

## **DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu  
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

*Arkadiusz Orłowski*

*SGGW w Warszawie & Instytut Fizyki PAN w Warszawie*

*Zbigniew Struzik*

*Centrum voor Wiskunde en Informatica w Amsterdamie*

*Magdalena Załuska-Kotur*

*Instytut Fizyki PAN w Warszawie*

### **Dynamika fluktuacji kursów wymiany walut**

#### **1. Wstęp**

Współczesne procesy ekonomiczne są często tak skomplikowane, że do ich zrozumienia przestają wystarczać standardowe metody matematyczne czy klasyczne modele ekonometryczne. Coraz częściej sięga się do arsenału metod wypracowanych w innych dziedzinach nauki, zwłaszcza fizyki, które z racji swojej specyfiki są dobrze przystosowane do analizy układów złożonych. Doświadczenia fizyki statystycznej, teorii chaosu deterministycznego czy teorii fraktali pokazują, że nawet wśród na pozór zupełnie przypadkowych danych jesteśmy w stanie odszukać głęboko ukryte związki i prawa. Dotyczy to zarówno procesów "chaotycznych" jak i czysto losowych. W tym ostatnim przypadku, kiedy na badaną zmienną wpływ ma wiele niezależnie działających i często nieznanych lub słabo znanych czynników, możemy korzystać z rozwiniętego aparatu statystyki matematycznej. W taki sposób można np. zrozumieć opisane już sto lat temu ruchy Browna, które w swoim klasycznym sformułowaniu stanowią archetyp procesu idealnie przypadkowego. Metody wypracowane w fizyce pozwalają także na odróżnienie od siebie danych, które pozornie wyglądają tak samo, ale w istocie wykazują szereg specyficznych własności, związanych z charakterem generujących je procesów fizycznych. Wiele z tych metod po-

zwala również na odszukanie uniwersalnych cech badanych procesów, często niewidocznych na poziomie "surowych" danych doświadczalnych.

Sz szczególnie interesującą kategorię danych ekonomicznych stanowią kursy wymiany walut. Z wielu względów jest to popularne „poletko doświadczalne”, na którym często wypróbowuje się nowe techniki i koncepcje teoretyczne. Wiąże się to głównie z ich znaczeniem praktycznym - kursy wymiany walut odgrywają bardzo istotną rolę w gospodarce większości krajów, w tym Polski [1]. Wystarczy wspomnieć problemy i kontrowersje związane z wprowadzeniem wspólnej waluty w części krajów Unii Europejskiej, czy ostatnie doniesienia o wzajemnych relacjach euro i jena japońskiego do dolara amerykańskiego, które poważnie wpływają na politykę gospodarczą i sytuację ekonomiczną w skali globalnej. Ważna jest także łatwa dostępność dużej ilości danych empirycznych. Warto, więc odnotować fakt, że metody rozwinięte pierwotnie w fizyce teoretycznej na potrzeby analizy nieliniowych układów dynamicznych, okazały się niezwykle skutecznym narzędziem badania rynków finansowych i różnorodnych procesów ekonomicznych [2-5]. Niezaprzeczalne zalety i skuteczność metod ilościowych przenikających z fizyki do ekonomii spowodowały powstanie (i wciąż stymulują rozwój) nowej dyscypliny naukowej – ekonofizyki [6]. W niniejszej pracy używamy niektórych z tych metod do analizy zmian kursów walut wciąż młodego rynku polskiego. Badane dane pochodzą z okresu od stycznia 1993 do sierpnia 2002.

