

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Joanna Bruzda¹

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

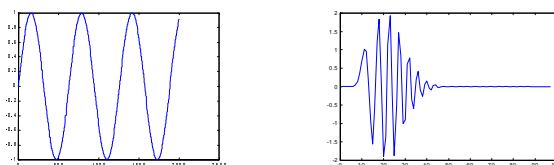
Analiza falkowa – alternatywa dla spektralnej analizy procesów ekonomicznych?

1. Wprowadzenie

Analiza spektralna, przez którą w niniejszym referacie rozumieć będziemy analizę Fouriera, umożliwia dekompozycję procesu na składowe częstotliwościowe o różnych okresach, co określane jest jako przedstawienie procesu w dziedzinie częstości. Przedstawienie takie wiąże się jednak z utratą informacji z dziedziny czasu. Patrząc na transformatę Fouriera procesu nie jesteśmy w stanie powiedzieć, kiedy miało miejsce określone zdarzenie. Jeśli charakterystyki sygnału nie zmieniają się w czasie – tj. jeśli proces jest stacjonarny – ta własność przekształcenia Fouriera nie stanowi żadnej przeszkody dla dokładnej analizy procesu. Sytuacja zmienia się jednak radykalnie, jeśli proces wykazuje trend czy pewne charakterystyki przejściowe. Wówczas jedna z propozycji, służących poprawieniu własności transformaty Fouriera, zakłada stosowanie tej transformaty do małych sekcji danych jako tzw. krótkookresowe (okienkowe) przekształcenie Fouriera (WFT – *Windowed Fourier Transform*). Przekształcenie takie obrazuje proces jako funkcję jednocześnie czasu i częstości, stanowiąc rodzaj kompromisu pomiędzy badaniami w obu dziedzinach. Podejście to ma jednak pewną wadę, związaną ze stałą wielkością okna czasowego dla wszystkich częstości. Tymczasem procesy (w tym procesy ekonomiczne) mogą wymagać bardziej elastycznego podejścia, w którym rozmiar okna ulega zwiększeniu lub zmniejszeniu w zależności od tego, czy analizujemy wahania długoczy też krótkookresowe.

¹ Autorka jest stypendystką Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej w roku 2003.

Analiza falkowa reprezentuje następny krok logiczny w badaniach częstotliwościowych i jest rodzajem techniki okien o zmiennych rozmiarach. Falka natomiast to po prostu "mała fala", a wyrażając się ściśle – krzywa o efektywnie ograniczonym trwaniu i średniej 0. Porównując sinusoidę, będącą podstawą analizy fourierowskiej i falkę należy zauważyć, że ta pierwsza rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$ i jest regularna, podczas gdy falki mogą być niesymetryczne i wygasają z czasem (patrz Rys. 1).



Rys. 1. Sinusoida i falka db50 (Daubechies 50).

Analiza falkowa dekomponuje proces na składowe ortogonalne, będące przesuniętymi i przeskalowanymi wersjami tzw. falki podstawowej (*mother wavelet*). Główną zaletą tego rodzaju analizy częstotliwościowej jest precyzyjne rozpoznawanie lokalnych charakterystyk sygnałów. W przeciwieństwie do WFT, która może nie wykryć zdarzeń, mających miejsce w obrębie szerokości okna czasowego, analiza falkowa staje się narzędziem badania procesów niestacjonarnych oraz procesów o przejściowych charakterystykach, będących efektem zmienności w czasie parametrów i (lub) nieliniowości badanych zjawisk. Analiza ta znajduje zastosowanie w tak różnorodnych dyscyplinach jak komunikacja, geofizyka czy medycyna, ale zaczyna również znajdować swoje miejsce w nowoczesnych finansach i ekonomii. Ten rodzaj analizy jest w pewnych przypadkach komplementarny względem istniejących technik, takich jak analiza korelacyjna czy analiza spektralna, w innych zaś daje możliwość rozwiązywania problemów, dla których dotychczasowe metody zawodziły bądź dawały rozwiązania niepełne.

