

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Liliana Talaga
Uniwersytet Szczeciński

Predyktory procesów niestacjonarnych regularnych ARIMA

1. Ogólny niestacjonarny proces regularny

W artykule przedstawiono porównanie własności stochastycznych niestacjonarnych procesów regularnych ARIMA(p,k,q) i jego predyktorów za pomocą charakterystyk częstościowych: funkcji przyrostu i funkcji kąta fazowego.

Ogólnym modelem generującym *regularne procesy stacjonarne* X_t jest równanie różnicowe:

$$\sum_{s=0}^p \delta_s \cdot X_{t-s} = \sum_{r=0}^q \gamma_r \cdot \varepsilon_{t-r}, \quad (1.1)$$

gdzie:

δ_s, γ_r - stałe rzeczywiste (wagi),

ε_t - biały szum.

Korzystając z operatorów równanie (1.1) można zapisać:

$$B(U) \cdot X_t = C(U) \cdot \varepsilon_t, \quad (1.2)$$

gdzie:

$B(U)$ - stacjonarny operator autoregresji rzędu p,

$$B(U) = 1 - \beta_1 \cdot U - \beta_2 \cdot U^2 - \dots - \beta_p \cdot U^p, \quad (1.3)$$

$$-\beta_s = \delta_s,$$

U – operator przesunięcia wstecz (cofania),

$$U^s \cdot X_t = X_{t-s}, \quad (1.4)$$

$C(U)$ – operator średniej ruchomej rzędu q ,

$$C(U) = 1 + \gamma_1 \cdot U + \gamma_2 \cdot U^2 + \dots + \gamma_q \cdot U^q. \quad (1.5)$$

Proces postaci (1.2) nosi nazwę procesu ARMA(p, q). Proces ten jest stacjonarny, jeżeli wszystkie pierwiastki równania $B(U) = 0$ leżą na zewnątrz okręgu jednostkowego i jest odwracalny, jeżeli pierwiastki równania $C(U) = 0$ leżą w obszarze $|U| > 1$.

Procesy niestacjonarne ewolucyjne można przedstawić za pomocą uogólnionego operatora autoregresji $B^*(U)$ takiego, że k pierwiastków równania $B^*(U) = 0$ jest równych jedności, a pozostałe leżą poza okręgiem jednostkowym.

$$B^*(U) = \Delta^k \cdot B(U), \quad (1.6)$$

gdzie:

$B^*(U)$ – niestacjonarny operator autoregresji rzędu $p + k$,

$$B^*(U) = 1 - \beta_1^* \cdot U - \beta_2^* \cdot U^2 - \dots - \beta_{p+k}^* \cdot U^{p+k}, \quad (1.7)$$

Δ – operator różnicy¹,

$$\Delta \cdot X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - U) \cdot X_t, \quad (1.8)$$

$$\Delta^n \cdot X_t = \Delta^{n-1} \cdot X_t - \Delta^{n-1} \cdot X_{t-1} = (1 - U)^n \cdot X_t. \quad (1.9)$$

Ogólny niestacjonarny proces regularny, zwany uogólnionym procesem mieszonym autoregresji i średniej ruchomej ARIMA rzędu (p, k, q), jest następujący:

$$X_t - \beta_1^* \cdot X_{t-1} - \dots - \beta_{p+k}^* \cdot X_{t-p-k} = \varepsilon_t + \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_q \cdot \varepsilon_{t-q}, \quad (1.10)$$

$$B^*(U) \cdot X_t = B(U) \cdot \Delta^k \cdot X_t = C(U) \cdot \varepsilon_t, \quad (1.11)$$

¹ Operatory różnicy Δ i cofania U są liniowe, łączy je zależność: $\Delta = 1 - U$.

$$\Pi^*(U) \cdot X_t = \varepsilon_t, \quad (1.12)$$

gdzie:

$\Pi^*(U)$ - niestacjonarny operator autoregresji rzędu nieskończonego,

$$\Pi^*(U) = 1 - \pi_1^* \cdot U - \pi_2^* \cdot U^2 - \dots \quad (1.13)$$

$$\Pi^*(U) = \frac{B^*(U)}{C(U)}. \quad (1.14)$$

Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $C(U) = 0$ leżą na zewnątrz okręgu jednostkowego, to operator $\Pi^*(U)$ spełnia warunek:

$$C(U) \cdot \Pi^*(U) = B^*(U). \quad (1.15)$$

Model ARIMA(p,k,q) generuje takie procesy, których k – ta różnica jest stacjonarnym procesem regularnym.

