**DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE**
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

*Marek Walesiak*
*Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu*

# Ekonometryczne modelowanie zjawisk marketingowych

## 1. Wprowadzenie

W literaturze poświęconej modelowaniu marketingowemu wyróżnia się wiele klasyfikacji modeli ekonometrycznych:

a) ze względu na postać analityczną rozróżnia się modele liniowe i nieliniowe, a wśród tych ostatnich sprowadzalne i nie sprowadzalne do liniowych,

b) ze względu na liczbę zmiennych objaśniających wyróżnia się modele z jedną i z wieloma zmiennymi objaśniającymi. W modelach pierwszego typu szczególną rolę pełnią modele, w których zmienną objaśniającą są wydatki na reklamę i promocję (zob. np. Saunders (1987)),

c) ze względu na rolę czynnika czasu rozróżnia się modele statyczne i dynamiczne,

d) ze względu na typ zmiennej zależnej wyróżnia się modele, w których zmienna zależna jest zmienną (zob. Franses i Paap (2001), s. 13-26):

– ciągłą (np. wielkość lub wartość sprzedaży, udział w rynku),

– nominalną dwumianową (np. wybór pomiędzy dwiema markami dokonany przez konsumentów w czasie),

– nominalną wielomianową (np. wybór spośród więcej niż dwóch marek dokonany przez konsumentów w czasie),

– porządkową wielomianową (np. wybór spośród marek o niskiej, średniej i wysokiej jakości dokonany przez konsumentów w czasie),

– ciągłą ograniczoną, uciętą (*limited, censored, truncated*). Np. przy sprzedaży katalogowej typowy zbiór danych obejmuje dwa typy informacji: obserwacje na zmiennej nominalnej dwumianowej (wartości 1 oraz 0 oznaczają odpowiednio gospodarstwa domowe, które dokonały zakupu i nie dokonały zakupu w sprzedaży katalogowej); obserwacje na zmiennej ciągłej dla gospodarstw domowych, które dokonały zakupu (liczba produktów lub kwota wydatków na zakupione z katalogu produkty). Zmienna zależna jest zmienną ciągłą ograniczoną, ponieważ tylko dla gospodarstw domowych, które dokonały zakupu jest zmienną ciągłą, a dla pozostałych przyjmuje wartość 0,

– mierzącą czas trwania zachodzący pomiędzy dwoma zdarzeniami (*duration variable*). Np. odstęp czasu pomiędzy zakupem płynnych środków piorących przez nabywców.

Poszczególne typy zmiennych zależnych wymagają konstrukcji specjalnych modeli (zob. Franses i Paap (2001), s. 27).

e) ze względu na poziom popytu wyróżnia się (por. Leeflang i in. (2000), s. 157) modele produktu, marki oraz udziału w rynku. Modele tego typu budowane są dla danych indywidualnych (poszczególnych nabywców, gospodarstw domowych) lub zagregowanych (domy towarowe, sieci handlowe, segmenty rynku, cały rynek).

Inne klasyfikacje modeli marketingowych przedstawiono m.in. w pracach: Leeflang i in. (2000), s. 37; Lilien, Kotler i Moorthy (1992), s. 651.

## 2. Specyfikacja zmiennych w modelach marketingowych wyodrębnianych ze względu na poziom popytu

W jednorównaniowym modelu marketingowym zależność zmiennej $Y$ od zmiennych $X_1,\ldots,X_m$ przedstawia się za pomocą równania:

$$Y = f(X_1,\ldots,X_m,e), \qquad (1)$$

gdzie: $\{X_1,\ldots,X_m\}$ – zmienne regresyjne (objaśniające) ustalone na podstawie analizy merytorycznej, $f$ – postać analityczna funkcji, $e$ – element losowy.

Zmienne objaśniające $X_1,...,X_m$ dzieli się na dwie zasadnicze grupy (por. np. Leeflang i in. (2000), s. 59-60):

a) zmienne decyzyjne zawierające zmienne kontrolowane przez firmę i jej konkurentów (cena, nakłady na reklamę i promocję, jakość marki produktu, kanały dystrybucji, okres gwarancji, właściwości marki produktu),

b) zmienne nie dające się kontrolować (*environmental variables*): zmienne socjoekonomiczne i demograficzne charakteryzujące konsumentów (dochód, wiek, płeć, wykształcenie, zawód, wielkość rodziny, miejsce zamieszkania), cła, podatki, kursy walutowe, moda, warunki pogodowe, itd.