Analiza falkowa jest określana mianem analizy czasowo-skalowej, gdzie pojęcie skali czasu zastępuje pojęcie częstości, przy czym największej skali odpowiadają najbardziej "rozciągnięte" wersje falek. Istnieje więc odpowiedniość pomiędzy małą skalą i wysoką częstością jak również dużą skalą i niską częstością. Ze względu na swoją zdolność do dostosowywania skali analiza falkowa umożliwia "zobaczenie zarówno poszczególnych drzew jak i całego lasu" i pozwala uciec od zasady nieoznaczoności Heisenberga, która w tym wypadku oznacza brak możliwości precyzyjnej analizy sygnału jednocześnie w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstości.

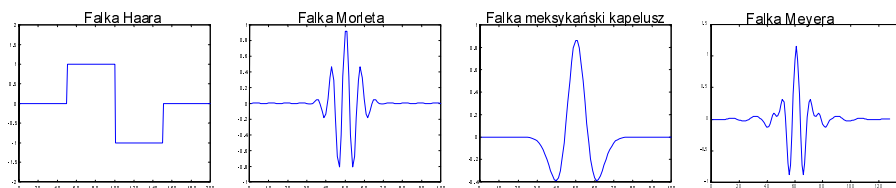
Analiza falkowa jest stosunkowo nową techniką przetwarzania sygnałów, choć jej matematyczne źródła sięgają dziewiętnastowiecznych prac Josepha Fouriera, stanowiących punkt wyjścia wszelkich analiz częstotliwościowych.

Określenie "falka" pojawiło się po raz pierwszy w pracy A. Haara z 1910 r.². Natomiast koncepcja teoretyczna falki w jej obecnej formie oraz podstawy analizy falkowej narodziły się we Francji w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku i wiążą się przede wszystkim z dwoma nazwiskami: J. Morleta i Y. Meyera. Badania nad falkami zaczęły mieć charakter międzynarodowy w 1988 r. po znalezieniu algorytmu szybkiej transformaty falkowej przez S. Mallata. Od tego momentu datuje się olbrzymie zainteresowanie stosowaniem analizy falkowej w przetwarzaniu sygnałów.

W finansach i ekonomii analiza falkowa może być wykorzystana do :

- badania własności procesów ekonomicznych oraz zależności między procesami w różnych skalach czasu (w długim i krótkim okresie);
- badania lokalnych i globalnych własności procesów w różnych rozdzielczościach (z większą bądź mniejszą dokładnością);
- wykrywania załamania strukturalnych, obserwacji nietypowych, punktów zwrotnych, nieciągłości czy skupiania się wariancji;
- badania sezonowości i dostosowywania sezonowego szeregu;
- wygładzania szeregów i wyznaczania trendów;
- usuwania zakłóceń;
- modelowania dynamiki procesów nieliniowych za pomocą sieci falkowych;
- badania procesów z długą pamięcią;
- odkrywania fraktalnej natury procesów ekonomicznych.

W niniejszym referacie zostaną przedstawione w wielkim skrócie pojęcia i własności leżące u podstaw analizy falkowej ze szczególnym uwzględnieniem analizy wielorozdzielczej. Ponadto zaprezentowane zostaną przykłady zastosowań tej techniki przetwarzania sygnałów do badania procesów ekonomicznych, a mianowicie do wykrywania cykliczności, wygładzania szeregów i badania zależności ekonomicznych według różnych skal czasu.



Rys. 2. Przykłady falek.

² Haar A. (1910), Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme, Mathematische Annalen, 69, 331-371.

