DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Józef Stawicki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Przełącznikowe modele Markowa

1. Wstęp

Jedną z klas modeli niestacjonarnych procesów stochastycznych są przełącznikowe modele łańcuchów Markowa (Markov Switching Models –MS modele).
Model MS zadany jest formułą

$$y_t = \begin{cases} y_{1t} & gdy \quad s_t = 1 \\ y_{2t} & gdy \quad s_t = 2 \\ \vdots & \\ y_{rt} & gdy \quad s_t = r \end{cases}$$

gdzie s_t jest realizacją jednorodnego łańcucha Markowa S_t o r stanach, zadanego macierzą przejścia $P = [p_{ij}]_{r \times r}$. Klasy procesów MS otrzymujemy czyniąc odpowiednie założenia o procesach cząstkowych y_{it}. W przypadku gdy y_{it} są zmiennymi losowymi o rozkładach na dyskretnych przestrzeniach używa się nazwy Ukryte Łańcuchy Markowa (Hidden Markov Model – HMM).

Szczególnego znaczenia metoda zyskała przy modelowaniu i analizie finansowych szeregów czasowych czy to dotyczących kursów na rynku kapitałowym czy też szeregów kursów walutowych. Istnienie okresów wzrostu i spadku wymusza przyjęcia niestacjonarnego charakteru procesów. Idea modeli MS związana jest ściśle z mieszankami rozkładów. Zainteresowanie tymi modelami podyktowane jest koniecznością przyjęcia faktu, że rozkłady stóp zwrotu są asymetryczne z tak zwanymi grubymi ogonami. Podstawowym założeniem w modelach MS jest nieobserwowalność stanów łańcucha Markowa przełączającego proces miedzy reżimami.

2. Modele

Najprostszym modelem jest przytoczony przez Millsa (por. Mills (1993)) model postaci

$$y_t = z_t + u_t . \qquad (1)$$

Niestacjonarny składnik z_t jest procesem błądzenia przypadkowego i opisany jest równaniem

$$z_t = \mu(S_t) + z_{t-1}, \qquad (2)$$

gdzie

$$\mu(S_t) = a_0 + a_1 S_t \qquad (3)$$

W modelu tym przez S_t oznaczono stan łańcucha Markowa przybierającego wartość 0 lub 1 i opisanego macierzą przejścia

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{22} & p_{22} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

O składniku u_t zakłada się, że jest postaci AR(*p*) bądź częściej, że jest procesem n.i.d.

Tak postawiony problem uwzględnia zmianę średniej procesu. Poziomy tej średniej osiągane są losowo. Przełączanie między średnimi następuje poprzez macierz P.

Rozwinięciem idei jest proponowany przez Hamiltona (por. Hamilton (1994)) model postaci

$$y_t = c_{S_t} + \Phi_{S_t} y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (5)$$

gdzie S_t są stanami nieobserwowanego łańcucha Markowa o *N* stanach a Φ_{S_t} oraz c_{S_t} są parametrami związanymi z reżimem. Model ten w konsekwencji opisuje zmiany średniej wartości według reżimów dla procesu autoregresyjnego. Jeśli model ten przedstawimy w postaci

$$y_t = c_{S_t} + \Phi_{S_t} x_t + \varepsilon_t \qquad (6)$$

to mamy do czynienia z modelem regresji przełącznikowej (por. Pruska (1996)).

W przypadku zależności autoregresyjnej wyższego rzędu, model (5) można rozwinąć do postaci

$$\begin{aligned} y_t - \mu_{S_t} &= \phi_1(y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) + \phi_2(y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}) + \ldots \\ &\ldots + \phi_q(y_{t-q} - \mu_{S_{t-q}}) + \varepsilon_t \end{aligned} . \qquad (7)$$

Przyjmując założenie, że y_t, μ_{s_t} oraz ε_t są procesami wektorowymi formuła (7) jest podstawą rozważania modeli VAR przełączanych łańcuchem markowa (MS-VAR) (por. Krolzig (2001)). W modelu takim możliwe jest wykorzystanie łańcuchów Markowa wielokrotnie wiązanych.

Kolejne wersję modelu przełącznikowego przedstawia równanie (por. Yin (2003))

$$y_{t+1} = G_t + V_t \varepsilon_{t+1}, \tag{8}$$

gdzie ε_t jest procesem i.i.d. o standaryzowanym rozkładzie normalnym, G_t oraz V_t jest odpowiednio średnią i wariancją procesu. Parę (G_t, V_t) traktuje się jako zmienną losową z realizacjami (g_t, v_t) odpowiadającymi stanom łańcucha Markowa o macierzy przejścia $P = [p_{ij}]_{N\times N}$. Model ten tworzy mieszankę rozkładów i w przypadku łańcucha regularnego parametrami mieszającymi są prawdopodobieństwa rozkładu ergodycznego.