W jednorównaniowych ekonometrycznych modelach marketingowych zmienne objaśniające mogą być wprowadzone w formie:

a) bezwzględnej (np. $R_{s,t-1}$ – wydatki na reklamę marki $s$ w okresie $t-1$, $P_{st}$ – cena marki $s$ w okresie $t$),

b) relatywnej:

– w odniesieniu do konkretnej marki konkurencyjnej (np. $P' = P_s / P_c$, gdzie $P_s$ i $P_c$ oznaczają odpowiednio cenę badanej marki *s* i marki konkurencyjnej *c*),

– w odniesieniu do przeciętnej marki konkurencyjnej (np. $P' = P_s / \overline{P}_c$, gdzie $P_s$ i $\overline{P}_c$ oznaczają odpowiednio cenę badanej marki *s* i średnią arytmetyczną lub medianę cen marek konkurencyjnych),

– w odniesieniu do sumy wszystkich marek produktu (np. $R' = R_s / \sum_{c=1}^{C} R_c$, gdzie $R_s$ i $R_c$ oznaczają odpowiednio wydatki na reklamę marki *s* i marki konkurencyjnej *c*),

– w przeliczeniu na liczbę ludności ogółem lub ludności z określonej grupy wiekowej.

Szczególną klasę modeli marketingowych stanowią modele wyodrębniane ze względu na poziom popytu. Zalicza się do nich (por. Leeflang i in. (2000), s. 157):

– modele produktu (*product class sales models*, *primary demand models*) dotyczące sprzedaży wszystkich marek badanego produktu na rynku,

– modele marki (*brand sales models*, *secondary demand models*) dotyczące sprzedaży konkretnej marki *s* na rynku ($s = 1, \ldots, C$, gdzie *C* oznacza liczbę marek badanego produktu na rynku),

– modele udziału w rynku (*market share sales models*, *relative demand models*).

**W modelach produktu** bazujących na danych przekrojowych (poszczególnych nabywców, grup nabywców, jednostek geograficznych) wśród zmiennych objaśniających występują zmienne socjoekonomiczne i demograficzne (wiek, płeć, wykształcenie, zawód, dochód, wielkość rodziny, miejsce zamieszkania) oraz zmienne marketingowe. Nie jest możliwe uwzględnienie wpływu oddziaływania zmiennych marketingowych, gdy nie wykazują one zmienności w przekroju poszczególnych nabywców, grup nabywców czy jednostek przestrzennych (zob. Leeflang i in. (2000), s. 164).

Dla modeli produktu bazujących na danych w postaci szeregów czasowych wśród zmiennych objaśniających nie dających się kontrolować (*environmental variables*) uwzględnia się dochód konsumentów, wielkość populacji, indeksy cen, warunki pogodowe, zmienne informujące o aktywności ekonomicznej.

Zmienne marketingowe w modelach produktu zwykle dotyczą wszystkich marek produktu na rynku (np. całkowite wydatki na reklamę, liczba punktów sprzedaży, średnia cena).

**Modele marki** dotyczące sprzedaży konkretnej marki *s* można budować w sposób bezpośredni lub pośredni (zob. Leeflang i in. (2000), s. 167).

W sposobie <u>bezpośrednim</u> sprzedaż marki *s* w okresie *t* ($q_{st}$) jest wyjaśniana przez zmienne marketingowe dotyczące marki *s* oraz marek konkurencyjnych oraz zmienne nie dające się kontrolować (*environmental variables*).

Wśród zmiennych marketingowych uwzględnia się najczęściej (por. np. Menezes i Currim (1992); Leeflang i in. (2000), s. 50): cenę, wydatki na reklamę i promocję, kanały dystrybucji, długość okresu gwarancji, jakość marki, charakterystyki (parametry) marki.

W sposobie pośrednim sprzedaż marki *s* ($q_{st}$) otrzymywana jest z iloczynu dwóch modeli $q_{st} = Q_t \cdot m_{st}$: modelu produktu $Q_t$ ($Q_t = \sum_{c=1}^{C} q_{ct}$) oraz modelu udziału w rynku marki *s* $m_{st}$ ($m_{st} = \frac{A_{st}}{\sum_{c=1}^{C} A_{ct}}$, dla $s = 1,\dots C$, $A_{st}$ – model atrakcyjności marki *s* w okresie *t*, $t = 1,\dots T$).

W **modelach udziału w rynku** marki *s* ($m_{st}$) uwzględnia się zmienne odnoszące się do badanej marki *s* i marek konkurencyjnych. W modelach tych przyjmuje się założenie, że efekt oddziaływania na popyt innych zmiennych niż marketingowe (np. dochodu konsumentów) jest dla każdej marki taki sam. W sytuacji, gdy zmienne te dla różnych marek produktów odmiennie reagują na popyt wskazane jest ich uwzględnienie w roli zmiennych objaśniających.