Wiadomo, że średni kurs walutowy wiąże się zarówno z ogólną sytuacją ekonomiczną danego kraju jak i jego polityką walutową i makroekonomiczną. Różne teorie ekonomiczne próbują modelować związek pomiędzy nimi. Jednak na chwilowe zmiany tego kursu wpływa tak wiele czynników, że nieunikniony staje się jakiś rodzaj analizy statystycznej. W niniejszej pracy poddajemy analizie łatwo dostępne, publikowane, dzienne, średnie kursy wymiany. Nie wykazują one zwykle żadnej pamięci czasowej ani typowych korelacji. Mogą jednak istnieć korelacje nie pomiędzy danymi, ale pomiędzy różnymi skalami zmienności. Procesy idealnie przypadkowe – takie jak ruchy Browna - wyglądają identycznie w każdej skali zmienności. Również wykładnik Holdera  $h$ , charakteryzujący własności skalowania ma tę samą wartość, równą 0.5, w każdej skali. Istnieje jednak szereg nieliniowych procesów dynamicznych, które są źródłem danych o przypadkowych wartościach, wykazujących silne korelacje różnych skal zmienności. Istnieje szereg metod na wyznaczenie współczynnika  $h$ . W naszych poprzednich pracach [7, 8] używaliśmy do tego celu metody DFA (*detrended fluctuations analysis*), wprowadzonej w fizyce statystycznej i wykorzystywanej już wcześniej w ekonofizyce [9-12]. Tutaj, kontynuując badania rozpoczęte w pracy [13], posługujemy się analizą falek (*wavelets analysis*). Zastosowany algorytm został szczegółowo opisany (w kontekście wyznaczenia wykładnika Holdera) w pracy [14]. Dla bardziej złożonych procesów wykładnik Holdera zależy od badanego momentu sygnału  $q$ , i korzystając z tej zależności można zdefiniować wymiar fraktalny  $D$ . Zależność  $D$  od lokalnego wykładnika Holdera charakteryzuje rodzaj zmienności danych i charakter istniejących ko-

relacji. Pokazujemy te zależności na przykładzie kursu dolara w obu badanych przedziałach czasowych. Analizę uzupełniamy badając rozkłady statystyczne dziennych wahań kursowych.

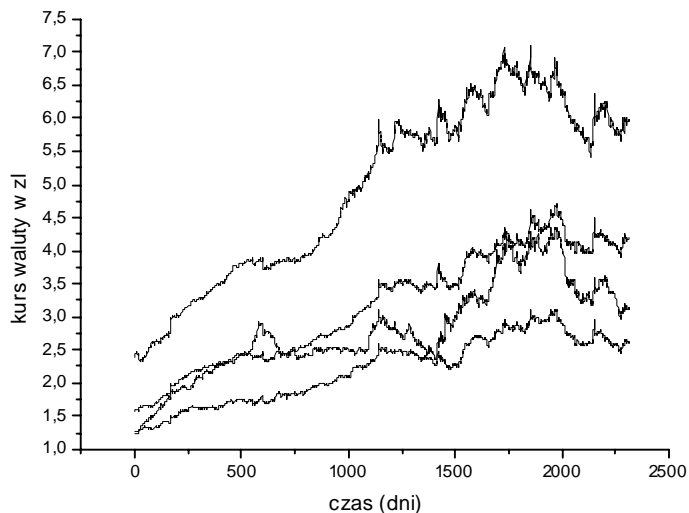
## 2. Fluktuacje kursów wymiany walut

Analizować będziemy szeregi czasowe opisujące średnie kursy dzienne wymiany podstawowych walut: dolara amerykańskiego, australijskiego i kanadyjskiego, funta brytyjskiego, franka szwajcarskiego, jena japońskiego i marki niemieckiej (połączonej z euro, ze współczynnikiem używanym do przeliczeń względem złotówki), notowane w Narodowym Banku Polskim (NBP) w okresie od stycznia 1993 roku do sierpnia 2002 roku. Ceny w starych złotych zostały przeliczone na nowe. Dni kolejnych lat numerowane są po kolei, począwszy od 2 stycznia 1993.

Jak widać bezpośrednio z rysunku 1, badane szeregi czasowe w naturalny sposób dzielą się na dwie części o zupełnie różnym charakterze. Granicę pomiędzy tymi dwoma odmiennymi okresami jest bardzo łatwo ustalić: na naszej skali jest to dzień mający numer 1140, co wypada 15 sierpnia 1997. Wyraźna różnica w zachowaniu obu części wykresu polega na zmianie wielkości przypadkowych fluktuacji, jakie występują wokół średniego, zmieniającego się powoli trendu. Wyraźnie widać, że po sierpniu 1997 zmiany są gwałtowniejsze i fluktuacje mają większą średnią wartość.