2. Podstawowe definicje i własności

U podstaw analizy falkowej leży transformata falkowa, która - podobnie jak w przypadku analizy fourierowskiej - może być ciągła lub dyskretna. Rozważmy funkcję rzeczywistą $\psi(\cdot)$ o własnościach

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = 0, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) du = 1.$$

Funkcję taką będziemy nazywali falką podstawową. Ciągłą transformatą falkową (CWT – *Continuous Wavelet Transform*) funkcji $x(\cdot)$ nazywamy

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda, t}(u) x(u) du, \quad \text{gdzie } \psi_{\lambda, t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0.$$

W wyniku ciągłej transformacji falkowej otrzymujemy więc zbiór współczynników transformaty falkowej, zależnych od skali λ i czasu t . Zbiór ten stanowi równoważną reprezentację funkcji $x(\cdot)$.

Niech dany będzie wektor danych postaci $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})'$ długości $N = 2^n$. Dla $j = 0, 1, \dots, n-1$ oraz $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ definiujemy dyskretną transformatę falkową (DWT – *Discrete Wavelet Transform*) wektora x jako

$$W_{j,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \psi_{j,k}\left(\frac{n}{N}\right), \quad (2)$$

gdzie $\psi_{j,k}(\cdot)$ są przeskalowanymi i przesuniętymi wersjami falki podstawowej:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k). \quad (3)$$

Dla pewnych rodzajów falki podstawowej (np. dla falki Haara czy falek wprowadzonych przez I. Daubachies – patrz rysunki powyżej) układ (3) stanowi bazę ortonormalną. DWT operuje na skalach, które są potęgami dwójki – są to tzw. skale diadyczne. Diadyczne są także przesunięcia postaci $k \cdot 2^j$. Choć DWT może być definiowana bez odwoływania się do CWT, będziemy ją traktować jako dyskretyzację ciągłej transformaty falkowej, otrzymaną w wyniku krytycznego próbkowania CWT. Próbkowanie to jest krytyczne w tym sensie, że daje minimalną liczbę współczynników transformaty falkowej, przechowujących całą informację na temat wyjściowego sygnału.

Z dyskretną transformatą falkową związana jest ściśle analiza wielorozdzielcza (*multiresolution analysis*), wprowadzona przez Mallata w końcu lat 80-tych. Analiza ta polega na wielopoziomowej reprezentacji sygnału, gdzie na każdym poziomie sygnał jest przedstawiany w postaci sumy reprezentacji szczegółowej i zgrubnej, a na każdym poziomie następującym reprezentacja zgrubna z poziomu poprzedniego zostaje znów przedstawiona jako suma reprezentacji szczegółowej i zgrubnej. W ten sposób każda funkcja całkowalna z

kwadratem może zostać przedstawiona z dowolną dokładnością za pomocą ciągu szczegółów, a jeśli liczba poziomów reprezentacji (rozdzielczość) dąży do nieskończoności, to błąd aproksymacji sygnału dąży do zera.

Podstawowym elementem analizy wielorozdzielczej jest ciąg domkniętych przestrzeni funkcyjnych kolejnych aproksymacji:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \quad (4)$$

Ponieważ przestrzenie powyższe są wstępujące, każda z nich wyraża się sumą prostą

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad (5)$$

gdzie W_j jest dopełnieniem V_j w V_{j-1} i reprezentuje szczegóły sygnału występujące na poziomie skali 2^j , ale które nie występują już przy mniej dokładnych skalach. O ciągu przestrzeni V_j zakłada się dodatkowo, że jest samopodobny, tj.

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_0 \quad (6)$$

oraz niezmienniczy względem przesunięć postaci $k \cdot 2^j$. Żądamy także istnienia funkcji $\varphi \in V_0$ takiej, że funkcje $\{\varphi_{j,n}; n \in \mathbf{Z}\}$ stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni V_j , gdzie $\varphi_{j,n} = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} t - n)$. Funkcja φ nosi nazwę funkcji skalującej (*father wavelet, scaling function*). Wówczas poszukując bazy ortonormalnej w przestrzeni W_0 , należy zdefiniować

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2t - k). \quad (7)$$

Zachodzi także

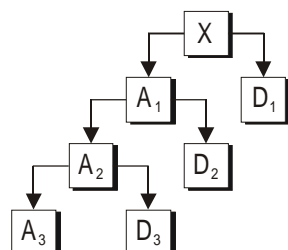
$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2t - k). \quad (8)$$