2. Predyktor procesu ARIMA(p,k,q)

Zgodnie z (1.12) proces ARIMA(p,k,q) można przedstawić:

$$X_t = \pi_1^* \cdot X_{t-1} + \pi_2^* \cdot X_{t-2} + \dots + \varepsilon_t. \quad (2.1)$$

Podstawiając za wskaźnik $s = t + h$, otrzyma się równanie, które jest podstawą budowy predyktora procesu dla wyprzedzenia h , $h = 1, 2, \dots, H$:

$$X_{t+h} = \pi_1^* \cdot X_{t+h-1} + \pi_2^* \cdot X_{t+h-2} + \dots + \varepsilon_{t+h}. \quad (2.2)$$

Najlepszy średniokwadratowy *predyktor składowej regularnej* dla wyprzedzenia h określony jest wzorem²:

$$\hat{X}_{t+h} = \pi_1^* \cdot \hat{X}_{t+h-1} + \pi_2^* \cdot \hat{X}_{t+h-2} + \dots + \hat{\varepsilon}_{t+h}, \quad (2.3)$$

gdzie:

² Por. Zadora (1980), rozdz. 5.

$$\begin{aligned}\hat{X}_s &= X_s, \quad \text{gdy } s \leq t, \\ \hat{\varepsilon}_{t+h} &= 0.\end{aligned}$$

Równoważną postacią do (2.3) jest

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t+h} &= \beta_1^* \cdot \hat{X}_{t+h-1} + \beta_2^* \cdot \hat{X}_{t+h-2} + \dots + \beta_{p+k}^* \cdot \hat{X}_{t+h-(p+k)} + \\ &+ \varepsilon_{t+h} + \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t+h-1} + \dots + \gamma_q \cdot \varepsilon_{t+h-q},\end{aligned}\quad (2.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\hat{X}_s &= X_s, & \text{dla } s \leq t \\ \hat{\varepsilon}_s &= \begin{cases} 0, & \text{dla } s > t \\ \varepsilon_s, & \text{dla } s \leq t. \end{cases}\end{aligned}$$

Błąd predyktora $\delta_t(h)$ określa równanie:

$$\delta_t(h) = x_{t+h} - \hat{x}_t(h), \quad (2.5)$$

gdzie:

x_{t+h} - wartość rzeczywista szeregu czasowego w okresie prognozowanym;

$\hat{x}_t(h)$ - prognoza wykonana w momencie t z wyprzedzeniem h ;

h - wyprzedzenie szeregu czasowego (horyzont predykcji), $h = 1, 2, \dots, H$.

Błąd predyktora (2.5) można również zapisać:

$$\delta_t(h) = \pi_1^* \cdot \delta_t(h-1) + \pi_2^* \cdot \delta_t(h-2) + \pi_{h-1}^* \cdot \delta_t(1) + \varepsilon_{t+h}. \quad (2.6)$$

Ze wzoru (2.6) wynika, że:

$$\delta_t(1) = \varepsilon_{t+1}$$

$$\delta_t(2) = \pi_1^* \cdot \delta_t(1) + \varepsilon_{t+2} = \varepsilon_{t+2} + \pi_1^* \cdot \varepsilon_{t+1}$$

$$\delta_t(3) = \pi_1^* \cdot \delta_t(2) + \pi_2^* \cdot \delta_t(1) + \varepsilon_{t+3} = \varepsilon_{t+3} + \pi_1^* \cdot \varepsilon_{t+2} + (\pi_1^{*2} + \pi_2^*) \cdot \varepsilon_{t+1}$$

$$\delta_t(4) = \varepsilon_{t+4} + \pi_1^* \cdot \varepsilon_{t+3} + (\pi_1^{*2} + \pi_2^*) \cdot \varepsilon_{t+2} + (\pi_1^{*3} + 2 \cdot \pi_1^* \cdot \pi_2^* + \pi_3^*) \cdot \varepsilon_{t+1}$$

itd.