3. Estymacja

Modele opisane powyższymi formułami opierają się o zadaną warunkową funkcję gęstości $f\left(y_t \middle| S_t = s_t; \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right)$, gdzie $\overline{\alpha}$ jest wektorem parametrów tego rozkładu a Ψ_t zbiorem obserwacji do momentu t i nieobserwowany ciąg zmiennych losowych S_t spełniających warunek $\Pr\left(S_t = j \middle| S_{t-1} = i\right) = p_{ij}$. Funkcję gęstości rozkładu brzegowego y_t można zapisać w postaci $f\left(y_t \middle| \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right) = \sum_{s_t=1}^{N} f\left(y_t, s_t \middle| \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right)$. Warunkowy rozkład zmiennej S_t można przedstawić w postaci ilorazu łącznej funkcji gęstości y_t i s_t przez funkcję gęstości rozkładu brzegowego

$$\Pr\left(S_t = s_t \middle| \Psi_t; \overline{\alpha}\right) = \frac{f\left(y_t, s_t \middle| \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right)}{f\left(y_t \middle| \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right)}. \tag{9}$$

Powiązanie zmiennych losowych S_t macierzą przejścia z elementami p_{ij} pozwala zapisać podstawowy warunek w postaci

$$\Pr\left(S_{t+1} = j \middle| \Psi_t; \overline{\alpha}\right) = \sum_{i=1}^{T} p_{ij} \cdot \Pr\left(S_t = i \middle| \Psi_t; \overline{\alpha}\right). \tag{10}$$

Znane metody estymacyjne wykorzystują metodę największej wiarygodności

$$L(\overline{\alpha}) = \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t \middle| \Psi_{t-1}; \overline{\alpha}\right). \tag{11}$$

W literaturze najczęściej wykorzystywanym algorytmem maksymalizacji funkcji wiarygodności przedstawionej wyżej jest algorytm EM (Expectations Maximization) (por. Hamilton (1994)). Idea polega na wyznaczeniu wygładzonych prawdopodobieństw przebywania w danym reżimie a następnie iteracyjnego postępowania dla znalezienia maksimum funkcji wiarygodności.

Funkcja ta może mieć wiele maksimów lokalnych, dlatego konieczne jest wielokrotne badanie przy różnych warunkach początkowych.

4. Zastosowania

Jak już wspomniano we wstępie, rozwój badań nad modelami MS podyktowany był obserwacjami niestacjonarności w procesach finansowych oraz asymetrycznością w rozkładach tychże zmiennych. Pierwsze prace Hamiltona (por. Hamilton (1989)) dotyczyły jednak analizy wzrostu gospodarczego mierzonego poziomem dochodu narodowego w kolejnych kwartałach (GNP). Rozważany był łańcuch o dwóch stanach. Przyjęte reżimy oznaczają wzrost gospodarczy oraz regres. Posługiwanie się modelem MS daje możliwość oceny średniego czasu pozostawania w fazie wzrostu i fazie regresu. Nurt tych badań był kontynuowany w pracach Krolziga[1] (por. Krolzig (1998)) czy Psaradakisa (por. Psaradakis (2002)). Szczególnego znaczenia nabiera analiza asymetryczności cykli gospodarczych (por. Clements, Krolzig (2000)). Także w badaniach szeregów finansowych asymetryczność i warunkowa heteroskedastyczność jest przedmiotem badania przy pomocy modeli MS. Modele MS służą nie tylko opisowi sytuacji ekonomicznej i jej lepszemu poznaniu ale także prognozowaniu. Ma to szczególne znaczenie na rynkach walutowych Pytanie o możliwość prognozy stawia wielu autorów (por. Engel (1994), Dueker, Neely (2002)). W polskiej literaturze przedmiotu modele MS wykorzystane zostały do analizy odpowiedzi w testach koniunktury (por. Decewicz (2001)). Ze względy na jakościowy charakter odpowiedzi i jednocześnie założenie o normalności rozkładu zmiennych w badanym procesie do analizy użyta została dynamika salda odpowiedzi. Drugim modelem prezentowanym w cytowanej pracy jest model rozkładu liczebności. Należy on do grupy modeli HMM

5. Zakończenie

Zaprezentowane modele są propozycją na pojawiające się trudności w modelowaniu szeregów czasowych. Większość szeregów ekonomicznych charakteryzuje się niestacjonarnością. Modele MS nie rozwiązuję wszystkich problemów ale jako proste narzędzie przyczyni się do lepszej znajomości procesów ekonomicznych. Do ich powszechności przyczyni się niewątpliwie dostępność programów obliczeniowych wykorzystujących znane algorytmy estymacyjne[2].

[1] Przeanalizowany został model Hamiltona pod kątem VAR.

[2] pakietem takim jest MSVAR for Ox, www.economics.ox.ac.uk/hendry/krolzig

Literatura

Clements, M. P., Krolzig, H. M. (2000), Busines Cycle Asymetries:Characterisation and Testing based on Markov-Switching Autoregression, www.economics.ox.ac.uk.

Decewicz, A. (2001), *Przełącznikowe modele Markowa w analizie danych jakościowych i wybrane metody ich estymacji*, SGH, niepublikowane prace własne Nr 03/E/0004/01, Warszawa.

Dueker, M., Neely, C. J. (2002), Can Markov Switching Models Predict Excess Foreign Exchange Returns?, Working Paper.

Engel, C. (1994), Can the Markov switching model forecast exchange rates?, *Journal of International Economics* 36.

Hamilton, J. D. (1989), A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Busines Cycle, *Econometrica* 57, s. 357-384.

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis,* Princeton University Press.

Krolzig, H. M. (1998), Econometric Modelling of Markov_Switching Vector Autoregressions using MSVAR for Ox, www.economics.ox.ac.uk.

Krolzig, H. M. (2001), Markov-Switching Procedures for Datinthe Euro-Zone Busines Cycle, *Viertaljahrshefte zur Wirtschaftsforschung 70.Jahrgang,Heft 3/2001*.

Mills, T. C. (1993), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pruska, K. (1996), *Metody regresji przełącznikowej i jej zastosowanie*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Psaradakis, Z., Ravn, M. O., Sola, M. (2002), Markov Switching Causality and the Money-Output Relationship, Working Paper,

Yin, P. (2003), Markov Switching in the Stock Market, *Economics 413*, www.missouri.edu/~econprm/ec413f02/pyin_fp.pdf.