

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Stefan Grzesiak
Uniwersytet Szczeciński

Filtry Kalmana a błędy specyfikacji hiperstruktury

Artykuł nawiązuje do problemów wykorzystania filtrów Kalmana w analizach ekonometrycznych modeli ze zmieniającymi się w czasie parametrami, rozważanych wcześniej w pracach (Grzesiak (1995), (Grzesiak (1997) i (Grzesiak (1999))), a także w innych opracowaniach autora. W wyżej wymienionych artykułach przyjęto jako oczywiste założenie, że hiperstruktura przedstawionego poniżej liniowego stochastycznego dynamicznego systemu :

$$y_t = x_t^T \alpha_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\alpha_t = F \alpha_{t-1} + G u_t + H \eta_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

składająca się z :

- macierzy przejścia F , macierzy reakcji G , macierzy innowacji H , jak również z macierzy kowariancji Q dla η_t i wariancji σ^2 jest znana¹.

Taki przypadek nie zachodzi jednak przy empirycznej analizie zmieniających się w czasie parametrów strukturalnych, tam hiperstruktura jest nieznana i musi zostać określona z dostępnych danych. Taką sytuację określamy jako identyfikowanie procesu parametru. Daje się ona podzielić formalnie na trzy odcinki: najpierw należy wyjaśnić, o jaki typ procesu parametru chodzi – czy przedstawia stacjonarny lub niestacjonarny proces parametru. Następnym krokiem jest określenie struktury procesu parametru. Na wstępie nie jest np. wiadomo, jaki rząd autoregresji jest dopasowany do poszczególnych komponentów wektora parametrów. Oznacza to, że zarówno wymiar jak również struktura macierzy przejścia F są nieznane. Wreszcie należy jeszcze oszacować nieznane parametry macierzy: F , G , H i Q oraz wariancję σ^2 .

¹ Definicję macierzy Q przedstawiono w pracy Grzesiak (1995), s. 53

Szczególny problem przy identyfikacji procesu parametru zawiera się więc w fakcie, że w żadnym wypadku przy tym rozróżnieniu nie chodzi o poszczególne kroki, które kolejno przeprowadza się w czasie. Rozstrzygnięcie dotyczące typu i struktury procesu parametru zakłada zasadniczo szacowanie alternatywnych modeli parametru tak, że bardzo istotna staje się z reguły analiza empiryczna. Zajmiemy się więc szacowaniem nieznanymi parametrów hiperstruktury przy założeniu, że struktura procesu parametru jest znana, tzn. najpierw zostanie rozważony trzeci punkt problemu identyfikacji.

Literatura ekonometryczna na ten temat jest naszym zdaniem w pierwszym rzędzie mało przekonująca. W zastosowaniach empirycznych używano i zalecano do stosowania (por. np. Athans (1974), Brännäs (1981), Haas (1983), Otter (1978), Szeto (1973)) model „błądzenia losowego”:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t \quad t=1,2,\dots,n \quad (5)$$

$$\alpha_t = \beta_t \quad (6)$$

Oznacza to, że badania empiryczne zostały z góry ograniczone do niestacjonarnego modelu parametru z $F = H = I$ i $G = 0$. W takiej sytuacji muszą być określone jedynie: macierz kowariancji Q i wariancja σ^2 . Dodatkowo przyjmuje się też, że macierz Q jest diagonalna. Jest to założenie bardzo restrykcyjne, gdyż oznacza w przypadku modeli „błądzenia losowego”, że nie ma żadnego wzajemnego związku między wariancjami poszczególnych komponentów wektora parametrów β_t .

W wielu zależnościach ekonomicznych występują jednak te same przyczyny zmian parametrów. To pozwoliło np. w ramach badania konsumpcji indywidualnej stwierdzić, że zmiany zachowań konsumpcyjnych idą w parze z przeciwstawnymi zmianami w postawach oszczędzania. Nie można tego jednak właściwie odwzorować w funkcji konsumpcji opisanej modelem parametru „błądzenia losowego” z diagonalną macierzą Q .