Do podstawowych funkcji regresji wykorzystywanych w badaniach marketingowych w modelach produktu, marki i udziału w rynku należą (por. np. Lilien, Kotler i Moorthy (1992), s. 660; Jain i Vilcassim (1989); Hagerty, Carmen i Russell (1988); Brodie i de Kluyver (1984); Naert i Leeflang (1978); Parsons i Schultz (1976)):

a) liniowa $Y = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j X_j + e$, (2)

b) potęgowa $Y = a_0 \prod_{j=1}^{m} X_j^{a_j} \exp(e)$, (3)

c) semilogarytmiczna $Y = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \ln X_j + e$, (4)

d) wykładnicza $Y = \exp(a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j X_j + e)$, (5)

gdzie: $a_0,\dots,a_m$ – współczynniki regresji, $X_1,\dots,X_m$ – zmienne regresyjne.

Wśród czynników, które decydują o częstym wyborze tych funkcji w badaniach marketingowych, wymienia się (por. np. Jain i Vilcassim (1989)):

a) łatwość estymacji, ponieważ modele te są liniowe lub sprowadzalne do postaci liniowej,

b) prosta interpretacja współczynników regresji (np. elastyczności punktowe do modelu potęgowego równają się wartościom współczynników regresji),

c) empiryczne rezultaty dają dobry opis badanej rzeczywistości ekonomicznej.

Częściej w badaniach marketingowych wykorzystuje się modele potęgowe (prace, w których zaczęto je wykorzystywać w modelowaniu marketingowym, zaczęły powstawać po roku 1970 – por. Naert i Leeflang (1978), s. 75) niż liniowe ze względu na to, że nie zakładają one braku interakcji między zmiennymi objaśniającymi, tak jak to jest w modelach liniowych. Ponadto chłonność rynku w odniesieniu do danego produktu jest na ogół ograniczona, więc do opisu zależności w funkcji popytu należy przyjąć funkcje o malejących przyrostach. Model liniowy jest funkcją o stałych przyrostach, model potęgowy zaś jest funkcją o malejących przyrostach, gdy suma współczynników elastyczności punktowych jest mniejsza od jedności ( $\sum_{j=1}^{m} a_j < 1$ ).

Gdy zmienną zależną jest udział sprzedaży danej marki w rynku ( $m_{st}$ ) przedstawione modele nie spełniają dwóch warunków, tzn.

$$0 \le m_{st} \le 1 \text{ i } \sum_{s=1}^{C} m_{st} = \sum_{s=1}^{C} \frac{A_{st}}{\sum_{c=1}^{C} A_{ct}} = 1 \ \forall\, s = 1,\dots,C;\ t = 1,\dots,T, \qquad (6)$$

gdzie: $A_{st}$ – model atrakcyjności (*attraction model*) marki *s* w okresie *t*.

Udział w rynku marki *s* jest równy ilorazowi atrakcyjności tej marki do sumy atrakcyjności wszystkich marek produktu. Modele spełniające warunki określone w (6) określa się mianem modeli atrakcyjności udziału w rynku (*market share attraction models*). Dla modeli tych przyjmuje się następujące aksjomaty (zob. Bell, Keeney i Little (1975)):

1. $A_{st} \ge 0$ dla $s = 1,\dots,C$ i $t = 1,\dots,T$. Oznacza to, że $\sum_{c=1}^{C} A_{ct} > 0$ dla $t = 1,\dots,T$.
2. Zerowa atrakcyjność marki oznacza jej zerowy udział w rynku ( $A_{st} = 0 \Rightarrow m_{st} = 0$ ).
3. Marki o tej samej atrakcyjności mają ten sam udział w rynku ( $A_{st} = A_{ct} \Rightarrow m_{st} = m_{ct}$ ).
4. Jeżeli wzrośnie atrakcyjność jakiejś marki, przy założeniu tego samego poziomu atrakcyjności innych marek, to wzrost jej udziału w rynku będzie pochodzić z łącznego spadku udziału w rynku pozostałych marek (spadek udziału każdej z nich będzie proporcjonalny do ich bieżących udziałów).

Do podstawowych modeli atrakcyjności udziału w rynku zalicza się modele MCI (*Multiplicative Competitive Interaction*) i MNL (*MultiNomial Logit*). Model MCI przyjmuje postać:

$$m_{st} = \frac{a_{0s} \prod_{j=1}^{m} X_{jst}^{a_{js}} \exp(e_{st})}{\sum_{c=1}^{C} \left[ a_{0c} \prod_{j=1}^{m} X_{jct}^{a_{jc}} \exp(e_{ct}) \right]}, \quad \begin{matrix} t = 1,\dots,T \\ s = 1,\dots,C \end{matrix}, \qquad (7)$$

gdzie: $X_{jst}$ – *j*-ta zmienna objaśniająca (np. cena, wydatki na reklamę, kanały dystrybucji) dla marki *s* w okresie *t*.