Ponieważ na przestrzeni ostatnich 10 lat kursy walut bywały odgórnie ustalane i kontrolowane, wydaje się, że być może tak duża zmiana dynamiki kursu jest związana ze zmianą sposobu regulowania ceny walut z tzw. koszyka (ze szczególnym uwzględnieniem marki i dolara). Dość łatwo podać argument sugerujący fałszywość takiego rozumowania: częściowe upłynnienie kursu nastąpiło 6 marca 1995 zaś pełne upłynnienie kursu miało miejsce 12 kwietnia 2000. Zmiana charakteru zachowania się fluktuacji wypada zatem niemal w środku okresu pomiędzy dwiema wspomnianymi wyżej datami, nie powinna więc być z nimi bezpośrednio związana.

Skoro wyznaczona przez nas data nie pokrywa się z datą żadnej z decyzji bezpośrednio dotyczących polityki kursowej, rodzi się naturalne pytanie o przyczyny tej ewidentnej zmiany. Okazuje się, że jest ona dobrze skorelowana z sejmową decyzją uruchomienia Funduszy Emerytalnych. W naszych poprzednich pracach [7, 8, 13] wysunęliśmy hipotezę, że być może to właśnie Fundusze są podmiotami, których pojawienie się i aktywność rynkowa istotnie wpłynęła na zmianę w charakterze fluktuacji kursów. Choć nie udało się jak dotąd jednoznacznie zweryfikować tej tezy, to uzyskane wyniki są obiecujące. Ideałem byłaby oczywiście konstrukcja modelu procesu odpowiedzialnego za takie zachowanie się wahań kursów walutowych.



Rys. 1. Kursy walut w funkcji ilości dni, które minęły od 2 stycznia 1993. Krzywe oznaczają od góry: kurs funta brytyjskiego, dolara amerykańskiego, 100 jenów japońskich i dolara kanadyjskiego. Dla wszystkich walut widoczna jest zmiana charakteru fluktuacji około 1140 dnia.

### 3. Szacowanie lokalnego wykładnika Holdera metodą falek

Aby ilościowo zbadać wspomniane różnice w zachowaniu się kursu, przeprowadzimy analizę metodą transformacji przy pomocy falek. Koncepcja transformacji falkowej polega na splecie badanego przebiegu czasowego z przeskalowanym jądrem (falką)  $\psi(x)$  (zwykle pierwsza pochodna funkcji wygładzającej). W naszym przypadku jest to funkcja Gaussa  $\Theta(x) = \exp(-x^2/2)$ . Transformata sygnału jest zależna od dwóch parametrów: parametru skalowania  $s$  i parametru przesunięcia  $b$

$$Wf(s, b) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \psi\left(\frac{x-b}{s}\right), \quad (1)$$

gdzie  $s$  jest dodatnie, a  $b$  przebiega zbiór liczb rzeczywistych. W praktyce ograniczamy się do zakresu, w którym określone są dane.

Tak zdefiniowana funkcja może być pomocna przy wyznaczaniu parametru mierzącego lokalne skalowanie danych, tzw. wykładnika Holdera. Można go zdefiniować następująco:

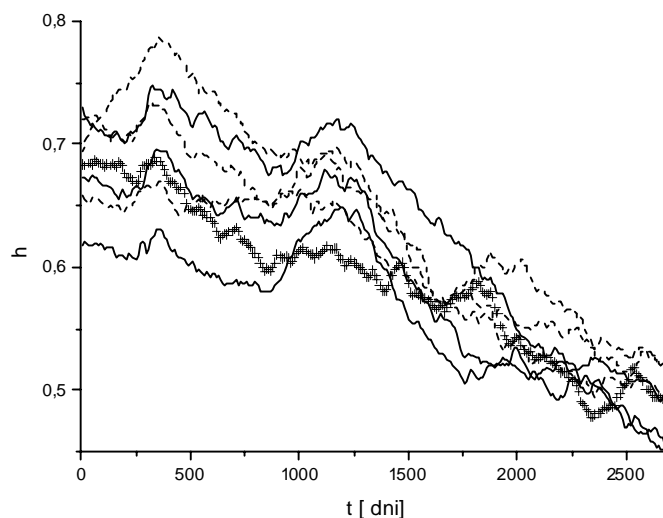
$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq C |x - x_0|^h, \quad (2)$$