Przy dyskutowanym w literaturze² podejściu do określenia diagonalnej macierzy kowariancji Q chodzi głównie o przedstawienie heurystyczne, jak specyfikacje ad hoc, lub oparte na analizie wrażliwości. To, że analiza wrażliwości może być powiązana ze stosunkowo dużym nakładem czasu obliczeniowego, nie jest przy tym brane pod uwagę. Odnosi się to w szczególności do sytuacji, kiedy także poprzez analizę wrażliwości są określane: macierz kowariancji błędów $\Sigma_{0|0}$ wartości początkowej i wariancja σ^2 .

Wszelako takie „próbkowe podejście” znalazło szerokie zastosowanie. Można usprawiedliwić takie podejście do analizy empirycznej jedynie wtedy, kiedy filtr Kalmana okazuje się bardzo odporny w stosunku do błędów specyfikacji hiperstruktury. Jak wyglądają jednak wyniki badań odporności, zarówno o charakterze teoretycznym, jak również w oparciu o studia symulacyjne?

² Por. np. Anderson, Moore (1984), Haas (1983), Otter (1978).

Najważniejsze wyniki w teoretycznej analizie błędów można znaleźć w pracy A. Jazwinskiego³. Przedstawiono tam przede wszystkim ważny wynik, w jaki sposób opisać wpływ błędów specyfikacji $\Sigma_{0|0}$, Q i σ^2 na macierze kowariancji błędów $\Sigma_{t|t-1}$ i $\Sigma_{t|t}$.

Twierdzenie 1.

Niech Q_c i σ_c^2 będą wyspecyfikowane dla macierzy kowariancji Q i wariancji σ^2 . Niech $\Sigma_{0|0}^C$ będzie specyfikacją macierzy kowariancji błędu $\Sigma_{0|0}$. $\Sigma_{t|t-1}$ i $\Sigma_{t|t}$ niech będą macierzami kowariancji błędów obliczonymi na podstawie rzeczywistych wartości Q , σ^2 i $\Sigma_{0|0}$. Ponieważ zachodzi $Q \leq Q_c$ i $\Sigma_{0|0} \leq \Sigma_{0|0}^C$, stąd wynika dla macierzy kowariancji błędów $\Sigma_{t|t-1}^C$ i $\Sigma_{t|t}^C$ obliczonej wraz z Q_c , σ_c^2 i $\Sigma_{0|0}^C$:

$$\Sigma_{t|t-1}^C \geq \Sigma_{t|t-1} \quad (7)$$

$$\Sigma_{t|t}^C \geq \Sigma_{t|t} \quad (8)$$

W oparciu o te wyniki zaleca się następujące podejście praktyczne, że z reguły nieznanne macierze kowariancji Q i $\Sigma_{0|0}$ jak również wariancja σ^2 są ustalane poprzez „konserwatywne” tzn. wystarczająco duże specyfikacje Q_c , $\Sigma_{0|0}^C$ i σ_c^2 . Filtr Kalmana dostarcza suboptymalnych oszacowań $\alpha_{t|t}^C$ i $\Sigma_{t|t}^C$ dla liniowego stochastycznego dynamicznego systemu.

Zależnie od wielkości macierzy kowariancji błędów jest wreszcie do rozstrzygnięcia, czy specyfikacje Q_c , $\Sigma_{0|0}^C$ i σ_c^2 dostarczają „odpowiednich” oszacowań $\alpha_{t|t}^C$ albo czy Q_c , $\Sigma_{0|0}^C$ i σ_c^2 są do zastąpienia przez mniej „konserwatywne” specyfikacje. Zalecenia te skłaniają oczywiście do analizy wrażliwości przy ustalaniu elementów hiperstruktury.

Pozostaje pytanie, czy ten sposób podejścia nadaje się też do ekonometrycznych zastosowań filtrów Kalmana.

Więcej wyjaśnień o oddziaływaniach błędów specyfikacji hiperstruktury na rezultaty algorytmu filtru Kalmana dostarczają studia symulacyjne. Wyniki dwóch takich studiów zostaną niżej przedstawione. Pierwsze badanie przeprowadzono w pracy A. McWhortera⁴ dla modelu parametru Markowa w postaci

³ Por. Jazwinski (1970), s.244

⁴ Por. McWhorter, Spivey, Wroblewski (1976), s.280

$$\beta_t = A\beta_{t-1} + \eta_t \quad (9)$$

i otrzymano następujące rezultaty .