Model o postaci (7) należy do często wykorzystywanych w badaniach marketingowych (por. np. Abeele, Gijsbrechts i Vanhuele (1990); Alsem, Leeflang i Reuyl (1989); Jain i Vilcassim (1989); Ghosh, Neslin i Shoemaker (1984)).

Po wyznaczeniu funkcji (7) dotyczących dwóch produktów $s$ i $c$ oraz po obliczeniu ich ilorazu (zakładając, że $a_{js} = a_j$ $\forall$ $s$ = 1, ..., $C$) Bultez i Naert (1975) otrzymali model potęgowy postaci analogicznej do (3):

$$m_{st} / m_{ct} = a_{0s} / a_{0c} \prod_{j=1}^{m} (X_{jst} / X_{jct})^{a_j} \exp(e_{st} - e_{ct}), \tag{8}$$

gdzie: $Y_t = m_{st} / m_{ct}$; $a_0 = a_{0s} / a_{0c}$; $X_{jt} = X_{jst} / X_{jct}$; $e_t = (e_{st} - e_{ct})$; $s = 1, \ldots, C$; $t = 1, \ldots, T$.

Model atrakcyjności udziału w rynku MNL przyjmuje postać (zob. np. Lilien, Kotler i Moorthy (1992), s. 670; Leeflang i in. (2000), s. 172):

$$m_{st} = \frac{\exp\left(a_{0s} + \sum_{j=1}^{m} a_{js} X_{jst} + e_{st}\right)}{\sum_{c=1}^{C} \left[\exp\left(a_{0c} + \sum_{j=1}^{m} a_{jc} X_{jct} + e_{ct}\right)\right]}, \quad \begin{matrix} t = 1, \ldots, T \\ s = 1, \ldots, C \end{matrix}. \tag{9}$$

Po wyznaczeniu funkcji (9) dotyczących dwóch produktów $s$ i $c$ oraz po obliczeniu ich ilorazu (zakładając, że $a_{js} = a_j$ $\forall$ $s$ = 1, ..., $C$) otrzymuje się model wykładniczy postaci analogicznej do (5):

$$m_{st} / m_{ct} = \exp\left[(a_{0s} - a_{0c}) + \sum_{j=1}^{m} a_j (X_{jst} - X_{jct}) + (e_{st} - e_{ct})\right], \tag{10}$$

gdzie: $Y_t = m_{st} / m_{ct}$; $X_{jt} = (X_{jst} - X_{jct})$; $a_0 = (a_{0s} - a_{0c})$; $e_t = (e_{st} - e_{ct})$; $s = 1, \ldots, C$; $t = 1, \ldots, T$.

Inne sposoby transformacji liniowej modeli atrakcyjności udziału w rynku o postaci (7) i (9) zaprezentowano w pracach: Fok, Franses i Paap (2002), s. 237-241; Franses i Paap (2001), s. 47-48; Leeflang i in. (2000), s. 176-178.

Do głównych zastosowań marketingowych analizy regresji zalicza się wyznaczenie prognozy sprzedaży lub prognozy udziału w rynku oraz symulacja i opracowanie scenariuszy (np. na podstawie wyznaczonych współczynników elastyczności przewidywanie zmian w popycie przy różnych wariantach zmian w wartościach zmiennych objaśniających kontrolowanych przez firmę). Zatem ważnym zagadnieniem w badaniach marketingowych jest wyznaczenie współczynników elastyczności popytu mierzących względne zmiany popytu wywołane określonymi względnymi zmianami zmiennych objaśniających. Znając zmienne, które określają popyt na produkt badanej firmy, oraz wielkość i kierunek ich zmian, możemy za pomocą współczynników elastyczności określić wpływ tych zmiennych na wzrost lub spadek popytu. Znajomość elastyczności popytu na dane dobro pozwala podjąć właściwe decyzje odnośnie do zmian w wartościach zmiennych objaśniających kontrolowanych przez firmę.

## 3. Współczynniki elastyczności

Jednym z istotnych problemów w analizie regresji jest mierzenie wpływu oddziaływania zmiennych regresyjnych $X_1,\ldots,X_m$ na wyróżnioną zmienną zależną *Y*. Mierniki wpływu są zwykle konstruowane w taki sposób, że informują, o ile zmieni się wartość zmiennej zależnej, gdy zmieni się wybrana zmienna regresyjna. Na ogół zakłada się, że pozostałe zmienne utrzymują się na stałym poziomie (*ceteris paribus*). Założenie to jest pewnym uproszczeniem, gdyż często się zdarza, że zmienne są ze sobą powiązane, tak że zmiana wartości jednej z nich pociąga za sobą zmiany wartości innych zmiennych, a te z kolei oddziałują na zmienną zależną. Miernik, który nie zakłada warunku *ceteris paribus*, zostanie omówiony w dalszej części.