Z rozważań tych wynika, że błąd predyktora można zapisać w postaci:

$$\delta_t(h) = \varphi_0^* \cdot \varepsilon_{t+h} + \varphi_1^* \cdot \varepsilon_{t+h-1} + \dots + \varphi_{h-1}^* \cdot \varepsilon_{t+1}. \quad (2.7)$$

Związek zachodzący między parametrami π_w^* a φ_w^* otrzyma się, jeśli relacje (2.6) i (2.7) zapisze się za pomocą operatora cofanie U. Stąd:

$$(1 - \pi_1^* U - \dots - \pi_{h-1}^* U^{h-1}) \cdot \delta_t(\mathbf{h}) = \varepsilon_{t+h}, \quad (2.8)$$

$$(\varphi_0^* + \varphi_1^* U + \dots + \varphi_{h-1}^* U^{h-1}) \cdot \varepsilon_{t+h} = \delta_t(\mathbf{h}), \quad (2.9)$$

czyli

$$(1 - \pi_1^* U - \dots - \pi_{h-1}^* U^{h-1}) (\varphi_0^* + \varphi_1^* U + \dots + \varphi_{h-1}^* U^{h-1}) = 1. \quad (2.10)$$

Współczynniki φ_w^* spełniają równanie różnicowe:

$$\begin{aligned} \varphi_w^* &= \pi_1^* \cdot \varphi_{w-1}^* + \pi_2^* \cdot \varphi_{w-2}^* + \dots + \pi_w^* \cdot \varphi_0^*, \\ &w = 1, 2, \dots, h-1 \\ \varphi_0^* &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Średniokwadratowy błąd predyktora składowej regularnej jest równy:

$$\text{var}[\delta_t(\mathbf{h})] = \sigma_\varepsilon^2 [1 + (\varphi_1^*)^2 + (\varphi_2^*)^2 + \dots + (\varphi_{h-1}^*)^2]. \quad (2.12)$$

Ogólna postać predyktora procesu ARIMA(p,k,q) jest następująca:

$$\hat{x}_{t+h} = f_h^* X_t + \sum_{r=1}^{p+k-1} \sum_{s=1}^{p+k-r} f_{h-s}^* \beta_{s+r}^* X_{t-r} + \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{r=1}^q f_{h-r}^* \gamma_{r+s} \varepsilon_{t-s}, \quad (2.13)$$

gdzie parametry f_i^* wiąże z parametrami β_s^* równanie:

$$\begin{aligned} f_i^* &= \beta_1^* f_{i-1}^* + \beta_2^* f_{i-2}^* + \dots + \beta_i^* f_0^*, \\ &i = 1, 2, \dots \\ f_0^* &= 1, \quad f_{-k}^* = 0, \\ \beta_i^* &= 0 \quad \text{dla } i > p+k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Błąd predyktora procesu ARIMA(p,k,q) jest równy

$$\delta_t(\mathbf{h}) = \sum_{w=0}^{h-1} \varphi_w^* \varepsilon_{t+h-w}, \quad (2.15)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varphi_w^* &= \sum_{r=0}^w f_{w-r}^* \gamma_r, \\ \gamma_r &= 0 \quad \text{dla } r > q, \\ f_{-k}^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. Spektralna prezentacja procesu ARIMA(p,k,q)

Jeżeli proces stochastyczny X_t będzie się traktować jako wyjście filtru liniowego z operatorem L , na wejściu którego jest biały szum ε_t :

$$X_t = L \cdot \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

to proces stochastyczny będzie mieć następującą prezentację spektralną:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) \cdot e^{i\omega t} dZ_{\varepsilon}(\omega), \quad (3.2)$$

$$t = 0, \pm 1, \dots$$

gdzie:

$H(\omega)$ - funkcja częstości reakcji zwana transmitancją lub *funkcją transferową*,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ_{\varepsilon}(\omega) - \text{postać zespolona } \varepsilon_t.$$

Sumacyjne filtry liniowe niezmiennie w czasie³ mają własność, że każdy stacjonarny proces wejściowy przekształcają w stacjonarny proces wyjściowy. Funkcję transferową wygodnie jest przedstawić w postaci zespolonej:

$$H(\omega) = G(\omega) \cdot e^{-i\phi(\omega)}, \quad (3.3)$$

gdzie:

$$G(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} H(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} H(\omega)]^2}, \quad (3.4)$$

moduł $H(\omega)$ będący charakterystyką amplitudową, zwany jest *funkcją przyrostu*;

$$\phi(\omega) = \arg H(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} H(\omega)}{\operatorname{Re} H(\omega)}, \quad (3.5)$$

³ Sumacyjne filtry liniowe niezmiennie w czasie to filtry postaci: $Y_t = LX_t = \sum_{s=-p}^q h_s X_{t-s}$,
 $t = 0, \pm 1, \dots$; $p, q > 0$; h_s - rzeczywiste; $\sum_{s=-p}^q h_s^2 < \infty$, które mają własność liniowości:
 $L(\alpha X_{1t} + \beta X_{2t}) = \alpha LX_{1t} + \beta LX_{2t}$ i niezmienniczości w czasie, tj. jeżeli $LX_t = Y_t$, wtedy
 $LX_{t+r} = Y_{t+r}$ dla każdej liczby r . Por. Talaga, Zieliński (1986), § 1.5.

argument $H(\omega)$ będący charakterystyką fazową, zwany jest *funkcją kąta fazowego*.