Szacunki filtru Kalmana $y_{t|t}$ zmiennej zależnej y_t okazują się bardzo odporne wobec błędów specyfikacji Q , σ^2 , F i wartości początkowej α_0 . Z kolei gdy bada się odporność oszacowań $\beta_{t|t}$, to $\beta_{t|t}$ okazuje się zdecydowanie wrażliwe wobec błędów specyfikacji hiperstruktury i wartości początkowej, przy czym błędy specyfikacji macierzy przejścia F i wartości początkowej α_0 mają szczególnie znaczące następstwa. Motywuje to A. McWhortera do następujących zaleceń.

Ponieważ przy analizie empirycznej parametrów zmiennych w czasie nie istnieje możliwość sprawdzenia prawidłowości oszacowania $\beta_{t|t}$ – prawdziwe przebiegi β_t nie są znane w jakimkolwiek studium symulacyjnym – wskazana jest ostrożność przy interpretacji ekonomicznej wyników estymacji $\beta_{t|t}$. Inaczej mówiąc rezultat potwierdza zdaniem McWhortera przydatność filtru Kalmana do prognozowania zmiennych zależnych y_t także, jeśli przeprowadzono specyfikacje ad hoc nieznanymi parametrów modeli.

Są tu jednak istotne wątpliwości, ponieważ badano wyłącznie odporność filtracji $y_{t|t}$. Filtr Kalmana okazuje się przy tym w rzeczywistości bardzo stabilny, bowiem przy „aktualizacji” wartości prognozowanych są dobrze wyrównywane z reguły także wielkie błędy prognoz ($y_t - y_{t|t-1}$). Do oceny zdolności progностycznej filtru nadaje się jednak raczej prognozowana oszacowana wartość $y_{t|t-1}$, co nie zostało jednak uwzględnione w wymienionym wyżej badaniu .

O tym, że sama dobroć dopasowania filtracji $y_{t|t}$ w przedziale czasowym *ex post* nie wystarczy do oceny zdolności progностycznej, wspomina inna praca McWhortera, Narasimhama i Simonds⁵. Na nowo został w niej oszacowany znany model I z pracy (Klein (1950)) na podstawie danych kwartalnych od I kwartału 1950 do IV kwartału 1974, zarówno przy pomocy klasycznej MNK jak również 3-stopniową metodą najmniejszych kwadratów. Oprócz tego zmienne w czasie parametry były oszacowane filtrami Kalmana, przy czym przyjęto dla dynamiki parametrów proces „błądzenia losowego”.

Struktura macierzy kowariancji Q została przyjęta ad hoc. Okazało się przy tym, że filtr Kalmana przy prognozach *ex ante* na jeden kwartał daje lekką poprawę prognoz w porównaniu do klasycznej MNK i trójstopniowej MNK. W przeciwieństwie do tego 4-kwartalne prognozy *ex ante* uzyskane klasyczną MNK i trójstopniową MNK przewyższają prognozy zmiennych w czasie parametrów we wszystkich równaniach modelu.

Dalsze studium symulacji zostało przeprowadzone przez Brännäs i Westlunda⁶. Wyniki tych studiów potwierdzają w zasadniczych miejscach wyniki poprzednich badań . Błędy specyfikacji wartości początkowej i macierzy przej-

⁵ Por. McWhorter, Narasimhan, Simonds (1977).

⁶ Por. Brännäs, Westlund (1981).

ścia F mają następstwa w postaci wielkich błędów przy szacowaniu wektora parametrów β_t . W porównaniu z tym filtr Kalmana okazuje się bardzo odporny na błędy specyfikacji macierzy kowariancji Q i wariancji σ^2 . Wzorzec eksperymentu symulacyjnego Brannesa i Westlunda należy jednak w jednym miejscu skrytykować. Jeśli Q i σ^2 są prawdziwymi specyfikacjami, wówczas Brannas i Westlund stale badają w swoim studium symulacyjnym reakcję filtra Kalmana na błędy specyfikacji typu $Q_C = cQ$ lub $\sigma_C^2 = c\sigma^2$, podczas gdy nie sprawdzono następstw zmian stosunku elementu Q .