gdzie  $P_n$  jest wielomianem rzędu  $n$ . Wykładnik Holdera  $h(x_0)$  jest zdefiniowany jako supremum wszystkich takich  $h$ , dla których relacja (2) jest spełniona, pod warunkiem, że rząd wielomianu  $n < h$ . Wykładnik ten jest dobrze określony w każdym punkcie funkcji  $f$ . Można go wyliczyć korzystając z następującej własności:

$$Wf(s, x_0) \propto |s|^{h(x_0)}, \quad (3)$$

pod warunkiem, że falka ma przynajmniej  $n$  znikających momentów [14]. W ten sposób, licząc odpowiednią transformatę przy pomocy falek, wyznaczyliśmy lokalny wykładnik Holdera dla siedmiu różnych kursów walut, przedstawiony na rysunku 2. Widać, że wszystkie te wykresy wyglądają podobnie: dla wszystkich walut lokalny wykładnik  $h$  ma wyższą wartość na początku i jednakowy, równoległy dla wszystkich spadek w pobliżu wyróżnionej daty z sierpnia 1997; potem ich wartości są niższe. Jedyną walutą, dla której wyliczony wykładnik nie wykazuje takiego charakterystycznego spadku jest frank szwajcarski.

Okazuje się więc, że współczynnik ten, obliczony w funkcji czasu, zmienia dość gwałtownie swoją wartość z większej (dużo powyżej 0.5) na mniejszą (oscylującą wokół 0.5). Zmiana ta występuje w okolicach sierpnia 1997 roku, co zgadza się dobrze z pierwszą, wizualną obserwacją danych.



Rys. 2. Lokalna w czasie wartość wykładnika Holdera  $h$  dla kursów wymiany siedmiu badanych walut. Liniami przerywanymi zaznaczono wartości odpowiadające (od góry): funtowi brytyjskiemu, marce niemieckiej i dolarowi australijskiemu. Linie ciągłe oznaczają wykładniki dla (od góry): jena japońskiego, dolara amerykańskiego i dolara kanadyjskiego. Krzyżyki odpowiadają wykładnikowi Holdera dla kursu franka szwajcarskiego.

#### 4. Widmo multifraktalne

Aby dodatkowo przebadąć charakterystykę rozkładów zmian względnych kursów dziennych, wyliczyliśmy rozkłady wymiaru fraktalnego  $D$  w funkcji współczynnika  $h$ . Im taki rozkład jest szerszy, tym bardziej multifraktalny jest charakter danych - dla idealnych przebiegów typu Browna, taki wykres zawiera jeden punkt. Interesujące nas funkcje wyglądają bardzo podobnie do tych, które wynikają z przebiegu innych procesów w przyrodzie [14], są parabolicznie rozłożone wokół wartości średniej i jako całość przesuwają się wzdłuż osi  $h$ , gdy liczymy je dla drugiej części czasowej.

Statystyczne własności sygnału możemy dokładniej analizować, definiując funkcję rozkładu jako

$$Z(s, q) = \sum_{\Omega(s)} |Wf(s, b_{\max})|^q, \quad (4)$$

gdzie  $\Omega(s) = \{b_{\max}\}$  jest zbiorem wszystkich lokalnych maksimum falek w skali  $s$  [14]. Parametr  $q$  oznacza wartość momentu, dla którego liczymy funkcję. Moment ten odpowiada pojęciu temperatury w fizyce statystycznej. Po obliczeniu rozkładu  $Z$  możemy znaleźć funkcję  $\tau(q)$ , opisującą następującą własność skalowania,