Równania (7) i (8) noszą nazwę równań skalujących. Definiują one ciągi $\{g_k\}$ i $\{h_k\}$, będące odpowiedziami impulsowymi dwóch filtrów: dolno- i górnoprzepustowego, zwanych sprzężonymi filtrami lustrzanymi. Filtry te, zastosowane do wyjściowego sygnału bądź jego zgrubnej reprezentacji na danym poziomie rozdzielczości, pozwalają dokonać dekompozycji sygnału na reprezentację zgrubną (filtr dolnoprzepustowy) i szczegółową (filtr górnoprzepustowy). Jeśli przez operatory G i H oznaczymy transmitancje sprzężonych filtrów lustrzanych, falkowa dekompozycja sygnału x , składającego się z 2^n elementów, ma postać

$$W = [Gx, GHx, GH^2x, \dots, GH^{n-1}x, GH^n x, H^n x]. \quad (9)$$

Oznaczając reprezentacje zgrubne (*approximation*) przez $A_1 = Hx$, $A_2 = H^2x$ itd., zaś reprezentacje szczegółowe (*detail*) przez $D_1 = Gx$, $D_2 = GHx$,

$D_3 = GH^2x$ itd., dekompozycję falkową można przedstawić poniższym schematem.



$$\begin{aligned}
 x &= A_1 + D_1 = \\
 &= A_2 + D_1 + D_2 = \\
 &= A_3 + D_1 + D_2 + D_3
 \end{aligned}$$

Rys. 3. Analiza wielorozdzielcza.

Analiza wielorozdzielcza pozwala więc przedstawić sygnał jako ciąg detali od najdrobniejszego do najbardziej zgrubnego. Należy dodać, że ciąg detali (9) przedstawiony w odwrotnej kolejności daje dyskretną transformatę falkową (2).

Jednym z bardziej użytecznych narzędzi analizy falkowej jest skalogram, będący odpowiednikiem periodogramu. Energią dyskretną transformaty falkowej na poziomie j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) nazywamy wielkość

$$E(j) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}} W_{j,k}^2. \quad (10)$$

Skalogramem nazywamy wektor energii postaci

$$(A_n^2, E(0), E(1), \dots, E(n-1)). \quad (11)$$

Jeśli przez $\|\cdot\|^2$ oznaczymy normę wektora w przestrzeni L^2 , tj.

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad \text{gdzie } v = (v_1, \dots, v_n),$$

skalogram można zapisać w postaci równoważnej jako

$$\left(\|H^n x\|^2, \|GH^{n-1}x\|^2, \dots, \|GH^2x\|^2, \|GHx\|^2, \|Gx\|^2 \right). \quad (12)$$

Jeśli w skalogramie występuje ekstremalna wartość na wysokim poziomie j , świadczy to o obecności wahań okresowych o wysokiej częstotliwości, jeśli zaś na niskim – wahania okresowe mają miejsce dla niskich częstotliwości.

3. Przykłady zastosowań w ekonomii

Jak wspomniano we Wprowadzeniu, analiza falkowa ma zastosowanie wszędzie tam, gdzie tradycyjnie stosowano analizę fourierowską, ale także w badaniach, w których zwykła analiza spektralna nie zdaje egzaminu. W szczególności falki pozwalają lepiej analizować procesy zawierające trendy deterministyczne i stochastyczne, sezonowość zmienną, załamania strukturalne czy

obserwacje nietypowe. Jak wiadomo, wiele procesów ekonomicznych – np. aktywność gospodarcza z cyklami koniunktury – charakteryzuje się wahaniami nieściśle periodycznymi; dodatkowo procesy ekonomiczne wykazują trendy i zmienność struktury. Wszystko to sprawia, że analiza falkowa ma potencjalnie dużą użyteczność w analizach ekonometrycznych.