Podstawiając (3.3) do (3.2) otrzyma się:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) \cdot e^{i[\omega t - \phi(\omega)]} dZ_{\varepsilon}(\omega). \quad (3.6)$$

Wyrażenie (3.6) wskazuje, że odpowiedzią procesu wejściowego o częstotliwości ω jest wyjście o tej samej częstotliwości, lecz zważone w amplitudzie przez czynnik $G(\omega)$ oraz przesunięte w fazie o wielkość $\phi(\omega)$, czyli filtracja stacjonarnych procesów stochastycznych modyfikuje amplitudę składowych harmonicznych procesu oraz powoduje przesunięcie fazowe tych składowych.

Uważa się, że filtr jest kompletnie sprecyzowany, jeżeli znane są funkcja przyrostu i funkcja kąta fazowego.

Parametr

$$\tau(\omega) = \frac{\phi(\omega)}{\omega}, \quad \omega \neq 0 \quad (3.7)$$

mierzy przesunięcie fazy w jednostce czasu i zwany jest *funkcją przesunięcia czasu*. Filtr L przesuwają pierwotny czas harmoniki w częstotliwości ω o $\tau(\omega)$ jednostek czasu.

Proces ARIMA(p,k,q) można traktować jako wyjście X_t filtru liniowego z operatorem $\Pi^*(U)$, na wejściu którego jest biały szum ε_t .

Spektralna prezentacja procesu ARIMA(p,k,q) ma postać:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} F^*(\omega) dZ_{\varepsilon}(\omega), \quad (3.8)$$

gdzie funkcja transferowa $H(\omega) = F^*(\omega)$ jest równa:

$$F^*(\omega) = \frac{C(\omega)}{B^*(\omega)} = \frac{\sum_{r=0}^q \gamma_r e^{-i\omega r}}{\sum_{s=0}^{p+k} (-\beta_s^*) e^{-i\omega s}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^* e^{-i\omega j}, \quad (3.9)$$

a współczynniki φ_j^* są określone równaniem:

$$\begin{aligned} \varphi_i^* &= \gamma_i + \beta_1^* \cdot \varphi_{i-1}^* + \beta_2^* \cdot \varphi_{i-2}^* + \dots + \beta_{p+k}^* \cdot \varphi_{i-(p+k)}^*, \\ & i = 1, 2, \dots \\ \varphi_0^* &= 1; \quad \varphi_{-k}^* = 0; \\ \gamma_i &= 0 \quad \text{dla } i > q. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na przykład dla procesu ARIMA(0,1,q) otrzymano:

$$\varphi_w^* = (\beta_1^* + \gamma_1) \cdot \beta_1^{*(w-1)} \quad (3.11)$$

i wariancję błędu predyktora równą

$$\text{var}[\delta_t(h)] = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \sum_{w=1}^{h-1} (\beta_1^* + \gamma_1)^2 \cdot \beta_1^{*2(w-1)} \right]. \quad (3.12)$$

Wzór (3.12) wskazuje, że wariancja błędu predyktora zwiększa się wraz z wydłużaniem horyzontu predykcji.

Predyktor (2.16) można przedstawić w równoważnej postaci:

$$\hat{x}_{t+h} = \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_{h+w}^* \varepsilon_{t-w}. \quad (3.13)$$

Spektralne przedstawienie predyktora (3.13) ma postać:

$$\hat{x}_{t+h} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \left\{ e^{i\omega h} [F^*(\omega) - F_h^*(\omega)] \right\} dZ_\varepsilon(\omega), \quad (3.14)$$

gdzie

$$F^*(\omega) - F_h^*(\omega) = \varphi_h^* e^{-ih\omega} + \varphi_{h+1}^* e^{-i(h+1)\omega} + \dots \quad (3.15)$$