$$Z(s, q) \propto s^{\tau(q)}. \quad (5)$$

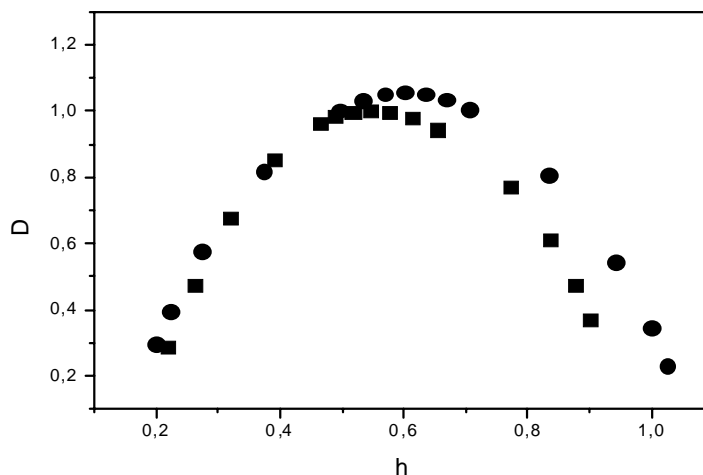
Wymiar multifraktalny  $D$  wyznacza się w oparciu o tę funkcję, wiedząc, że:

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = h(q), \quad (6)$$

$$D(h(q)) = qh(q) - \tau(q)$$

Następnie traktujemy  $q$  jako parametr i wykreślamy zależność  $D(h)$  tak, jak na rysunku 3.

Charakter otrzymanego widma multifraktalnego jest podobny dla obu przedziałów czasowych. Widmo dla drugiego przedziału jest lekko przesunięte w stronę wyższych wartości  $h$  i nieco szersze niż odpowiednie widmo dla pierwszego odcinka czasu. Wykresy dla kursu marki wyglądają analogicznie.



Rys. 3. Zależność wymiaru multifraktalnego  $D$  od lokalnego wykładnika Holdera  $h$  dla kursu dolara amerykańskiego. Kwadraty odpowiadają pierwszemu a kółka drugiemu z wyodrębnionych w tekście przedziałów czasowych.

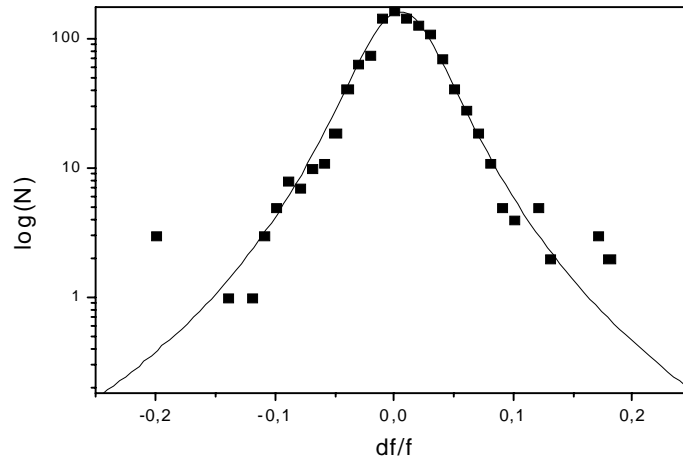
## 5. Rozkłady wartości względnych wahań kursowych

Dotychczasowa analiza kursów walut doprowadziła do wyróżnienia dwóch przedziałów zmienności. Oba te zbiory danych wykazują nieco inną dynamikę. Podzieliliśmy nasze dane na dwa okresy i dla każdego z nich zrobiliśmy histogram względnych zmian. Histogramy te odpowiadają rozkładom, jakim podlegają badane szeregi czasowe. W poprzednich pracach pokazaliśmy, że rozkłady w pierwszym przedziale odpowiadają statystykom sum o dużej liczbie niezależnych elementów – rzędu stu, natomiast drugi przedział zmienności może być opisany rozkładami dwupunktowymi – odpowiadającymi kilku do kilkunastu elementom. Takie rozkłady mogą być dopasowane tylko dla małych wartości, bowiem dla większych odchyłeń przechodzą w rozkłady potęgowe dając charakterystyczne długie ogony. Takie zachowanie wskazuje na silne korelacje i oznacza, że niemożliwe jest w pełni opisanie rozkładów przez zmienne niezależne. Okazuje się, że korelacje, jakie powstają w naszym układzie łatwo jest odtworzyć, zakładając, że dzienne zmiany kursu przebiegają z szybkością daną ogólnym wzorem

$$W\left(\frac{df}{f}\right) = \left[\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{df}{f}\right)^2\right]^\kappa.$$