Dwie własności falek zdają się być szczególnie użyteczne w ekonometrii: (i) ponieważ największa skala reprezentacji zawiera składniki niestacjonarne, szeregi nie muszą być różnicowane czy w inny sposób pozbawiane trendu; (ii) nieparametryczna natura falek pozwala analizować także procesy nieliniowe bez utraty informacji. Inną zaletą analizy falkowej wiąże się z tym, że proces decyzyjny w ekonomii jest ściśle zależny od horyzontu czasowego decyzji. W szczególności w naukach ekonomicznych podkreśla się wagę rozróżnienia pomiędzy długim i krótkim okresem. Jak zauważają Ramsey i Lampart (1998), klasycy ekonomii (np. J. Hicks) widzieli potrzebę wyodrębnienia większej liczby okresów czasu, a tylko względy pedagogiczne zadecydowały o popularyzacji prostej dychotomii długiego i krótkiego okresu. Możliwość wyodrębnienia większej liczby okresów (skal) dostarcza analiza wielorozdzielcza, dzięki której reprezentacje szczegółowe, odpowiadające różnym skalom, mogą być analizowane osobno i porównywane z reprezentacjami innych procesów.

Zastosowanie analizy falkowej w finansach i ekonomii zostanie zilustrowane dwoma przykładami empirycznymi dotyczącymi dekompozycji procesów ekonomicznych i badania zależności przyczynowych według różnych skal czasu. W pierwszym przykładzie analizie poddano notowania indeksu WIG20 w okresie 17.05.1999 – 20.06.2003 (1024 obserwacjeienne) wraz z odpowiednimi notowaniami syntetycznego papieru FW20. Źródłem bieżących danych dla papieru syntetycznego FW20 są notowania kontraktu terminowego FW20XX o największej liczbie otwartych pozycji. Celem analizy było ustalenie związków opóźnień i wyprzedzeń pomiędzy notowaniami na rynku spot i rynku kontraktów terminowych oraz uzyskanie odpowiedzi na pytanie: Na którym rynku tworzy się cena? W przykładzie drugim posłużono się krótkimi szeregami czasowymi (64 obserwacje miesięczne) wskaźnika inflacji bazowej i przyrostów podaży pieniądza M0 z okresu styczeń 1998 – kwiecień 2003³. Tutaj również podjęto próbę odpowiedzi na pytanie o charakter zależności przyczynowej zdekomponowanej według skal czasu.

Wstępne badanie procesów wykazało, że WIG20 i FW20 są zintegrowane rzędu 1 oraz, że ma miejsce między nimi zależność długookresowa o charakterze kointegracyjnym⁴. Natomiast dostosowane sezonowo wskaźnik inflacji oraz przyrosty podaży pieniądza okazały się procesami stacjonarnymi. W dalszych badaniach wykorzystano szeregi niedostosowane sezonowo. W Tabeli 1 za-

³ Dane zaczerpnięto ze stron internetowych: <http://www.nbp.pl> i <http://bossa.pl/notowania/daneatech/omegasupercharts>.

⁴ Statystyka śladu w teście Johansena wskazała występowanie wektora kointegracyjnego na poziomie istotności $\alpha = 1\%$.

warto wyniki estymacji modelu VEC (*Vector Error Correction*) dla WIG20 i FW20. Zgodnie z teorią Grangera obecność kointegracji świadczy o występowaniu zależności przyczynowej przynajmniej w jednym kierunku. Kierunek tej zależności jest tu jednak trudny do określenia, gdyż większość parametrów modelu VEC należy uznać za nieistotne.

Tabela 1. Wyniki estymacji modelu VEC dla FW20 i WIG20.