O tym, że filtr Kalmana nie reaguje wyraźnie na rozważane u wymienionych autorów proporcjonalne zmiany wariancji i kowariancji, wskazuje także następujące łatwe do udowodnienia twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Niech $Q_C = CQ$, $\sigma_C^2 = C\sigma^2$ oraz $\Sigma_{00}^C = C\Sigma_{00}$ będą wyspecyfikowanymi wariancjami i kowariancjami z $C > 0$ dla filtra Kalmana. Wtedy zachodzi dla obliczanych przy tym szacunków $\alpha_{t|t-1}^c$ i $\alpha_{t|t}^c$ wektora stanu α_t :

$$\alpha_{t|t-1}^c = \alpha_{t|t-1} \quad (10)$$

$$\alpha_{t|t}^c = \alpha_{t|t} \quad (11)$$

Dla macierzy kowariancji błędów zachodzi

$$\Sigma_{t|t-1}^C = C \Sigma_{t|t-1} \quad (12)$$

$$\Sigma_{t|t}^C = C \Sigma_{t|t} \quad (13)$$

Dowód : Twierdzenie dowodzi się przez indukcję zupełną. Początek indukcji dla $t = 1$ wynika bezpośrednio z zamieszczonych w pracy (Grzesiak (1995)) równań (13) - (17) filtra Kalmana⁷ dla $\Sigma_{00}^C = C\Sigma_{00}$. Przyjęto, że teza jest prawdziwa dla $t - 1$. Wynika to ze wspomnianego wyżej równania (13).

$$\alpha_{t|t-1}^c = F\alpha_{t|t-1}^c + Gu_t = F\alpha_{t-1|t-1} + Gu_t = \alpha_{t|t-1} \quad (14)$$

a z równania prognozy kowariancji (14) otrzymuje się :

$$\begin{aligned} \Sigma_{t|t-1}^C &= F \Sigma_{t-1|t-1}^C F^T + HQ_C H = \\ &= FC \Sigma_{t-1|t-1} F^T + HCQH^T = C \Sigma_{t-1|t-1} \end{aligned} \quad (15)$$

Dla wektora wzmocnienia filtra zachodzi przy tym

⁷ Równania te są przedstawione w pracy Grzesiak (1995), s.58

$$\begin{aligned}
K_t^C &= \sum_{t-1|t-1}^C x_t (x_t^T \sum_{t-1|t-1}^C x_t + \sigma_C^2)^{-1} = \\
&= C \sum_{t-1|t-1}^C x_t (x_t^T C \sum_{t-1|t-1}^C x_t + C \sigma_C^2)^{-1} = K_t
\end{aligned} \tag{16}$$

Teza $\alpha_{t|t}^c = \alpha_{t|t}$ wynika przy tym bezpośrednio z równania stanu filtru (16).

Również teza (7) wynika z równania filtru kowariancji (17):

$$\begin{aligned}
\Sigma_{t|t}^C &= \Sigma_{t-1|t-1}^C - K_t^C x_t^T \Sigma_{t-1|t-1}^C = \\
&= C \Sigma_{t-1|t-1}^C - K_t^C x_t^T C \Sigma_{t-1|t-1}^C = C \Sigma_{t|t}
\end{aligned} \tag{17}$$

W praktyce nieznana jest jednak nie tylko absolutna wielkość macierzy kowariancji Q , ale także struktura macierzy. Jest wątpliwe, czy Q ma postać diagonalną czy nie, jak również jest nieznany stosunek wielkości poszczególnych elementów Q .

Pewną często w literaturze wspomnianą możliwością, aby szacować nieznane macierz kowariancji Q , oferuje tzw. filtr Sage – Husa⁸. Chodzi tu o modyfikację filtru Kalmana. Nieznane wariancje i kowariancje są przyjmowane jako dodatkowe komponenty wektora stanu i współszacowane rekursywnie. Prowadzi to jednak do znaczącego zwiększenia rozmiarów wektora stanu, co jest kłopotliwe do zastosowania w ekonomii z powodu krótkich szeregów danych. Ciężar problemu jest przy tym przesunięty w inne miejsce, ponieważ algorytm filtracji potrzebuje wartości początkowych σ_0^2 i Q_0 dla wariancji i kowariancji.