Przeptyw prawdopodobieństwa zadany takim wzorem oznacza, że kurs zmienia się tym szybciej, im jest wyższy. Oczywiście takie zmiany zachodzić mogą w dwie strony. Kurs może rosnać albo maleć, wobec czego ustala się równowa-

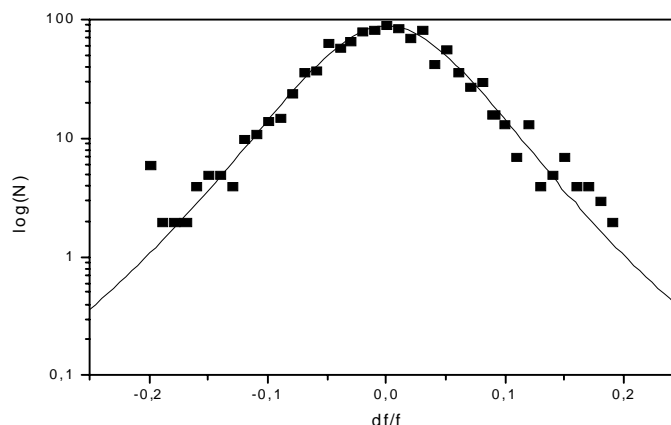
gowej rozkład zmian kursu. Rozkład ten jest proporcjonalny do odwrotności szybkości przepływów. Na rysunkach poniżej pokazane jest dopasowanie takiego rozkładu do kursów dolara w pierwszym i drugim przedziale zmienności. Widać, że dopasowanie jest bardzo dobre. Parametry  $\alpha$  i  $\kappa$  w obu tych przedziałach są w istotny sposób różne.



Rys. 4. Dopasowana funkcja :  $g(x) = \frac{0.00073}{[0.0021 + (x - 0.005)^2]^2}$ .

W pierwszym przypadku argument funkcji został nieco przesunięty tak, aby skompensować widoczną w tym obszarze zmienności tendencję wzrostu kursu. Najistotniejsza różnica pomiędzy tymi dwoma rozkładami dotyczy wykładnika  $\kappa$ , który przechodzi z wartości 2 do 3. Widać, że przy takiej zmianie wykładnika szybkość zmian kursu zaczyna o wiele silniej zależeć od wartości zmiany, czyli korelacje stają się silniejsze. Natomiast współczynnik  $\alpha$  można rozumieć jako jednostkową zmianę kursu. Widać, że wartości te różnią się o czynnik 6, co można rozumieć jako zmiany dokonane przez małe ruchy dużej liczby inwestorów w pierwszym przypadku (mały współczynnik  $\alpha$ ) i duże zmiany dokonywane przez mniejszą liczbę większych inwestorów w drugim przypadku. Takie wnioski pokrywają się z tym, co zaobserwowaliśmy w poprzednich pracach, używając innych rozkładów do analizy danych.





Rys. 5. Dopasowana funkcja:  $g(x) = \frac{0.00015}{[0.012 + x^2]^3}$ .

Nowym i ciekawym rezultatem otrzymanym przy pomocy przedstawionych rozkładów, jest widoczny w wykładniku  $\kappa$  wzrost stopnia skorelowania działań różnych inwestorów przy przejściu z pierwszego do drugiego obszaru czasowego.