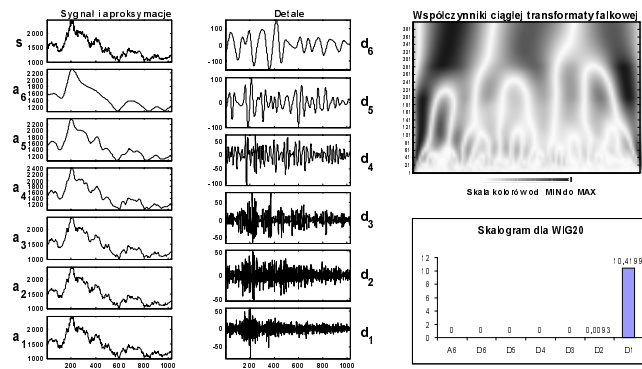
Równanie kointegrujące		
$FW20 - 1,200382WIG20 + 249,9476 = 0$ ($\pm 0,02710$)		
Model VEC		
	D(FW20)	D(WIG20)
Korekta błędem	- 0,019156 ($\pm 0,01959$)	0,020774 ($\pm 0,01917$)
D(FW20(-1))	- 0,101135 ($\pm 0,07519$)	- 0,013362 ($\pm 0,07357$)
D(WIG20(-1))	0,081826 ($\pm 0,07729$)	- 0,003324 ($\pm 0,07562$)
Const	- 0,272333 ($\pm 0,88481$)	- 0,228742 ($\pm 0,86572$)
R ²	0,0031	0,0016

Źródło: opracowanie własne

Wątpliwości nie rozwiązał również test przyczynowości w sensie Grangera dla pary WIG20 i FW20, wskazujący brak zależności przyczynowych w obu kierunkach przy liczbie opóźnień wynoszącej 2⁵. Dlatego w dalszej kolejności dokonano dekompozycji procesów według skal czasu przy przyjęciu 6-poziomowej reprezentacji procesów (przy maksymalnej możliwej w tym przypadku równej $n = \log_2 1024 = 10$). Rezultat zastosowania 6-poziomowej analizy wielorozdzielczej dla procesu WIG20 zilustrowano na Rysunku 4, zaś wyniki testów przyczynowości pomiędzy reprezentacjami zgrubnymi (A6) i szczegółowymi (D1 – D6) dla par procesów będących efektem dekompozycji według skal czasu zawiera Tabela 2. Testy Grangera rzucają więcej światła na charakter zależności przyczynowej dla badanej pary procesów. Okazuje się, że dla wahań o długich okresach (powyżej 2⁵ = 32 obserwacji) zależność przyczynowa ma charakter dwukierunkowy, zaś dla wahań krótkookresowych (pierwszy i drugi poziom detalu) ceny terminowe wyprzedzają ceny spot. Zależność przyczynowa i transmisja informacji w krótkim okresie ma więc miejsce w kierunku od rynku terminowego do rynku transakcji rzeczywistych. Wykresy na Rysunku 4 dają

⁵ Z powodu niestacjonarności procesów wnioskowanie w teście Grangera ma charakter przybliżony. Wyników testu nie przytacza się ze względu na oszczędność miejsca.

dodatkowo możliwość obserwowania notowań WIG20 na różnych poziomach rozdzielczości (A1-A6), gdzie poziom najwyższy daje najlepsze wygładzenie szeregu. Wykres współczynników ciągłej transformaty falkowej pozwala natomiast wyciągać wnioski na temat fraktalnej natury procesu.



Rys. 4. Analiza wielorozdzielcza dla WIG20. Skale 1 – 6 w przybliżeniu odpowiadają oscylacjom o okresach 2-4, 4-8, 8-16, 16-32, 32-64, 64-128.

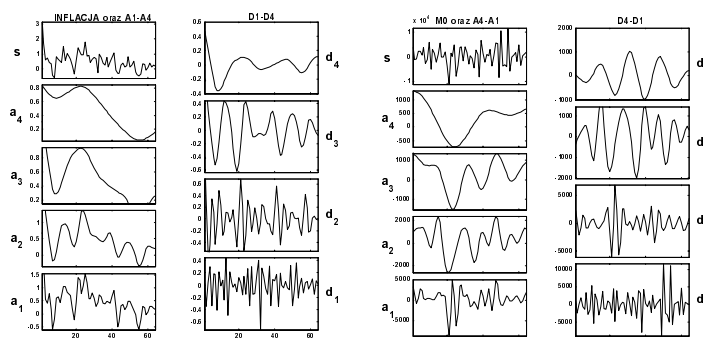
Tabela 2. Wyniki testów przyczynowości dla zdekomponowanych procesów WIG20 i FW20.