Podsumowując dyskusję na temat błędów specyfikacji należy wskazać, że tak rozpowszechniony sposób postępowania, jak specyfikacje ad hoc i analizy wrażliwości są mało przydatne do określania nieznanej hiperstruktury zmiennych w czasie modeli parametru. Właśnie to jest ważne ze względu na oczekiwaną poprawę jakości prognostycznej modelu ekonometrycznego i w szczególności to zwraca uwagę przy ekonomicznej interpretacji oszacowanego przebiegu parametru. Przebieg oszacowanych wartości parametru $\beta_{t|t}$ jest w największym stopniu zależny od wyboru macierzy kowariancji Q . Jeśli ponadto uwzględnia się wpływ błędów specyfikacji macierzy przejścia F , to można sobie łatwo wyobrazić, że bez jakiegoś odpowiedniego kryterium szacowania praktycznie każdy „żądany” przebieg parametru może zostać oszacowany zgodnie z „właściwym” wyborem hiperstruktury.

⁸ Por. Sage, Husa (1969).

Literatura

- Anderson, B.D.O., Moore, J.B. (1984), *Filtracja optymalna*, PWN, Warszawa.
- Athans, M. (1974), *The Importance of Kalman Filtering Methods for Economic Systems*, Annals of Economic and Social Measurement, nr 3.
- Brännäs, K. (1981), *On the Estimation of Time-Varying Parameters for Forecasting and Control*, w: K. Brännäs, H. Stenlund, i A. Westlund (red.), *Econometrics and Stochastic Control in Macro-Economic Planning*, Almqvist&Wicksell, Stockholm.
- Brännäs, K., Westlund, A. (1981), *A Robustness Analysis of Kalman Filtering for Estimation of Interdependent Systems*, w: K.Brännäs, J.A.Eklöf, H.Stenlund, A.Westlund (red), *Econometrics and Stochastic Control in Macro-Economic Planning*, Almqvist & Wickell, Stockholm.
- Grzesiak, S. (1995), "Równania filtru Kalmana w modelowaniu ekonometrycznym", *Przegląd Statystyczny* nr 1.
- Grzesiak, S. (1997), "O wyznaczeniu wartości początkowych algorytmu filtru Kalmana", *Przegląd Statystyczny* nr 1.
- Grzesiak, S. (1999), "Problem wygładzania w filtracji kalmanowskiej", *Przegląd Statystyczny*, nr 4.
- Haas, P. (1983), *Zustands- und Parameterschätzungen in ökonomischen Modellen mit Hilfe von linearen Filter-Methoden*, Verlag A. Hain, Königsstein/Taunus.
- Haas, P. (1982), Hild C. , *Linear Filter Methods: An Application to a Stock Production Model*, w : W. Eichhorn, R.Henn, K.Neumann i R. Shephard (red), *Economic Theory of Natural Resources*, Physica Verlag, Würzburg-Wien.
- Jazwinski, A.H. (1970), *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press New York, London.
- Klein, L. R. (1950), *Economic Fluctuations in the United States, 1921 – 1941*, Cowles Commission Monograph 11, John Wiley & Sons, New York.
- McWhorter, A., Narasimhan, G., Simonds, R. (1977), *An Empirical Examination of the Predictive Performance of an Econometric Model with Random Coefficients*, *International Statistical Review*, Vol.45.
- McWhorter, A., Spivey, W. A., Wroblewski, W. J. (1976), *A Sensitivity Analysis of Varying Parameter Econometric Models*, *International Statistical Review*, Vol. 44.
- Otter, P.W. (1978), *The Diskrete Kalman Filter Applied to Linear Regression Models: Statistical Considerations and an Application*, *Statistica Neerlandica*, 32.
- Sage, A., Husa, G. (1969), *Adaptive Filtering with unknown Prior Statistic*, Proc. 10. Joint Automatic Control Conference, Boulder, Col.
- Schaps, J. (1982), *Zur Verwendung des Kalman-Ansatzes für eine Verbesserung der Prognosegüte ökonomischer Modelle*, Dissertation, Universität Göttingen.
- Szeto, M.W. (1973), *Estimation of the Volatility of Securities in the Stock Market by Kalman Filtering Techniques*, Proceedings of the 14. Joint Automatic Control Conference, Columbus, Ohio.