## 6. Podsumowanie

Różnorakie metody, jakie stosowaliśmy do analizy danych, pochodzących z rynku walut potwierdzają to, że charakter zachowania się parametrów opisujących fluktuacje kursów wymiany zmienia się. Liczony przez nas wykładnik Holdera zmienia swoją średnią wartość przy przejściu z pierwszego do drugiego obszaru czasowego, rozkład multifraktalny poszerza się i przesuwa, ale największą zmianę możemy zaobserwować, analizując rozkład względnych, dziennych zmian kursu. Okazuje się, że ani rozkład gaussowski – odpowiadający błędzeniu przypadkowemu, ani wykładniczy, czy proponowany również wcześniej rozkład potęgowy nie opisują w pełni obserwowanych wartości. Dopasowane w końcu przez nas funkcje stanowią Lorentzowskie rozkłady, podniesione do drugiej, czy trzeciej potęgi, w zależności od przedziału czasowego, który badamy. Funkcje takie dopasowują się do całego przedziału zmienności kursów. Wydaje się, że takie rozkłady odpowiadają silnie oddziałującemu układowi obiektów, co prowadzić może do samosprężonego mechanizmu ustalania kursu w danym dniu. Otrzymany przez nas wykładnik 2 czy 3 mówi o rodzaju i stopniu tego samosprężenia.

## Literatura

- [1] Syczewska E. M. (2000), *Elementy kursów walutowych*, Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych, Zeszyt 8/2000, s. 157-168, SGH, Warszawa.
- [2] Peters E. E. (1997), *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa.
- [3] Orłowski A., Bęben M. (2000), *Metody chaosu deterministycznego w badaniach ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe SGGW w Warszawie: Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej, Nr 42, s. 67-79.
- [4] Bęben M., Orłowski A. (2001), *Correlations in financial time series: established versus emerging markets*, The European Physical Journal B 20, s. 527-530.
- [5] Brzozowska-Rup K. (2001), *Czy nominalne kursy dolara amerykańskiego są generowane przez deterministyczny układ chaotyczny?*, w: *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych – II*, redakcja naukowa: Borkowski B. i Orłowski A., Wydawnictwo SGGW, Warszawa, s. 223-233.
- [6] Mantegna R. N., Stanley H. E. (2001), *Ekonofizyka – wprowadzenie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [7] Załuska-Kotur M., Krukowski S., Orłowski A. (2002), *Niestandardowa analiza fluktuacji kursu dolara amerykańskiego*, w: *I Konferencja Modelowanie Procesów Ekonomicznych*, WSH Kielce – SGGW Warszawa, redakcja naukowa: Dziubdziela W. i Orłowski A., Wydawnictwo WSH, Kielce, s. 271-278.
- [8] Załuska-Kotur M., Orłowski A. (2002), *Analiza fluktuacji kursów wymiany na polskim rynku walutowym*, w: *Monografia Modelowanie Procesów Ekonomicznych*, redakcja naukowa: Dziubdziela W. i Orłowski A., Wydawnictwo WSH, Kielce, s. 153-160.
- [9] Peng C.-K., Buldyrev S. V., Havlin S., Simons M., Stanley H. E., Goldberger A. L. (1994), *Mosaic organization of DNA nucleotides*, Physical Review E 49, s. 1685-1689.
- [10] Liu Y., Gopikrishnan P., Cizeau P., Meyer M., Peng C.-K., Stanley H. E. (1999), *Statistical properties of the volatility of price fluctuations*, Physical Review E 60, s. 1390-1400.
- [11] Ausloos M., Vandewalle N., Boveroux Ph., Minguet A., Ivanova K. (1999), *Applications of statistical physics to economic and financial topics*, Physica A 274, s. 229-240.
- [12] Ausloos M., Ivanova K. (2000), *Introducing False EUR and False EUR exchange rates*, Physica A 286, s. 353-366.
- [13] Załuska-Kotur M., Struzik Z., Orłowski A. (2003), *Zmiana charakteru zachowania fluktuacji kursów wymiany walut - w poszukiwaniu właściwego modelu*, w: *Monografia Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych - III*, redakcja naukowa: Orłowski A., Wydawnictwo SGGW, Warszawa, s. 222-231.
- [14] Struzik Z. (2001), *Revealing local variability properties of human heartbeat intervals with the local effective local exponent*, Fractals, 9, s. 77-93.