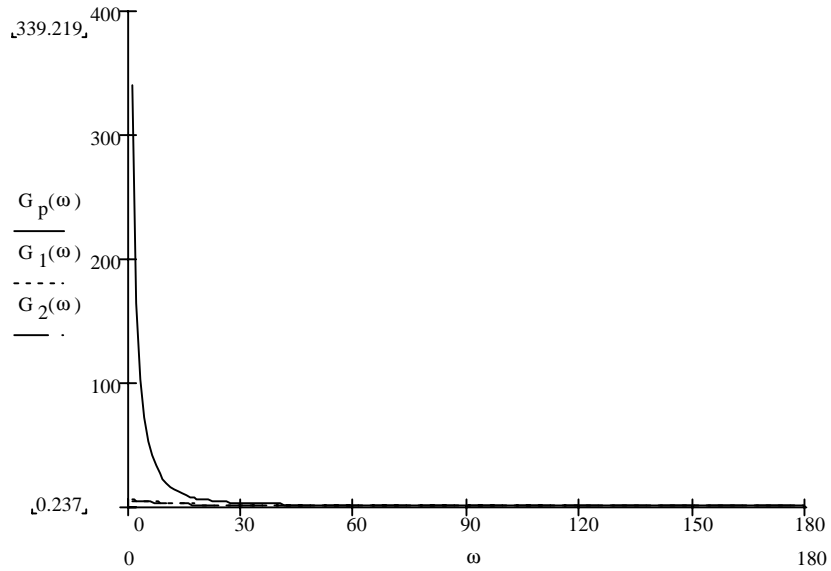
Funkcja transferowa predyktora (3.13) jest równa

$$H_h^*(\omega) = \sum_{s=h}^{\infty} \varphi_s^* e^{-i(s-h)\omega} \quad (3.16)$$

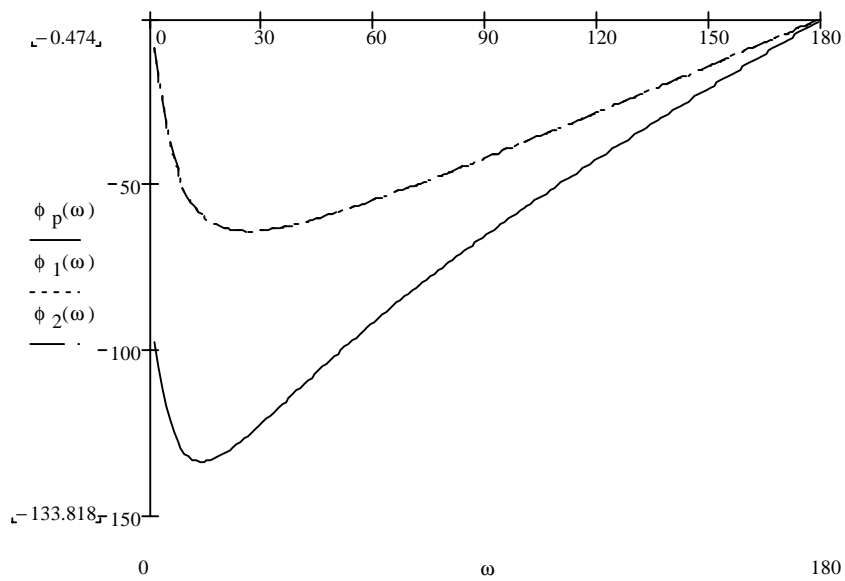
a funkcja przejścia predyktora procesu ARIMA(p,k,q):

$$|H_h^*(\omega)|^2 = \left[\sum_{s=h}^{\infty} \varphi_s^* \cos(s-h)\omega \right]^2 + \left[\sum_{s=h+1}^{\infty} \varphi_s^* \sin(s-h)\omega \right]^2. \quad (3.17)$$