Mierniki wpływu mogą mierzyć wpływ przyrostu *j*-tej zmiennej regresyjnej $\Delta X_j$ na przyrost zmiennej zależnej lub mogą mierzyć wpływ przyrostu względnego *j*-tej zmiennej regresyjnej $\frac{\Delta X_j}{X_{jt}}$ ($\Delta X_j = X_{jq} - X_{jt}$; $j = 1,\ldots,m$; $t, q = 1,\ldots,T$; $q > t$) na przyrost względny zmiennej zależnej. W pierwszym przypadku mierniki te są mianowane, w drugim zaś są zwane miernikami elastyczności i są niemianowane.

Pionierską pracą w zakresie konstrukcji mierników wpływu były *Zasady ekonomiki* Marshalla (por. Winkler (1957), s. 227). W pracy tej Marshall podał klasyczną definicję elastyczności w punkcie, choć jej precyzyjne matematyczne sformułowanie pierwszy dał Allen (1938; 1961). Omówienie różnych konstrukcji mierników wpływu przedstawiono m.in. w pracach: Winklera (1957); Kolupy (1963); Pawłowskiego (1961; 1963; 1981); Barczaka (1976; 1979); Walesiaka (1993).

Klasyczna elastyczność zmiennej zależnej $\hat{Y}$ względem zmiennej regresyjnej $X_j$ w punkcie $(X_{1t},\ldots,X_{mt})$ wyraża się wzorem:

$$W_{X_j} \cong f'_{X_j}(X_{1t},\ldots,X_{mt})\frac{X_{jt}}{\hat{Y}_t}, \tag{11}$$

gdzie: $W_{X_j}$ – wpływ przyrostu 1% zmiennej regresyjnej $X_j$ (*ceteris paribus*) na przyrost względny zmiennej zależnej (w procentach),
$f'_{X_j}(X_{1t},\ldots,X_{mt})$ – pochodna cząstkowa funkcji (1) względem zmiennej $X_j$ w punkcie $(X_{1t},\ldots,X_{mt})$; $\Delta X_j = \alpha_j X_{jt}$; $\alpha_j = (X_{jq} - X_{jt})X_{jt}^{-1}$; $j = 1,\ldots,m$; $t, q = 1,\ldots,T$; $q > t$.

W przypadku, gdy zmienna regresyjna $X_j$ otrzymuje więcej niż 1% przyrost elastyczność zmiennej zależnej $\hat{Y}$ względem $X_j$ w punkcie $(X_{1t},\ldots,X_{mt})$ wyznacza się ze wzoru:

$$W_{X_j} \cong 100\alpha_j f'_{X_j}(X_{1t},\ldots,X_{mt})\frac{X_{jt}}{\hat{Y}_t}, \qquad (12)$$

gdzie: $W_{X_j}$ – wpływ przyrostu względnego zmiennej regresyjnej $X_j$ (*ceteris paribus*) na przyrost względny zmiennej zależnej (w procentach),

$\alpha_j = (X_{jq} - X_{jt})X_{jt}^{-1}$; $j = 1,\ldots,m$; $t,q = 1,\ldots,T$; $q > t$.

Informuje on, jaki jest procentowy przyrost wartości zmiennej zależnej w wyniku $100\alpha_j$ % przyrostu wartości zmiennej regresyjnej $X_j$ (*ceteris paribus*). Należy pamiętać, że dopuszczalne jest wykorzystanie wzoru na elastyczność o postaci $W_{X_j}$ tylko w odniesieniu do stosunkowo małych przyrostów względnych wartości zmiennych regresyjnych.

Posługiwanie się w badaniach ekonomicznych klasycznym wzorem na elastyczność punktową jest często nieuzasadnione, zwykle bowiem zmienne regresyjne $X_1,\ldots,X_m$ otrzymują przyrosty istotnie różne od zera. W takim przypadku należy zmodyfikować wzór na elastyczność, aby wyeliminować tę niedogodność. W pracy Walesiaka (1993), s. 89-93 zaproponowano wzór na elastyczność zmiennej $\hat{Y}$ względem zmiennej regresyjnej $X_j$, który eliminuje wady wzoru klasycznego:

$$W_{X_j}^{(\infty)} = \frac{100}{\hat{Y}_t}\int_K f'_{X_j}(X_1,\ldots,X_m)dX_j, \qquad (13)$$

gdzie: $W_{X_j}^{(\infty)}$ – wpływ przyrostu względnego wartości zmiennej regresyjnej $X_j$ na przyrost względny zmiennej zależnej (w procentach),

$\int_K f'_{X_j}(X_1,\ldots,X_m)dX_j$ – całka krzywoliniowa drugiego rodzaju (wzdłuż rzutu) po krzywej albo po drodze *K* funkcji $f'_{X_j}(X_1,\ldots,X_m)$ po $dX_j$ (por. Bronsztejn i Siemiendiajew (1986), s. 519-521).

