równaniu (2) można również zastosować metody wykorzystywane przez praktyków rynku finansowego: modele wariancji i kowariancji ruchomych oraz model wygładzania wykładniczego (patrz Zangari, 1996, Litterman i Winkelmann, 1998). Modele wariancji i kowariancji ruchomych dane są następującymi formułami:

$$\sigma_{x,t+1}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=t-k+1}^{t} (r_{x,i} - \bar{r}_x)^2, \tag{16}$$

$$\sigma_{xy,t+1} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=t-k+1}^{t} (r_{x,i} - \bar{r}_x)(r_{y,i} - \bar{r}_y)\,. \tag{17}$$

gdzie $\sigma^2_{x,t+1}$ i $\sigma_{xy,t+1}$ oznaczają odpowiednio prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu dla okresu $t+1$, $r_{x,i}$ i $r_{y,i}$ to stopy zwrotu walorów x i y dla okresu $\langle i-1, i\rangle$, $\bar{r} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} r_i$, k - stała wygładzania.

Prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu budowane na podstawie modelu wygładzania wykładniczego wyznacza się według formuł:

$$\sigma^2_{x,t+1} = (1-\alpha)\, r^2_{x,t} + \alpha\sigma^2_{x,t}\,, \tag{18}$$

$$\sigma_{xy,t+1} = (1-\alpha)\, r_{x,t} r_{y,t} + \alpha\sigma_{xy,t}\,. \tag{19}$$

Parametr wygasania (α) przyjmuje wartości z przedziału $(0,1)$.

3. Ocena skuteczności

Oceny efektywności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia dokonano na przykładzie indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20 notowanych na GPW w Warszawie. Do badania przyjęto dzienne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 r. do 31 grudnia 2002 r. (997 obserwacji). Oceny efektywności wybranych strategii zabezpieczających dokonano na podstawie danych z 2002 r. (249 obserwacji). Do analizy wybierano zawsze najbardziej płynną serię kontraktów futures. Rolowania (zamykania pozycji w danym kontrakcie futures i jednoczesnym otwieraniu takiej samej pozycji w kontrakcie o późniejszym terminie realizacji) dokonywano zawsze na tydzień przed wygaśnięciem danej serii kontraktów. Dla każdego okresu w 2002 roku konstruowano portfel składający się z indeksu WIG20 i kontraktu futures na indeks WIG20. Rozważane strategie zabezpieczające różniły się jedynie metodą estymacji współczynnika zabezpieczenia (2). Dla każdej strategii obliczono (ex post) średnie odchylenie standardowe i średnią stopę zwrotu portfela w 2002 roku. Uzyskane wyniki zostały przedstawione w tablicy 1. Dla porównania zaprezentowano najpierw średnie odchylenie standardowe i średnią stopę zwrotu w przypadku gdy portfel nie jest zabezpieczony (współczynnik zabezpieczenia równy zeru) oraz w przypadku gdy współczynnik zabezpieczenia jest stały i równy jeden (jest to tzw. zabezpieczenie naiwne). W tablicy 1 przedstawiono również dla każdej metody estymacji współczynnika zabezpieczenia stopień redukcji ryzyka mierzonego średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego (analogiczne wartości w przypadku redukcji wariancji przekraczają 80%). Tak jak się można było spodziewać zabezpieczenie portfela prowadzi do znacznej redukcji ryzyka mierzonego średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu portfela. Tradycyjnie stosowana metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia polega na estymacji metodą najmniejszych kwadratów równania regresji (3). Współczynnik zabezpieczenia MNK jest wówczas równy szacunkowi parametru β. Zabezpieczenie MNK prowadzi do dalszej redukcji ryzyka (patrz tablica 1).

Tablica 1. Ocena efektywności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia

Metoda estymacji współ. zabezpieczenia	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Średnia stopa zwrotu $(\times 10^{-4})$
Brak zabezpieczenia (b = 0)	0,015328	0	-1,4054
Zabezpieczenie naiwne (b = 1)	0,006420	58,12	0,5172
Zabezpieczenie MNK	0,006242	59,28	-0,1127
BEKK-N	0,006339	58,64	-0,5907
VAR-BEKK-N	0,006310	58,83	0,3803
VECM-BEKK-N	0,006300	58,90	0,1736
BEKK-t	0.006349	58,58	-0,5268
BEKK-N – macierze diagonalne	0,006289	58,97	1,5051
Model stałych korelacji-N	0,006246	59,25	1,1532
Wariancje i kowariancje ruchome	**0,005758**	**62,43**	1,4885
Wygładzanie wykładnicze	0,005858	61,78	**2,6580**

W tablicy przedstawiono średnie odchylenia standardowe i średnie stopy zwrotu zabezpieczonych portfeli. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.
Źródło: Obliczenia własne.