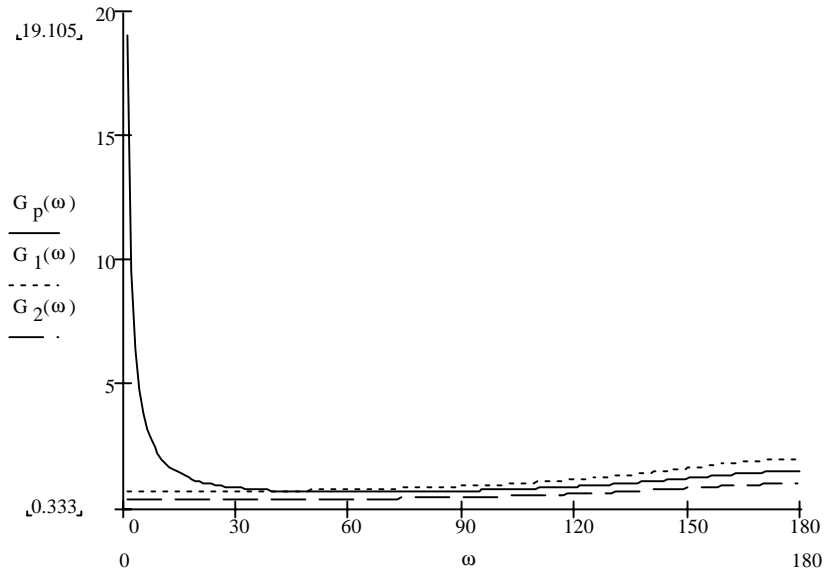
Przeprowadzono porównanie funkcji przyrostu $G(\omega)$ i funkcji kąta fazowego $\phi(\omega)$ uogólnionego procesu mieszanego autoregresji i średniej ruchomej ARIMA rzędu (1,1,1) oraz jego predyktora dla wybranych wartości parametrów β oraz γ .



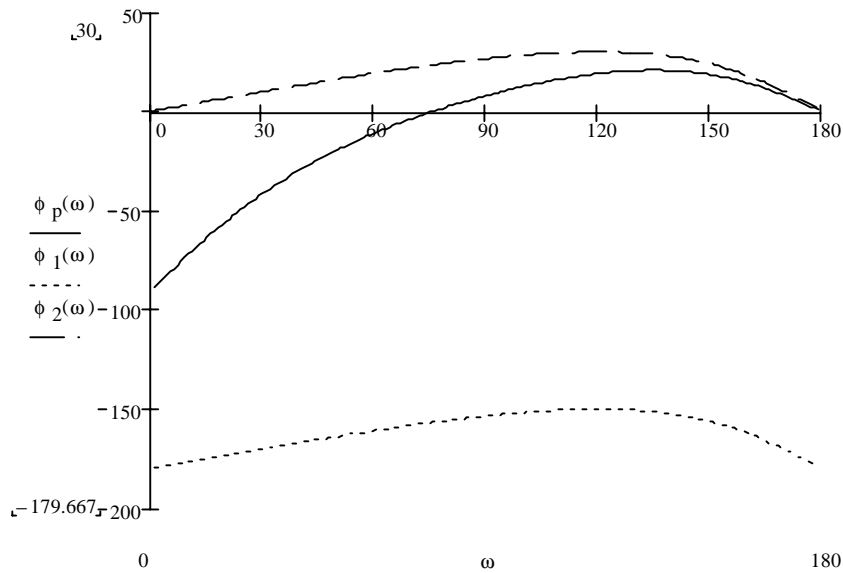
Wykres 3.1. Funkcja przyrostu procesu $G_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (G_1) i $h = 2$ (G_2), $\beta_1 = 0.9$; $\gamma_1 = -0.4$.



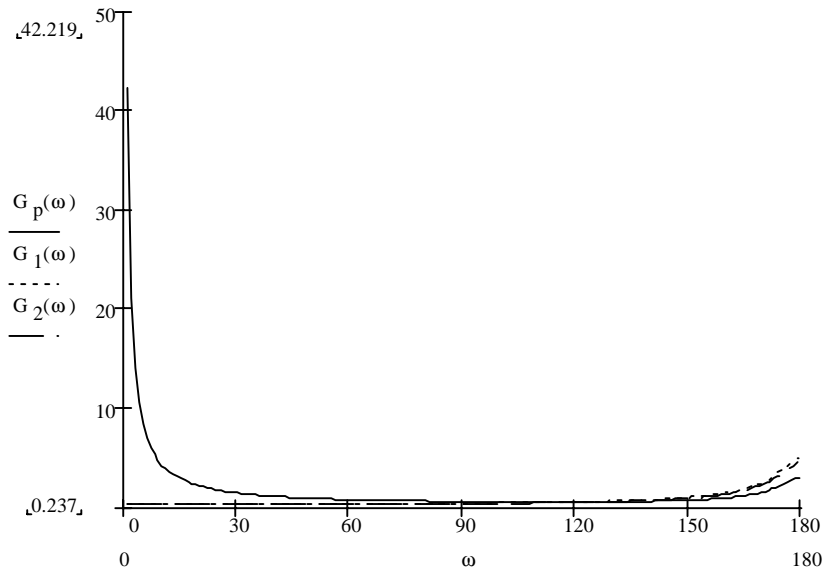
Wykres 3.2. Funkcja kąta fazowego procesu $\phi_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (ϕ_1) i $h = 2$ (ϕ_2), $\beta_1 = 0.9$; $\gamma_1 = -0.4$.