Jeśli równania drogi *K* dane są w postaci parametrycznej $X_1 = X_1(p),\ldots,X_m = X_m(p)$ to wzór na elastyczność zmiennej $\hat{Y}$ względem zmiennej $X_j$ wyznacza się ze wzoru:

$$W_{X_j}^{(\infty)} = \frac{100}{\hat{Y}_t}\int_{p_0}^{P} f'_{X_j}[X_1(p),\ldots,X_m(p)]X'_j(p)dp. \qquad (14)$$

Elastyczność $W_{X_j}^{(\infty)}$ zależy zarówno od punktu odpowiadającego stanowi wyjściowemu, tj. $(X_{1t},\ldots,X_{mt})$, od przyrostu zmiennej regresyjnej $X_j$, jak i od drogi przejścia od stanu wyjściowego do stanu końcowego, tj. $(X_{1q},\ldots,X_{mq})$. Zatem w przypadku tego miernika nie zakłada się warunku *ceteris paribus* dla pozostałych zmiennych regresyjnych (tj. różnych od *j*-tej zmiennej regresyjnej).

Oprócz tego miernik $W_{X_j}^{(\infty)}$ w przeciwieństwie do miernika $W_{X_j}$ może być stosowany przy dużych przyrostach badanej zmiennej regresyjnej.

Jeśli równanie drogi $K$ jest odcinkiem, to wzór na elastyczność zmiennej $\hat{Y}$ względem zmiennej regresyjnej $X_j$ jest następujący:

$$W_{X_j}^{(\infty)} = 100\alpha_j \frac{X_{jt}}{\hat{Y}_t} \int_0^1 f'_{X_j}\left[X_1(p),\ldots,X_m(p)\right]dp, \tag{15}$$

gdzie: równanie parametryczne odcinka $K$ o początku $(X_{1t},\ldots,X_{mt})$ i końcu $(X_{1q},\ldots,X_{mq})$:

$X_1(p) = X_{1t} + \Delta X_1 p = X_{1t}(1+\alpha_1 p)$

......................................................... , $p \in [0;1]$.

$X_m(p) = X_{mt} + \Delta X_m p = X_{mt}(1+\alpha_m p)$

Miernik elastyczności postaci (15) informuje, jaki jest procentowy przyrost wartości zmiennej zależnej $\hat{Y}$ w wyniku $100\alpha_j\%$ przyrostu wartości zmiennej regresyjnej $X_j$ (przy założeniu, że pozostałe zmienne regresyjne otrzymują $100\alpha_l\%$ ($l=1,\ldots,m$; $l \neq j$) przyrost wartości i równanie drogi $K$ jest odcinkiem).

Tabela 1. Elastyczności dotyczące modeli z wieloma zmiennymi objaśniającymi

| Postać modelu | Elastyczność klasyczna $W_{X_j}$ wg (12) | Elastyczność $W_{X_j}^{(\infty)}$ wg (15) |
|---|---|---|
| liniowa | $W_{X_j} = 100\alpha_j a_j \frac{X_{jt}}{\hat{Y}_t}$ | $W_{X_j}^{(\infty)} = 100\alpha_j a_j \frac{X_{jt}}{\hat{Y}_t}$ |
| potęgowa | $W_{X_j} = 100\alpha_j a_j$ | $W_{X_j}^{(\infty)} = 100 a_j \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} a_j}\left[(1+\alpha_j)^{\sum_{j=1}^{m} a_j} - 1\right]$ * |
| semilogarytmiczna | $W_{X_j} = 100\alpha_j \frac{a_j}{\hat{Y}_t}$ | $W_{X_j}^{(\infty)} = 100\ln\lvert 1+\alpha_j\rvert \frac{a_j}{\hat{Y}_t}$ |
| wykładnicza | $W_{X_j} = 100\alpha_j a_j X_{jt}$ | $W_{X_j}^{(\infty)} = \frac{100\alpha_j a_j X_{jt}}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j a_j X_{jt}}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j a_j X_{jt}\right\} - 1\right]$ |

* wzór wyprowadzono zakładając, że wszystkie zmienne regresyjne otrzymują przyrost równy $\alpha_j$. Źródło: opracowanie własne na podstawie prac: Walesiak (1993), s. 96-98, errata; Walesiak (1996).