Kolejne strategie zabezpieczające polegały na wykorzystaniu przy estymacji współczynnika zabezpieczenia wielorównaniowych modeli GARCH (formuła (4)). W pierwszej kolejności do badania przyjęto zapewniającą dodatnią określoność macierzy kowariancji oraz stosunkowo ogólną postać wielorównaniowego modelu GARCH – model BEKK ($p=q=1$). Badano jaki wpływ na efektywność strategii zabezpieczających mają różne specyfikacje równań dla średniej: model zakładający stałość stóp zwrotu cen gotówkowych i terminowych (równania (6-8)), model VAR (równania (9-11), $k=1$), wektorowy model korekty błędem (równania (12-14)). Uwzględnienie występujących pomiędzy instrumentem bazowym i kontraktem futures krótkoterminowych (model

VAR) i długoterminowych (model VECM) zależności powoduje zmniejszenie ryzyka zabezpieczonego portfela, jednakże skala zmniejszenia jest niewielka.

Ponieważ warunkowa normalność procesu (założona w (8)) nie jest w stanie wyjaśnić zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych badanych procesów dlatego w (8) przyjęto dodatkowo dwuwymiarowy rozkład t-Studenta. Wprowadzenie rozkładu t-Studenta nie powoduje wzrostu efektywności strategii zabezpieczającej.

Model BEKK jest stosunkowo ogólną postacią wielorównaniowego modelu GARCH i nie nakłada na parametry zbyt krępujących ograniczeń. Zbadano jaki wpływ na skuteczność strategii zabezpieczającej ma uproszczenie postaci wielorównaniowego modelu GARCH na podstawie którego szacowany jest współczynnik zabezpieczenia. Rozważano model BEKK, w którym macierze D_i i E_j w równaniu (5) są macierzami diagonalnymi oraz model stałych współczynników korelacji (postać (15)). Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji prowadzi do zmniejszenia szacunków średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli. Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego otrzymano w przypadku, gdy do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się prognozy z modelu stałych współczynników korelacji. Jest to stosunkowo prosta i łatwa w estymacji postać wielorównaniowego modelu GARCH. Jednakże żadna ze strategii zabezpieczających, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się prognozy wyznaczone na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH nie była bardziej efektywna od zabezpieczenia MNK.

Do prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu można zastosować metody wykorzystywane przez praktyków rynku finansowego: modele wariancji i kowariancji ruchomych (równania (16-17)) oraz model wygładzania wykładniczego (równania (18-19)). Wyboru stałej wygładzania i parametru wygasania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano te wartości, dla których średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli było najmniejsze w próbce wstępnej. Zastosowanie modeli wariancji i kowariancji ruchomych oraz modelu wyrównywania wykładniczego powoduje wzrost efektywności strategii zabezpieczających. Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego stopy zwrotu zabezpieczonego portfela otrzymano w przypadku, gdy do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystano prognozy wyznaczone na podstawie modeli wariancji i kowariancji ruchomych.

W tablicy 1 obok średniego odchylenia standardowego dla każdej metody estymacji współczynnika zabezpieczenia podano również średnią stopę zwrotu zabezpieczonego portfela. Zrealizowana stopa zwrotu może być dodatkowym kryterium branym pod uwagę przy wyborze strategii zabezpieczającej. Ponieważ w pracy analizowana była strategia zabezpieczająca polegająca na minimalizowaniu wariancji stopy zwrotu zabezpieczonego portfela, dlatego średnia stopa zwrotu ma znaczenie drugorzędne.

4. Zakończenie

W pracy przedstawiono różne metody estymacji współczynnika zabezpieczenia oraz dokonano oceny ich skuteczności na przykładzie indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20. Żadna ze strategii zabezpieczających, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się prognozy wyznaczone na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH nie była bardziej efektywna od zabezpieczenia MNK. Uproszczenie postaci przyjętego do konstrukcji prognoz wariancji i kowariancji modelu nie powoduje znaczącego spadku efektywności stosowanych strategii (dotyczy to zarówno równania dla średniej, jak i równania dla wariancji). Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego stopy zwrotu zabezpieczonego portfela otrzymano w przypadku, gdy do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystano prognozy wyznaczone na podstawie modeli wariancji i kowariancji ruchomych.

Literatura

Bollerslev, T. (1990), Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach, *Review of Economics and Statistics*, 72, s. 498-505.

Bollerslev, T., Chou, R. Y., Kroner, K. F. (1992), ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, s. 5-59.

Bollerslev, T., Engle, R. F., Nelson, D. B. (1994), ARCH Models, w: Engle, R. F., McFadden, D., (red.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Elsevier Science B. V., Amsterdam.

Engle, R. F., Kroner, K. F. (1995), Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, s. 122-150.

Fiszeder, P. (2003), Testy stałości współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH – analiza korelacji między indeksami giełdowymi: WIG, DJIA i Nasdaq Composite, *Przegląd Statystyczny*, 50, 2, s. 53-71.

Hull, J. (1997), *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*. WIG-Press Warszawa.

Litterman, R., Winkelmann, K. (1998), *Estimating Covariance Matrices, Risk Management Series*, Goldman Sachs.

Zangari, P. (1996), *RiskMetrics – Technical Documents*, J. P. Morgan, New York.