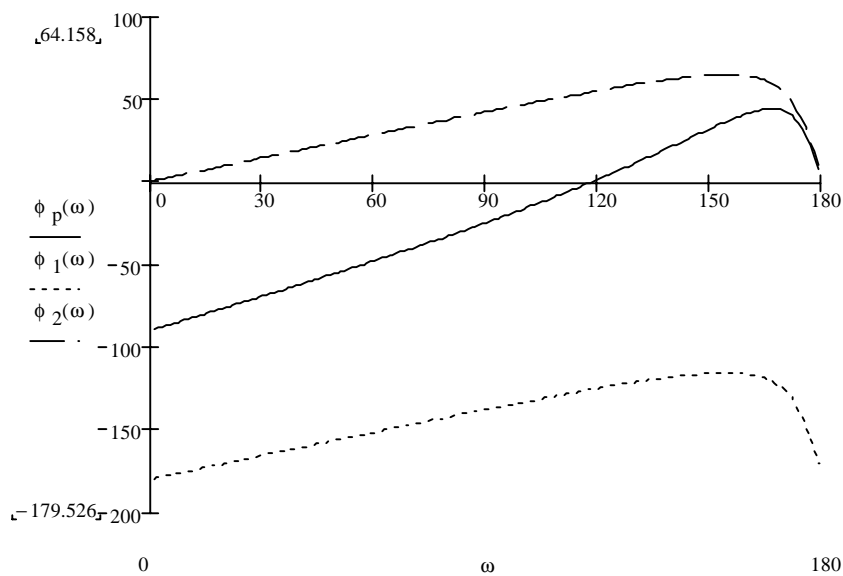
Wykres 3.3. Funkcja przyrostu procesu $G_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h=1$ (G_1) i $h=2$ (G_2), $\beta_1 = -0,5$; $\gamma_1 = -0,5$.



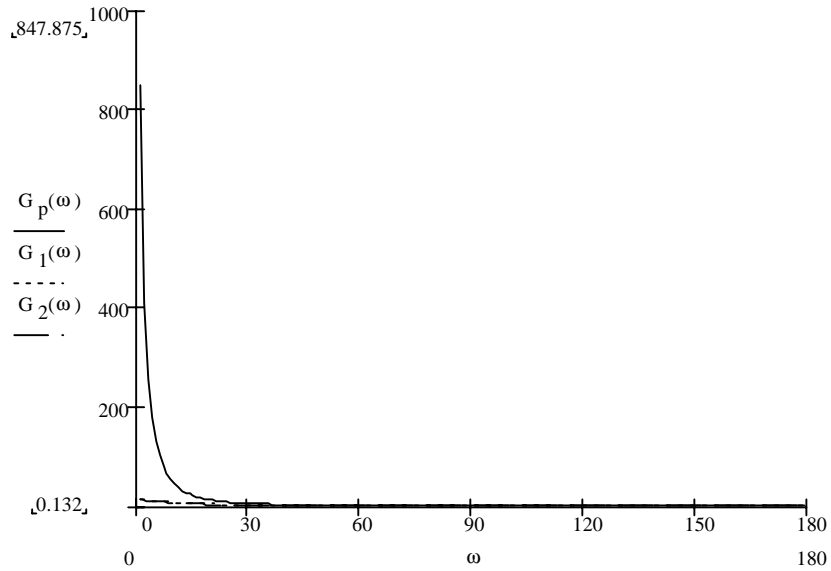
Wykres 3.4. Funkcja kąta fazowego procesu $\phi_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h=1$ (ϕ_1) i $h=2$ (ϕ_2), $\beta_1 = -0,5$; $\gamma_1 = -0,5$.