Obecnie porównamy klasyczną elastyczność $W_{X_j}$ zmiennej zależnej $Y$ względem zmiennej regresyjnej $X_j$ w punkcie (wyznaczoną według wzoru (12)) z elastycznością $W_{X_j}^{(\infty)}$ (formuła (15)) dla funkcji liniowej, potęgowej, semilogarytmicznej i wykładniczej (tab. 1).

W badaniach marketingowych często bada się relacje zachodzące pomiędzy dwiema zmiennymi, gdzie zazwyczaj zmienną zależną jest wielkość sprzedaży badanego dobra, a objaśniającą wydatki na jego reklamę i promocję. Bardzo dobry przegląd modeli z jedną zmienną objaśniającą zawierają prace: Saunders (1987); Lilien, Kotler i Moorthy (1992), s. 651-660. Oprócz modeli już omówionych, tzn. liniowego, potęgowego, wykładniczego i semilogarytmicznego (w tym przypadku z jedną zmienną objaśniającą) oraz wyznaczonych dla nich elastyczności, tab. 2 zawiera pięć dalszych modeli.

Tabela 2. Elastyczności dotyczące modeli z jedną zmienną objaśniającą

| Postać modelu | |
|---|---|
| Elastyczność klasyczna $W_{X_j}$ wg (12) | Elastyczność $W_{X_j}^{(\infty)}$ wg (15) |
| Parabola $\hat{Y}_t = a_0 + a_1 X_{jt} + a_2 X_{jt}^2$ | |
| $100\alpha_j X_{jt} \hat{Y}_t^{-1}(a_1 + 2a_2 X_{jt})$ | $100\alpha_j X_{jt} \hat{Y}_t^{-1}(a_1 + 2a_2 X_{jt} + \alpha_j a_2 X_{jt})$ |
| Wielomian trzeciego stopnia $\hat{Y}_t = a_0 + a_1 X_{jt} + a_2 X_{jt}^2 + a_3 X_{jt}^3$ | |
| $100\alpha_j X_{jt} \hat{Y}_t^{-1}(a_1 + 2a_2 X_{jt} + 3a_3 X_{jt}^2)$ | $100\alpha_j X_{jt} \hat{Y}_t^{-1}\left[a_1 + 2a_2 X_{jt} + \alpha_j a_2 X_{jt} + 3a_3 X_{jt}^2 (1+\alpha_j + \alpha_j^2)\right]$ |
| Hiperbola $\hat{Y}_t = a_0 + a_1 X_{jt}^{-1}$ | |
| $-100a_1 (X_{jt} \hat{Y}_t)^{-1} \alpha_j$ | $100a_1 (X_{jt} \hat{Y}_t)^{-1}\left[(1+\alpha_j)^{-1} - 1\right]$ |
| $\hat{Y}_t = a_0 + a_1 \sqrt{X_{jt}}$ | |
| $100a_1 \sqrt{X_{jt}} (\hat{Y}_t)^{-1} \frac{\alpha_j}{2}$ | $100a_1 \sqrt{X_{jt}} \hat{Y}_t^{-1}\left[\sqrt{1+\alpha_j} - 1\right]$ |
| $\hat{Y}_t = a_0\left[1 - \exp(-a_1 X_{jt})\right]$ | |
| $-100a_1 \alpha_j X_{jt} \frac{\hat{Y}_t - a_0}{\hat{Y}_t}$ | $-100\left[1 - \exp(-a_1 \alpha_j X_{jt})\right]\frac{\hat{Y}_t - a_0}{\hat{Y}_t}$ |

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem prac: Walesiak (1993), s. 96-98, errata; Walesiak (1996).

## 4. Podsumowanie

W artykule scharakteryzowano problematykę ekonometrycznego modelowania zjawisk marketingowych w aspekcie typologii modeli marketingowych oraz specyfikacji zmiennych występujących w modelach marketingowych. Szczególnej analizie poddano modele marketingowe wyodrębniane ze względu na poziom popytu: modele produktu, modele marki, modele udziału w rynku.

Ważnym zagadnieniem w modelowaniu marketingowym jest wyznaczenie współczynników elastyczności popytu mierzących względne zmiany popytu wywołane określonymi względnymi zmianami zmiennych objaśniających. W artykule porównano klasyczną elastyczność punktową z proponowaną elastycznością nie zakładającą warunku *ceteris paribus* dla funkcji z wieloma i jedną zmienną objaśniającą.