Hipoteza zerowa	Statystyka F	Poziom istotności
A6-FW20 nie jest przyczyną A6-WIG20	77,3345	0,0000
A6-FW20 jest przyczyną A6-WIG20	84,4470	0,0000
D6-FW20 nie jest przyczyną D6-WIG20	57,4774	0,0000
D6-FW20 jest przyczyną D6-WIG20	12,2121	0,0000
D5-FW20 nie jest przyczyną D5-WIG20	18,3393	0,0000
D5-FW20 jest przyczyną D5-WIG20	7,8326	0,0004
D4-FW20 nie jest przyczyną D4-WIG20	0,4063	0,6662
D4-FW20 jest przyczyną D4-WIG20	1,1093	0,3302
D3-FW20 nie jest przyczyną D3-WIG20	2,2758	0,1032
D3-FW20 jest przyczyną D3-WIG20	6,6236	0,0014
D2-FW20 nie jest przyczyną D2-WIG20	3,5203	0,0300
D2-FW20 jest przyczyną D2-WIG20	0,7229	0,4910
D1-FW20 nie jest przyczyną D1-WIG20	2,9525	0,0527
D1-FW20 jest przyczyną D1-WIG20	2,2721	0,1036

Liczbę opóźnień w równaniach testowych ustalono arbitralnie jako równą 2.
Źródło: opracowanie własne

W przykładzie drugim przeprowadzono 4-poziomą analizę wielorozdzielczą przy maksymalnym poziomie rozdzielczości $n = \log_2 64 = 6$. Wynik dekompozycji przedstawia Rysunek 5, na którym można zauważyć, że w przypadku obu szeregów wahania periodyczne zostały w większości przechwycone przez reprezentację szczegółowa na poziomie trzecim (D3), której odpowiadają

wahania o okresie 8-16, a więc również wahania sezonowe. Świadczy to o sezonowym charakterze inflacji i przyrostów podaży pieniądza. Dla pary inflacja – $\Delta M0$ przeprowadzona została analiza przyczynowości według skal czasu w sposób identyczny jak w poprzednim przykładzie. Ze względu na oszczędność miejsca wnioski z tej analizy jak również wnioski podsumowujące rozważania w niniejszym referacie zostaną zaprezentowane podczas wystąpienia.



Rys. 5. Analiza wielorozdzielcza dla wskaźnika inflacji i przyrostów M0. Skale 1 – 4 w przybliżeniu odpowiadają oscylacjom o okresach 2-4, 4-8, 8-16, 16-32.

Literatura

- Ariño, M. A., Morettin, P., Vidakovic, B. (1995), *Wavelet Scalograms and Their Application in Economic Time Series*, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, *Discussion Paper*, 95-21.
- Białasiewicz, J. T. (2000), *Falki i aproksymacje*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Daubechies, I. (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, Capital City Press, Montpellier.
- Gençay, R. F., Selçuk, F., Whitcher, B. (2002), *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press, San Diego.
- Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J.-M. (1996), *Wavelet Toolbox For Use with MATLAB®*, The MathWorks.
- Percival, D. B., Walden, A. T. (2000), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ramsey, J. B. (1999), The Contribution of Wavelets to the Analysis of Economic and Financial Data, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, 357, 2593-2606.
- Ramsey, J. B., Lampart, C. (1998), The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 3(1), 23-42.
- Schleicher, Ch. (2002), An Introduction to Wavelets for Economists, *Working Paper*, 2002-3, Bank of Canada.
- Talaga, L., Zieliński, Z. (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.