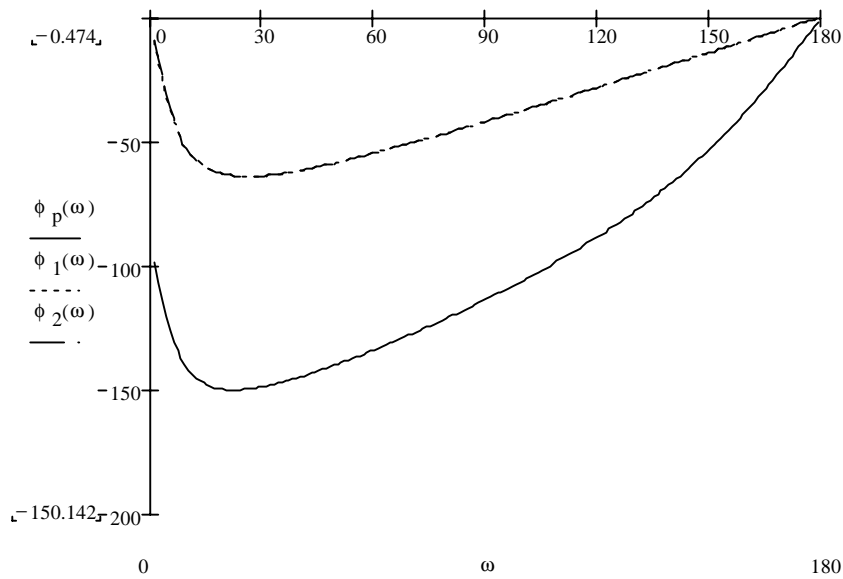
Wykres 3.5. Funkcja przyrostu procesu $G_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (G_1) i $h = 2$ (G_2), $\beta_1 = -0,9$; $\gamma_1 = 0,4$.



Wykres 3.6. Funkcja kąta fazowego procesu $\phi_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (ϕ_1) i $h = 2$ (ϕ_2), $\beta_1 = -0,9$; $\gamma_1 = 0,4$.



Wykres 3.7. Funkcja przyrostu procesu $G_p(\omega)$ oraz predyktor procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (G_1) i $h = 2$ (G_2), $\beta_1 = 0,9$; $\gamma_1 = 0,5$.



Wykres 3.8. Funkcja kąta fazowego procesu $\phi_p(\omega)$ oraz predyktora procesu ARIMA(1,1,1) dla $h = 1$ (ϕ_1) i $h = 2$ (ϕ_2), $\beta_1 = 0,9$; $\gamma_1 = 0,5$.

Wartości funkcji przyrostu $G_p(\omega)$ procesu ARIMA(1,1,1) wskazują, że filtr tego procesu przepuszcza w wysokim stopniu składowe niskich częstotliwości dla różnych wartości parametrów β_1 i γ_1 . Filtr ten tłumi prawie całkowicie składowe pozostałych częstotliwości.

W przypadku, gdy $\beta_1 > 0$, filtr tłumi całkowicie składowe pozostałych częstotliwości. Jeśli $\beta_1 < 0$, filtr przepuszcza w nieznacznym stopniu składowe wysokich częstotliwości, gdy $\gamma_1 > 0$; a w stopniu znacznym, gdy $\gamma_1 < 0$.

Funkcja przyrostu $G_h(\omega)$ predyktora procesu ARIMA(p,1,q) ma podobny przebieg do przebiegu $G_p(\omega)$ procesu ARIMA(p,1,q). Funkcja przyrostu predyktora dla różnych wyprzedzeń ma prawie identyczne wartości.

Przesunięcie fazy $\phi(\omega)$ predyktora procesu ARIMA(p,1,q) jest odmienne od przesunięcia fazy procesu ARIMA(p,1,q). Dla dodatnich wartości parametrów β i γ przesunięcie fazy zmienia na przemian kierunek, ale amplituda wahań jest prawie jednakowa w całym przedziale częstotliwości. Dla kolejnych wyprzedzeń okresów predykcji, funkcja kąta fazowego predyktora jest różna.

Z powyższych spostrzeżeń można wywnioskować, że jeżeli filtr procesu ARIMA(p,1,q) przepuszcza w wysokim stopniu składowe niskich częstotliwości a tłumi pozostałe składowe, to predyktory wahań długookresowych będą efektywniejsze od predyktorów wahań krótkookresowych. Jeśli natomiast filtr procesu przepuszcza również składowe wysokich częstotliwości, to efektywność predyktorów wahań długookresowych i krótkookresowych będzie jednakowa.

Na efektywność predyktorów wpływ mają również przesunięcia fazy. Im przesunięcia fazy predyktora będą bardziej odbiegać od przesunięcia fazy procesu, tym efektywność predyktorów będzie niższa.

Literatura:

- Talaga, L., Zieliński, Z. (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- Zadora, K. (1980), *Ekonometryczna ekstrapolacja szeregów czasowych*, Prace Naukowe, Akademia Ekonomiczna, Katowice.