## Literatura


Abeele, P.V., Gijsbrechts, E., Vanhuele, M. (1990), Specification and empirical evaluation of a cluster-asymmetry market share model, *International Journal of Research in Marketing*, 7, s. 223 - 247.

Allen, R.G.D. (1938), *Mathematical analysis for economists,* MacMillan, London.

Allen, R.G.D. (1961), *Ekonomia matematyczna*, PWN, Warszawa.

Alsem, K.J., Leeflang, P.S.H., Reuyl, J.C. (1989), The forecasting accuracy of market share models using predicted values of competitive marketing behavior, *International Journal of Research in Marketing*, 1989, 6, s. 183 - 198.

Barczak, A. (1976), *Makromodele ekonometryczne a planowanie gospodarki narodowej,* PWN, Warszawa.

Barczak, A. (1979), Pomiar efektów oddziaływania zmiennych egzogenicznych i decyzyjnych, w: Z. Pawłowski (red.), *Ekonometryczne metody prognozowania wykonania planów gospodarczych,* PWN, Warszawa.

Bell, D.E., Keeney, R.L., Little, J.D.C. (1975), A market share theorem, *Journal of Marketing Research*, 12, s. 136 - 141.

Bronsztejn, Z.N., Siemiendiajew, K.A. (1986), *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa.

Brodie, R., de Kluyver, C.A. (1984), Attraction versus linear and multiplicative market share models: an empirical evaluation, *Journal of Marketing Research*, May, s. 194 - 201.

Bultez, A.V., Naert, P.A. (1975), Consistent sum-constrained models*, Journal of the American Statistical Association*, 70/351, s. 529 - 535.

Fok, D., Franses, P.H., Paap, R. (2002), Econometric analysis of the market share attraction model, w: P.H. Franses, A.L. Montgomery (Eds), *Econometric models in marketing,* JAI Press, Amsterdam, s. 223 - 256.

Franses, P.H., Paap, R. (2001), *Quantitative models in marketing research*, Cambridge University Press, Cambridge.

Franses P.H., Montgomery A.L. (Eds) (2002), *Econometric models in marketing*, JAI Press, Amsterdam.

Ghosh, A., Neslin, S., Shoemaker, R. (1984), A comparison of market share models and estimation procedures, *Journal of Marketing Research*, May, 21, s. 202 - 210.

Hagerty, M.R., Carman, J.M., Russell, G.J. (1988), Estimating elasticities with PIMS data: methodological issues and substantive implications, *Journal of Marketing Research*, February, s. 1 - 9.

Jain, D.C., Vilcassim, N.J. (1989), Testing functional forms of market share models using the Box-Cox transformation and the Lagrange multiplier approach, *International Journal of Research in Marketing*, 67, s. 95 - 107.

Kolupa, M. (1963), Prognozy popytu a miary elastyczności popytu, *Przegląd Statystyczny*, 4, s. 423 - 426.

Leeflang, P.S.H., Wittink, D.R., Wedel, M., Naert, P.A. (2000), *Building models for marketing decisions*, Kluwer, Boston, Dordrecht, London.

Leone, R.P., Schultz, R.L. (1980), A study of marketing generalizations, *Journal of Marketing*, Winter, 44, s. 10 - 18.

Lilien, G.L., Kotler, P., Moorthy, S.K. (1992), *Marketing models*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Menezes, M.A.J., Currim, I.S. (1992), An approach for determination of warranty length, *International Journal of Research in Marketing*, 9/2, s. 177 - 195.

Naert, P.A., Leeflang, P.S.H. (1978), *Building implementable marketing models*, Martinus Nijhoff Social Sciences Division, Boston.

Parsons, L.J., Schultz, R.L. (1976), *Marketing models and econometric research*, American Elsevier Publishing, New York.

Pawłowski, Z. (1961), *Ekonometryczne metody badania popytu konsumpcyjnego*, PWN, Warszawa.

Pawłowski, Z. (1963), Uogólniona miara elastyczności popytu, *Przegląd Statystyczny*, 2, 191 - 201.

Pawłowski, Z. (1981), *Elementy ekonometrii. Podręcznik*, PWN, Warszawa.

Saunders, J.A. (1987), The specification of aggregate market models, *European Journal of Marketing*, 21/2.

Walesiak, M. (1993), *Statystyczna analiza wielowymiarowa w badaniach marketingowych*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 654. Seria: Monografie i opracowania nr 101.

Walesiak, M. (1996), Wykorzystanie analizy regresji w badaniach marketingowych, w: *Informatyka i Ekonometria* 1. Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 718, 133 - 144.

Winkler, W. (1957), *Podstawowe zagadnienia ekonometrii*, PWN, Warszawa.